Ještě posloupnosti – příklady

1. Určete následující limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$, $a>0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n}{n-\sin n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $\{a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right\}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^2}$;

2. a) Pokuste se určit plošný obsah rovinné oblasti ω, kde

$$\omega = \{[x,y];\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x^2,\ a>0\}.$$

jako limitu posloupnosti S_n, kde S_n je součet obsahů obdélníků O_{nk}, kde

$$O_{nk} = \left\langle \frac{k-1}{n}\cdot a, \frac{k}{n}\cdot a \right\rangle \times \left\langle 0, \left(\frac{k}{n}\cdot a\right)^2 \right\rangle,\ k=1,2,\dots n,$$

b) Pokuste se o totéž pro oblast ω, kde

$$\omega = \{[x,y];\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le e^x\}.$$

3. Dokažte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

a použijte k výpočtu následujících limit:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!}$; $\lim_{n\to\infty} n^k a^n$, $k\in\mathbb{N}$, $|a|<1$.

4. Analogicky per neurčité limitu: Dokažte:

a) $\left(\exists \alpha>1\ \exists n_0\ \forall n>n_0 : \sqrt[n]{a_n} > \alpha\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

b) $\left(\exists \alpha>1\ \exists n_0\ \forall n>n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

c) limitní tvar (a, b): dokažte, že platí:

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

d) Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

(návod: lze analogicky také tvar, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pro každé reálné a)

5. Nekonečné posloupnosti

a) Řekneme, že nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ má konečnou hodnotu a, když $\lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} a_n = a$.

Ukažte, že součin $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

b) Nejprve posloupnost $\{a_n\}$ definovanou rekurentně:

$a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) ukažte, že $\{a_n\}$ je konvergentní;

b) určete $\lim a_n$.

(návod: $\{a_n\}$ je neklesající, shora omezená posloupnost)

c) Eukleidés znal (avšak ne v terminologii posloupností) dokázal, že $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ pro $|a|<1$.

(jednodušší než z definice)

d) Ukažte, že konvergují posloupnosti

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n .$$

(návod: posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a omezená – užijte nerovnosti

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$$

Nekonečné řady (– první část)

1. Užití definice

a) nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$; určete $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$;

b) Sečtěte řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

c) Vyšetřete konvergenci (resp. divergenci) řady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

d) Ukaže, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverguje

(ukaže z definice, pak také užitím srovnávacího kritéria)

2. Kritéria konvergence

Vyšetřete konvergenci řad: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \geq 2$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}\sqrt{n}}$ $\alpha \geq 2$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+3}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$;

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n$;

Vyšetřete, pro jaké $a>0$ konvergují řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$ $\left(\text{nebo } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}\right)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.