

Name:

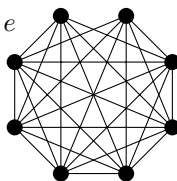
1	2	3	4	Σ

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

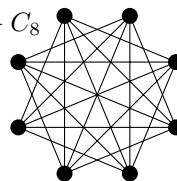
- 4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.
- Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
- Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.
- Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
- Číselné výsledky tvaru $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$ apod. není potřeba dále zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.

1. (a) Definujte vrcholové pokrytí v grafu G .
(b) Pro grafy G a H níže určete velikost nejmenšího vrcholového pokrytí (stačí číselná odpověď).
(c) Zformulujte König-Egerváryho větu o pokrytích a párováních. [6 points]

$$G = K_8 - e$$

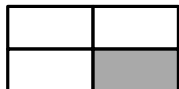


$$H = K_8 - C_8$$



2. (a) Definujte vytvořující funkci $f(x)$ posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.
- (b) Pro $n \geq 1$ označme a_n počet možností, jak pomocí bílých a šedých dlaždic tvaru 2×1 vydláždit chodbu $2 \times n$ tak, aby nikde nebyly přesně pod sebou dvě bílé dlaždice naležato. (Na obrázku dole je vlevo jedna zakázaná možnost a vpravo dvě různé povolené možnosti pro $n = 4$.)
- Určete a_1 a a_2 (klademe $a_0 = 1$).
 - Najděte rekurentní vztah pro a_n , tj. pro $n \geq 3$ vyjádřete a_n pomocí předchozích členů.
 - Vyjádřete vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ v uzavřeném tvaru (bez tří teček).
 - Najděte explicitní vzorec pro a_n . [9 points]

ne:



ano:



3. (a) Zformulujte Ušaté lemma pro vrcholově 2-souvislé grafy
(b) Dokažte ho.

[7 points]

4. Rozhodněte, zda lze čísla $\{1, 2, 3, \dots, 140\}$ obarvit dvěma barvami tak, aby každá aritmetická posloupnost délky 11 obsahovala čísla více barev. (Hint: Uvažte náhodné obarvení.) [8 points]

Extra page 1/2 if you need it.

Extra page 2/2 if you need it.
