

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2024–2025

LUBOŠ PICK

6. ČÍSELNÉ ŘADY

6.1. Základní pojmy.

Definice. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** (je **konvergentní**), je-li $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ vlastní. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (je **divergentní**), jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞ , respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim s_m = \infty$, respektive $\lim s_m = -\infty$. Číslo $a_n, n \in \mathbb{N}$, je **n -tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a číslo $s_m, m \in \mathbb{N}$, je jejím **m -tým částečným součtem**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je jakožto matematický objekt totožná s posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud tedy hovoříme o řadě a ne o posloupnosti, říkáme tím, že nás zajímají otázky související s příslušnou posloupností částečných součtů.

Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí tedy jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny \mathbb{R}^* až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojnásobnost nepůsobí žádné potíže.

Poznámka. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} & \begin{cases} \infty, \text{ pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje a nemá součet.} \end{cases}$$

Poznámka. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti. Necht' $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje řadu, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde $s_m = \sum_{j=k}^m a_j$, pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Případná zobecnění výsledků pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jsou přímočará.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ tedy diverguje.

Definice. Necht' $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

Příklad. Necht' $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

- (a) řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$,
- (b) pokud $|q| < 1$, potom $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Řešení. (a) Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$. Potom dostáváme

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pro } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ n+1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Případ $q \geq 1$. Potom z výše uvedeného vyplývá, že $\lim s_n = \infty$. Naše řada tedy diverguje.

Případ $|q| < 1$. Potom platí $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy naše řada konverguje.

Případ $q = -1$. Řada diverguje podle předcházejícího příkladu.

Případ $q < -1$. Platí $\lim s_{2n} = \infty$ a $\lim s_{2n-1} = -\infty$, a tedy $\lim s_n$ neexistuje. Proto řada diverguje.

(b) Plyne z předchozího.

Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Řešení. Platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) = 1.$$

Poznámka (součet versus konvergence). Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. Pokud však ukážeme, že je řada konvergentní, můžeme její součet alespoň přiblížit pomocí hodnot částečných součtů.

Poznámka (změna konečného počtu členů řady). Pro nekonečné řady nemá změna konečně mnoha členů řady vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet).

Pro důkaz předchozího tvrzení označme n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako s_n a n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jako t_n . Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$s_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k = \sum_{k=n_1}^n a_k = \sum_{k=n_1}^n b_k = t_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k,$$

neboli $s_n = t_n + c$, kde $c = \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k \in \mathbb{R}$. Má-li tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet $A \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim s_n = A$, a tedy $\lim t_n = A - c$. Výraz $A - c$ je definován, neboť $c \in \mathbb{R}$. Pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $A \in \mathbb{R}$, a tedy také $A - c \in \mathbb{R}$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Tím je dokázána jedna implikace. Opačnou lze dokázat obdobně.

Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

Věta 6.1 (nutná podmínka konvergence řady). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.*

Důkaz. Položme $s_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Zřejmě existuje také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. Podle věty o aritmetice limit tedy platí $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. \square

Poznámka. V některých případech lze použít Větu 6.1 k odvození divergence řady. Jestliže je $\{a_n\}$ posloupnost a neplatí $\lim a_n = 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.

Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Řešení. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je zřejmě rostoucí. Tedy existuje $\lim s_n$, kterou označíme symbolem A . Navíc platí $A = \sup\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $A \geq s_1 > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $n = n_0 + 1$ a $m = 2n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n_0$, platí $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$. Tudíž máme

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ jsme tedy odvodili

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: |s_m - s_n| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tedy nespĺňuje BC podmínku, a proto diverguje. Platí tedy $A \notin \mathbb{R}$. Protože $A > 0$, platí $A = \infty$.

Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**. Název řady vychází z faktu, že každý člen řady kromě prvního je harmonickým průměrem svých sousedních členů.

Poznámka. Harmonická řada ukazuje, že opačná implikace v tvrzení Věty 6.1 neplatí. Platí totiž $\lim \frac{1}{n} = 0$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Věta 6.2 (řady a aritmetické operace). *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.*

- Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- Nechť je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

konec 1. přednášky (18.2.2025)

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ a $t_m = \sum_{n=1}^m b_n$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit obdržíme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \alpha a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha s_m = \alpha \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (a_n + b_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_m + t_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} s_m + \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \end{aligned}$$

□

Důsledek. *Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 6.3 (konvergentní a divergentní řada). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergentní.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, je podle Důsledku také řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. To je spor. □

Věta 6.4 (Bolzanova—Cauchyova podmínka konvergence řady). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,
 (ii) platí výrok

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Položme $s_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí $\sum_{k=n}^m a_k = s_m - s_{n-1}$.

(i) \Rightarrow (ii) Posloupnost $\{s_n\}$ konverguje, a proto splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku. Pomocí této podmínky ověříme (ii). Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $p_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq p_0, m \geq p_0: |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = p_0 + 1$. Pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$, platí $m > n - 1 \geq n_0 - 1 = p_0$, a tedy

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| = |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Tím je tvrzení (ii) dokázáno.

(ii) \Rightarrow (i) Ověříme Bolzanovu—Cauchyovu podmínku pro posloupnost $\{s_n\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ podle (1). Zvolme $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0, m \geq n_0$. Potom podle (ii) platí

$$|s_n - s_m| = \begin{cases} \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon & \text{pro } n > m, \\ 0 < \varepsilon & \text{pro } n = m, \\ \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon & \text{pro } m > n. \end{cases}$$

V prvním případě používáme nerovnost $n \geq m + 1 > n_0$ a ve třetím $m \geq n + 1 > n_0$. Posloupnost $\{s_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku, a tudíž konverguje. Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. □

Poznámka. Není těžké si rozmyslet, že výrok (1) je ekvivalentní výroku

$$\exists C > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < C\varepsilon.$$

6.2. Řady s nezápornými členy. Důležitý speciální případ řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$. Takové řady mají vždy součet (Věta 6.5) a ke zkoumání jejich konvergence máme k dispozici speciální kritéria (např. Věty 6.7, 6.8 a 6.9).

Věta 6.5 (existence součtu řady s nezápornými členy). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak má $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet.*

Důkaz. Označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ pro $m \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy. Tudíž $\lim\{s_m\}$ existuje, a tedy existuje součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Věta 6.6 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.*

- (a) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- (b) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Posloupnost $\{t_n\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_n + t_n\}$ shora omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq s_n + t_n$, a tedy je i posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená. Navíc je neklesající, a tedy konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvrzení plyne z (a). \square

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní pro každé $\alpha \in [2, \infty)$ a divergentní pro každé $\alpha \in (-\infty, 1]$.

Řešení. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = n^{-\alpha}$. Nechť $\alpha \in [2, \infty)$. Označme $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} = b_n.$$

Z výše uvedeného příkladu vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní, a tedy je podle Věty 6.2 konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle Věty 6.6(a) je tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Nechť $\alpha \in (-\infty, 1]$. Označme $c_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řady s nezápornými členy a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n \leq a_n.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje, podle Věty 6.6(b) diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka. Zatím nevíme, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, či diverguje pro $\alpha \in (1, 2)$.

Věta 6.7 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.*

- (a) *Jestliže $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*
- (b) *Jestliže $A = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- (c) *Jestliže $A = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz. (a) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$(2) \quad \frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}.$$

\Rightarrow Z první nerovnosti v (2) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A}a_n$. Podle Věty 6.2 konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A}a_n$, a tedy podle Věty 6.6(a) konverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

\Leftarrow Z druhé nerovnosti v (2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3A}{2}b_n$. Obdobným způsobem jako v důkazu opačné implikace lze nyní dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

(b) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$. Pak $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 6.6(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq b_n$. Podle Věty 6.6(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. \square

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle výše uvedeného příkladu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 6.7(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Věta 6.8 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže*

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(c) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(d) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

(e) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0, 1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní. Podle Věty 6.6(a) je tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Zvolme $q \in (A, 1)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{\sqrt[n]{a_n}; n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Tvrzení tedy plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Protože $A > 1$, nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0$, a tedy ani $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Podle Věty 6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení plyne z (d). \square

Poznámka. Jestliže $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ může konvergovat i divergovat. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Příklad. Necht' $a > 1$ a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Platí

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podle Věty 6.8(c) tedy řada konverguje.

Věta 6.9 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže*

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) *Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(c) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(d) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. (a) Matematickou indukcí dokážeme výrok

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konverguje. Podle Věty 6.6(a) tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nalezneme $q \in (0, 1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Tvrzení pak plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \geq a_{n_0}.$$

Podle předpokladu platí $a_{n_0} > 0$, a tedy neplatí $\lim a_n = 0$. Podle Věty 6.1 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. \square

Poznámka. Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ může konvergovat i divergovat. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž obě řady splňují $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Poznámka. Předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Například řada

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \dots$$

konverguje, ale $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$.

Řešení. Řada zřejmě diverguje pro $k = 1$. Předpokládejme, že $k \geq 2$. Řada má kladné členy a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$(4) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(kn+1) \dots (kn+k)} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^k}{(k + \frac{1}{n}) \dots (k + \frac{k}{n})}.$$

Odtud plyne, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = k^{-k} < 1$. Podle Věty 6.9(c) tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

konec 2. přednášky (21.2.2025)

Věta 6.10 (kondenzační kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$s_k = \sum_{j=1}^k a_j \quad \text{a} \quad t_k = \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j}.$$

\Leftarrow Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m \leq 2^k - 1$. Potom

$$s_m \leq s_{2^k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq A.$$

Posloupnost $\{s_m\}$ je tudíž shora omezená, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

\Rightarrow Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $B \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \leq m$. Potom

$$s_m = a_1 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_i \geq a_1 + \sum_{j=1}^k 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j} = \frac{t_k}{2},$$

takže $t_k \leq 2B$. Tudíž je posloupnost $\{t_k\}$ je shora omezená, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. \square

6.3. Řady s obecnými členy. V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

Věta 6.11 (Leibnizova). *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel splňující $\lim a_n = 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Potom $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$, a tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{n=1}^m (-1)^n a_n.$$

Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+2} - a_{2m+1} \leq 0 \quad \text{a} \quad s_{2m+1} - s_{2m-1} = -a_{2m+1} + a_{2m} \geq 0,$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2m}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2m-1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $s_{2m-1} = s_{2m} - a_{2m}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti také $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = 0$. Z věty o aritmetice limit tedy dostáváme

$$\lim s_{2m-1} = \lim(s_{2m} - a_{2m}) = \lim s_{2m},$$

takže posloupnosti $\{s_{2m}\}$ a $\{s_{2m+1}\}$ mají společnou limitu, kterou označíme s . Odtud plyne, že $\lim s_n = s$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2m-1} = s_{2m} - a_{2m} \leq s_{2m} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje. Jestliže je $\{a_n\}$ neklesající, lze tvrzení dokázat obdobně. \square

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí a platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. Z Věty 6.11 tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) (\frac{\pi}{2} - \arctg n)^{12}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Posloupnost $\{(\frac{\pi}{2} - \arctg n)^{12}\}$ je nerostoucí a platí $\lim (\frac{\pi}{2} - \arctg n)^{12} = 0$. Z Věty 6.11 tedy plyne, že zadaná řada je konvergentní.

Lemma (Abelova parciální sumace). *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.*

(a) *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \leq m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^k a_j, k = n, \dots, m$. Pak platí*

$$(5) \quad \sum_{j=n}^m a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.$$

(b) *Označme $s_k = \sum_{j=1}^k a_j, k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}, n \leq m$, platí*

$$(6) \quad \sum_{j=n}^m a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m.$$

Důkaz. (a) Pomocí elementárních úprav dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^m a_j b_j &= a_n b_n + \dots + a_m b_m \\ &= \sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \dots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m \\ &= \sigma_n (b_n - b_{n+1}) + \dots + \sigma_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + \sigma_m b_m \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (a).

(b) Podobně jako v důkazu tvrzení (a) platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^m a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\ &= (s_n - s_{n-1})b_n + (s_{n+1} - s_n)b_{n+1} + \cdots + (s_m - s_{m-1})b_m \\ &= -s_{n-1}b_n + s_n(b_n - b_{n+1}) + \cdots + s_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + s_m b_m \\ &= -s_{n-1}b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j(b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (b). □

Věta 6.12 (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

- (A) *posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*
- (D) *$\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důkaz. Nejprve budeme předpokládat, že posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí, neboli platí

$$(7) \quad \forall n \in \mathbb{N}: b_n - b_{n+1} \geq 0.$$

Tvrzení věty dokážeme za předpokladu, že je splněna podmínka (A), a poté za předpokladu splnění (D). V obou případech dokážeme konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ověřením Bolzanovy—Cauchyovy podmínky pro řady (Věta 6.4).

Podmínka (A). S pomocí (A) nalezneme $K \in (0, \infty)$ takové, že platí

$$(8) \quad \forall n \in \mathbb{N}: |b_n| \leq K.$$

Pro ověření Bolzanovy—Cauchyovy podmínky pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ zvolme $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je podle (A) konvergentní, a proto splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku (Věta 6.4), takže k našemu ε můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$(9) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{j=n}^m a_j \right| < \varepsilon.$$

Zvolme $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^k a_j$, $k = n, \dots, m$. Potom díky (9) platí

$$(10) \quad \forall k \in \{n, \dots, m\}: |\sigma_k| < \varepsilon.$$

Pak postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=n}^m a_j b_j \right| &= \left| \left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) \right) + \sigma_m b_m \right| && \text{(Abelova parciální sumace)} \\
 &\leq \left(\sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j| (b_j - b_{j+1}) \right) + |\sigma_m| |b_m| && \text{(trojúhelníková nerovnost a (7))} \\
 &\leq \varepsilon \left(\sum_{j=n}^{m-1} (b_j - b_{j+1}) \right) + \varepsilon |b_m| && \text{(podle (10))} \\
 &= \varepsilon ((b_n - b_m) + |b_m|) && \text{(teleskopická suma)} \\
 &\leq \varepsilon (|b_n| + 2|b_m|) \leq 3K\varepsilon. && \text{(podle (8))}
 \end{aligned}$$

Tedy $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku, a tudíž je podle Věty 6.4 konvergentní.

Podmínka (D). Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$. Díky podmínce (D) nalezneme $M \in (0, \infty)$ takové, že platí

$$(11) \quad \forall n \in \mathbb{N}: |s_n| \leq M.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. S pomocí (D) k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$(12) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |b_n| < \varepsilon$$

Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ splňují $m \geq n \geq n_0$. Máme

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=n}^m a_j b_j \right| &= \left| -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m \right| && \text{(Abelova parciální sumace)} \\
 &\leq M |b_n| + \sum_{j=n}^{m-1} M (b_j - b_{j+1}) + M |b_m| && \text{(trojúhelník, (7) a (11))} \\
 &= M |b_n| + M (b_n - b_m) + M |b_m| && \text{(teleskopická suma)} \\
 &\leq 4M\varepsilon. && \text{(podle (12))}
 \end{aligned}$$

Ověřii jsme, že $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku, a je tedy podle Věty 6.4 konvergentní.

Je-li posloupnost $\{b_n\}$ neklesající, lze důkaz provést obdobně, nebo lze již dokázané tvrzení použít pro posloupnost $\{-b_n\}$. \square

konec 3. přednášky (25.2.2025)

Poznámka. Leibnizova věta je speciálním případem Dirichletova kritéria (Věty 6.12(D)), protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sin(nx) = \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sum_{n=1}^m \sin(nx) &= \sum_{n=1}^m \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= \cos\left(1 - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x && \text{(teleskopická suma)} \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x. \end{aligned}$$

Jestliže $x \notin \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak z předchozího plyne pro každé $m \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \sum_{n=1}^m \sin(nx) \right| \leq \frac{|\cos(\frac{1}{2}x) - \cos(m + \frac{1}{2})x|}{|2 \sin(\frac{1}{2}x)|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{1}{2}x)|},$$

a tedy má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů.

Jestliže $x \in \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak sestává řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ z nulových členů, a má tedy omezenou posloupnost částečných součtů.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos(kx) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x.$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \sum_{n=1}^m \cos(nx) &= \sum_{n=1}^m \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= -\sin\left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x && \text{(teleskopická suma)} \\ &= \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right). \end{aligned}$$

Jestliže $x \notin \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak z předchozího plyne

$$\left| \sum_{n=1}^m \cos(nx) \right| \leq \frac{|\sin(m + \frac{1}{2})x - \sin(\frac{1}{2}x)|}{|2 \sin(\frac{1}{2}x)|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{1}{2}x)|},$$

a tedy má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů.

Jestliže $x \in \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ zřejmě nemá omezenou posloupnost částečných součtů.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sin nx$, $b_n = \frac{1}{n}$. Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a splňuje $\lim b_n = 0$. Z Dirichletova kritéria (Věta 6.12(D)) tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Jestliže $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, pak lze konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ dokázat obdobně jako výše. Jestliže $x = 2l\pi$, kde $l \in \mathbb{Z}$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos nx = 1$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

6.4. Absolutní konvergence.

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Poznámka. Řada, jejíž členy nemění znaménko, konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně.

Věta 6.13 (absolutní a neabsolutní konvergence). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*

Důkaz. Podle Věty 6.4 splňuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Bolzanovu—Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$, platí $\sum_{j=n}^m |a_j| < \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$, platí

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n}^m |a_j| < \varepsilon,$$

a tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku. Podle Věty 6.4 je tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ a $\sigma_m = \sum_{n=1}^m |a_n|$. Potom zřejmě platí pro každé $m \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_m \leq \sigma_m$. Odtud, z definice součtu řady a věty o limitě a uspořádání plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. \square

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, je podle Věty 6.13 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutně konvergentní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\{b_n\}$ monotónní posloupnost splňující $\lim b_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní podle Věty 6.11. Naproti tomu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentní. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní.

Následující dvě věty jsou variantami Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad.

Věta 6.14 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.*

(a) *Jestliže platí*

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(b) *Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*

(c) *Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*

(d) *Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

(e) *Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Důkaz. (a) Podle již dokázaného Cauchyova kritéria pro řady s nezápornými členy (Věta 6.8(a)) dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Tvrzení (b) a (c) lze odvodit obdobně.

(d) Podle Věty 6.8(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle věty o nulové limitě a absolutní hodnotě ani $\{a_n\}$ nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tvrzení (e) lze dokázat obdobně. \square

Věta 6.15 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.*

(a) *Jestliže platí*

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(b) *Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*

(c) *Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*

(d) *Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Důkaz. (a) D'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (Věta 6.9(a)) ukazuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Při důkazu tvrzení (b) a (c) lze postupovat obdobně.

(d) Podle Věty 6.9(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k 0. Podle věty o nulové limitě a absolutní hodnotě ani $\{a_n\}$ nekonverguje k 0. Odtud plyne díky Větě 6.1 divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ konverguje neabsolutně.

Řešení. Neplatnost absolutní konvergence. Protože

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 1$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, z limitního srovnávacího kritéria (Věta 6.7(a)) plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ diverguje. Proto řada ze zadání nekonverguje absolutně.

Neabsolutní konvergence. Použijeme Leibnizovo kritérium (Věta 6.11). Řada zřejmě pravidelně střídá znaménka. Dále platí

$$\lim \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Nakonec potřebujeme rozhodnout o platnosti nerovnosti

$$(13) \quad a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \geq \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} = a_{n+1}.$$

Tuto nerovnost však snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost

$$(n+1)(n+2)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})+1 \geq 0,$$

jež platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí i (13). Ověřili jsme, že naše řada splňuje předpoklady Věty 6.11, a proto řada konverguje. Řada ze zadání je tedy neabsolutně konvergentní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Z předchozího víme, že zadaná řada je konvergentní. K ověření neabsolutní konvergence je třeba ukázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n} \right|$. Protože však

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left| \frac{\sin n}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n},$$

stačí podle Věty 6.6(b) dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$. Pomocí vzorce pro dvojnásobný argument dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n}.$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverguje, plyne z Věty 6.3, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ diverguje.

6.5. Přerovnání řad. Sčítáme-li konečně mnoho reálných čísel a_1, \dots, a_m , pak výsledný součet nezávisí na pořadí sčítanců a_1, \dots, a_m . Jinými slovy, je-li π libovolná bijekce množiny $\{1, \dots, m\}$ na sebe, pak platí $\sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m a_{\pi(n)}$. V tomto oddílu ukážeme, za jakých podmínek platí analogie uvedeného pozorování i pro nekonečné řady.

Definice. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerovnaním** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lemma. Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom pro každé $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a s její součet. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s - s_{n_0-1}| < \varepsilon$. Označme $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ částečné součty řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tj.

$$t_n = a_{n_0} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_n = s_{n_0-1} + t_n$, a tedy také

$$\lim t_n = \lim(s_n - s_{n_0-1}) = s - s_{n_0-1}.$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tedy konverguje, takže $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je konvergentní a její součet je roven $s - s_{n_0-1}$. Tedy platí

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| = |s - s_{n_0-1}| < \varepsilon.$$

□

Věta 6.16 (přerovnání absolutně konvergentní řady). Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Potom přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Potom $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$ a platí

$$\sum_{j=1}^m |a_{\pi(j)}| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Odtud plyne, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně. Označme $s_n = a_1 + \dots + a_n$ a $t_n = a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$. Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$(14) \quad \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položme $k = \max\{j, n\}$. Potom $k \geq n$ a

$$(15) \quad \{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\},$$

$$(16) \quad \{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}.$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$. Označme

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\}, \\ B &= \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Pak podle (16) máme $A \subset \{i \in \mathbb{N}; i > m\}$ a podle (15) je $B \subset \{\pi(j); j \in \mathbb{N}, j > m\}$. Tedy

$$\begin{aligned} |s_p - t_p| &= \left| \sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^p a_{\pi(j)} \right| = \left| \sum_{i \in A} a_i - \sum_{j \in B} a_{\pi(j)} \right| \leq \sum_{i \in A} |a_i| + \sum_{j \in B} |a_{\pi(j)}| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| + \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p \rightarrow \infty} (s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. \square

Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \dots$$

Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $s_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že $\lim s_n = 0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Položme

$$\pi(n) = \begin{cases} 4k - 3, & \text{jestliže } n = 3k - 2, k \in \mathbb{N}, \\ 4k - 1, & \text{jestliže } n = 3k - 1, k \in \mathbb{N}, \\ 2k, & \text{jestliže } n = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\pi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\pi(3k)} = -\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots,$$

Označme n -tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n . Potom platí

$$(17) \quad \sigma_{3n} = \sum_{k=1}^n (a_{\pi(3k-2)} + a_{\pi(3k-1)} + a_{\pi(3k)}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2k},$$

$$(18) \quad \sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1},$$

$$(19) \quad \sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k} \leq \frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (17) tedy platí vztah $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n} = s \in (0, \infty)$. Nyní snadno podle (18) a (19) dostáváme, že platí také $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n+2} = s$. Tedy $\lim \sigma_n = s$. Součet přerovnané řady je s , takže se liší od součtu původní řady.

Následující věta mimo jiné ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu nastává pro každou neabsolutně konvergentní řadu.

Věta 6.17 (Riemann). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s .*

Riemannova věta (Věta 6.17) je snadným důsledkem následující obecnější věty.

Věta 6.18 (zobecněná Riemannova věta). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Pak existuje bijekce $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro částečné součty $\{\sigma_n\}$ přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí*

$$(20) \quad \liminf \sigma_n = \alpha \quad a \quad \limsup \sigma_n = \beta.$$

konec 4. přednášky (28.2.2025)

6.6. Součin řad. Nechť a_1, \dots, a_n a b_1, \dots, b_m jsou konečné posloupnosti reálných čísel. Pak platí

$$(21) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}} a_i b_j.$$

V tomto oddílu ukážeme analogii vztahu (21) pro nekonečné řady.

Definice. Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Věta 6.19 (Mertens). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{j=1}^k a_j, & A &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j, & \tilde{A} &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|, \\ B_k &= \sum_{j=1}^k b_j, & B &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j, & \beta_k &= B_k - B, \\ c_k &= \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i, & C_k &= \sum_{j=1}^k c_j. \end{aligned}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\ &= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\ &= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\ &= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\ (22) \quad &= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_j. \end{aligned}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme dále $\gamma_k = \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_j$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$, neboť $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ je konvergentní. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, máme

$$\begin{aligned} |\gamma_k| &= \left| \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \left| \sum_{j=k_0+1}^k a_{k+1-j} \beta_j \right| \\ (23) \quad &\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \sum_{j=k_0+1}^k |a_{k+1-j}| |\beta_j| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^k |a_{k+1-j}| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \varepsilon \tilde{A}. \end{aligned}$$

Platí $\lim a_k = 0$ (nutná podmínka konvergence řady), a tedy podle věty o limitě vybrané posloupnosti také pro každé $j \in \{1, \dots, k_0\}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1-j} = 0$. Odtud plyne

$$(24) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j = 0.$$

Díky (23) a (24) tedy platí $\limsup |\gamma_k| \leq \tilde{\epsilon}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim \gamma_k = 0$. Z (22) a věty o aritmetice limit plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

□

Důsledek. *Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.*

Důkaz. Podle Mertensovy věty je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k |a_{k+1-i}| |b_i| \right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. □

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 6.19 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

Příklad. Necht' $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizovy věty. Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti dostaneme odhad

$$\sqrt{(k+1-i)i} \leq \frac{(k+1-i) + i}{2} = \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^k \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$. Odtud plyne, že Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekonverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady.

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta.

Věta 6.20 (Abelova věta o Cauchyově součinu). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

Důkaz Věty 6.20 bude proveden později pomocí výsledků z teorie mocninných řad.

6.7. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí. Díky větě o Peanově tvaru zbytku víme, že s rostoucím řádem Taylorova polynomu dostáváme přesnější aproximaci dané funkce f . Bylo by tedy možné očekávat, že bychom danou funkci mohli jistým způsobem vyjádřit pomocí limity Taylorových polynomů, tedy ve tvaru nekonečné řady. Tato úvaha motivuje následující definici.

Definice. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a** . Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$(25) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

pro nějaká $x, a \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (25) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0, takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$. V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Věta 6.21 (Taylorovy řady elementárních funkcí). *Platí*

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}, \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}, \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}, \\ \log(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pro každé } x \in (-1, 1], \\ \operatorname{arctg}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pro každé } x \in [-1, 1], \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R} \text{ a každé } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Důkaz. Funkce \exp má v bodě 0 derivace všech řádů a platí $\exp^{(n)}(0) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zvolme $x \in (0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Lagrangeova tvaru zbytku nalezneme

$\xi_n \in (0, x)$ takové, že platí

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tedy

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\exp(x)x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

plyne odtud vztah

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$ lze tvrzení dokázat obdobně. Pro $x = 0$ tvrzení platí zřejmě. Tím je dokázáno tvrzení věty pro funkci \exp . Obdobně lze důkaz provést pro ostatní funkce. \square

6.8. Důkaz věty o zavedení exponenciální funkce (Věta 3.10).

Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz Věty 3.10. Položme

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážeme, že tato funkce má vlastnosti (E1) a (E2) z Věty 3.10. Z předcházejícího příkladu vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce \exp je tedy dobře definována na množině \mathbb{R} .

Zvolme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom z binomické věty plyne, že

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.$$

Výraz na pravé straně je Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Protože jsou obě tyto řady absolutně konvergentní (stačila by jedna), plyne z Mertensovy věty, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}$ je konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right),$$

tedy $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$. Odtud plyne tvrzení (E1).

Nechť $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$. Potom

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\exp x - 1 - x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \left| x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right|.$$

Protože $|x| \leq 1$ a $n - 2 \geq 0$ pro každé $n \geq 2$, dostáváme z Věty 6.13

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n!} \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Poslední řada je konvergentní, a tedy $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Podle věty o limitě a uspořádání tudíž platí také $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = 0$, a tím spíše $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right) = 0$. Odtud plyne (E2).

Zbývá dokázat, že funkce \exp je podmínkami (E1) a (E2) určena jednoznačně. Předpokládejme, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $f(x+y) = f(x)f(y)$ a $g(x+y) = g(x)g(y)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = 1$. Ukážeme, že pak již nutně platí $f = g$.

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0+0) = (\exp(0))^2$. To znamená, že buď $\exp(0) = 1$, nebo $\exp(0) = 0$. Předpokládejme, že $\exp(0) = 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle (E1) platí $\exp(x) = \exp(x+0) = \exp(x)\exp(0) = 0$. Tedy z (E2) vyplývá, že $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x}$, což je spor. Platí tedy $\exp(0) = 1$.

Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Potom podle definice derivace a (E1) platí

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)\exp(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}. \end{aligned}$$

Odtud díky tomu, že $\exp(0) = 1$ a podle (E2) plyne, že

$$\exp'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

Z (E1) a díky tomu, že $\exp(0) = 1$, platí $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$. Tedy $\exp(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Protože jsme při odvození těchto vlastností použili pouze (E1) a (E2), platí $f'(x) = f(x)$, $g'(x) = g(x)$ a $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $f(0) = g(0) = 1$. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Potom

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Tedy funkce $\frac{f}{g}$ je konstantní. Protože $f(0) = g(0) = 1$, je funkce $\frac{f}{g}$ konstantně rovna jedné na \mathbb{R} , tedy $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že funkce \exp je vlastnostmi (E1) a (E2) určena jednoznačně. \square

Příklad. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ konverguje právě tehdy, když buď $\alpha > 1$, nebo $\alpha = 1$ a $\beta > 1$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Jestliže $\alpha > 1$, potom nalezneme $\gamma \in (1, \alpha)$ a položíme $b_n = \frac{1}{n^{\gamma}}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ konverguje a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Podle Věty 6.7 tedy konverguje i $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Jestliže $\alpha < 1$, potom nalezneme $\gamma \in (\alpha, 1)$ a

položíme $b_n = \frac{1}{n^\gamma}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ diverguje a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Podle Věty 6.7 tedy diverguje i $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Jestliže $\alpha = 1$, položme $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\beta}$ pro $x \in [2, \infty)$. Potom pro $x \in (2, \infty)$ platí

$$f'(x) = \frac{\beta - \log x}{x^2(\log x)^{\beta+1}}.$$

Tedy $f'(x) < 0$ pro $x \in (\max\{2, e^\beta\}, \infty)$. Funkce f je tedy klesající na $(\max\{2, e^\beta\}, \infty)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 \geq \max\{2, e^\beta\}$. Potom je posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ klesající. Tedy z kondenzačního kritéria a poznámky o tom, že změna konečně mnoha členů řady neovlivňuje její konvergenci plyne, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\beta n^\beta}.$$

Poslední řada konverguje a díky linearitě konvergentních řad právě tehdy, když $\beta > 1$.

6.9. Posloupnosti a řady s komplexními členy.

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $z \in \mathbb{C}$. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje k číslu z** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - z| < \varepsilon.$$

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + \dots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme **m -tým částečným součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat **n -tým členem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje (jako prvek \mathbb{C}). Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li jejím součtem komplexní číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní.

Věta 6.22 (absolutní a neabsolutní konvergence komplexní řady). *Je-li řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je konvergentní.*

Definice. Komplexní exponenciální funkcí rozumíme funkci $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

konec 5. přednášky (4.3.2025)

7. INTEGRÁL

7.1. Primitivní funkce. V tomto oddílu se budeme zabývat úlohou, která je v jistém smyslu opačná k derivování, neboli budeme k zadané funkci f hledat funkci F takovou, že zderivováním F obdržíme f . Jak uvidíme, tento problém je zpravidla komplikovanější než úloha nalézt derivaci zadané funkce.

Definice. Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ je **primitivní funkce** k funkci f na I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka. Primitivní funkci budeme vždy hledat na neprázdném otevřeném intervalu.

Poznámka. (a) Nechť F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Potom F je na I spojitá, neboť má dle definice v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci (např. sign na \mathbb{R}).

(c) Primitivní funkce není určena jednoznačně. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I a $c \in \mathbb{R}$. Potom je funkce $F + c$ také primitivní funkcí k f na I .

(d) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

Věta 7.1 (jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu). *Nechť I je otevřený interval, $f, F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$ a F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I . Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $F(x) = G(x) + c$.*

Důkaz. Definujme funkci $H: I \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $H(x) = F(x) - G(x)$, $x \in I$. Potom $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé $x \in I$, a tedy je H konstantní na I . \square

Poznámka. Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F . Pak libovolnou primitivní funkci k funkci f na I získáme z jediné primitivní funkce F přičtením vhodné konstantní funkce.

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x) dx.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$(26) \quad \int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

které znamená, že pro libovolnou primitivní funkci G k funkci f na intervalu I existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G = F + c$ na intervalu I . Na levé straně vztahu (26) stojí **množina** všech primitivních funkcí k funkci f , zatímco na pravé straně stojí reprezentant této množiny, tedy funkce F , jedna z primitivních funkcí k funkci f na I . Vztah $\stackrel{c}{=}$ tedy není rovností v obvyklém smyslu slova (například není symetrický) a čteme jej jako **rovnost až na konstantu**.

Jednotlivé části symbolu $\int f(x) dx$ jsou znak **integrálu** \int , **integrand** $f(x)$, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci, a symbol dx označující proměnnou, vzhledem k níž integrujeme. Symbol dx uvažovaný samostatně nemá v této kapitole žádný matematický význam a nelze s ním algebraicky manipulovat.

Poznámka. O správnosti následujících vzorců se lze přesvědčit zderivováním:

$$\int x^n dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{pro } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0; \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty) \text{ pro } n \in \mathbb{Z}, n < -1,$$

$$\begin{aligned}
 \int x^\alpha dx &\stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \in (0, +\infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\
 \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{c}{=} \log|x|, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty), \\
 \int e^x dx &\stackrel{c}{=} e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \\
 \int \sin x dx &\stackrel{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \\
 \int \cos x dx &\stackrel{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \\
 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &\stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\
 \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx &\stackrel{c}{=} \operatorname{cotg} x, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\
 \int \frac{1}{1+x^2} dx &\stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &\stackrel{c}{=} \operatorname{arcsin} x, \quad x \in (-1, 1), \\
 \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &\stackrel{c}{=} \operatorname{arccos} x, \quad x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později.

Věta 7.2 (spojitost a existence primitivní funkce). *Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f má na I primitivní funkci.*

Poznámka. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Potom pro $\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takže f má primitivní funkci na \mathbb{R} , ale f není spojitá na \mathbb{R} , neboť $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje.

Věta 7.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .*

Důkaz. Platí

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. \square

Věta 7.4 (integrace per partes). *Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí*

$$(27) \quad \int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx, \quad x \in I.$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I , takže i funkce fG je spojitá na I . Má tedy primitivní funkci na I dle Věty 7.2. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf . Pak

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \stackrel{c}{=} GF - H.$$

Množina funkcí na pravé straně (27) obsahuje funkci $GF - H$, stejně tak i množina funkcí na levé straně (27), a proto se obě množiny rovnají (vizte Větu 7.1). \square

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci \arctg na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \arctg x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom je f spojitá na \mathbb{R} , a tedy podle Věty 7.4 platí

$$\begin{aligned} \int \arctg x \, dx &= \int 1 \cdot \arctg x \, dx = \int g(x)F(x) \, dx \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx \\ &= x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &\stackrel{c}{=} x \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci xe^x na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 7.4 položme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = e^x$ a $G(x) = e^x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int xe^x \, dx &= \int g(x)F(x) \, dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx \\ &= xe^x - \int e^x \, dx \stackrel{c}{=} e^x(x-1), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $\log x$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 7.4 položme $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= \int 1 \cdot \log x \, dx = \int g(x)F(x) \, dx \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx \stackrel{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 7.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na \mathbb{R} . Z Věty 7.4 dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = x \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x^{(-n)} \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Nechť C značí množinu konstatních funkcí na \mathbb{R} a necht' $f = \frac{x}{(1+x^2)^n}$. V obdržené rovnici

$$I_n = f + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

přičteme k oběma stranám $-I_n + 2nI_{n+1}$ a obdržíme

$$2nI_{n+1} + I_n - I_n = f + 2nI_n - I_n - 2nI_{n+1} + 2nI_{n+1},$$

tj.

$$2nI_{n+1} + C = f + (2n-1)I_n + C.$$

To ale dává rovnost

$$2nI_{n+1} = f + (2n-1)I_n,$$

z které již požadovaný závěr plyne.

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ na \mathbb{R} .

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 7.2) plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na \mathbb{R} primitivní funkci. Dvojným použitím Věty 7.4 dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

Přičtením A k oběma stranám rovnice tak obdržíme $2A = g + C$, kde C značí množinu všech konstatních funkcí na intervalu $(-\infty, \infty)$. Z této rovnosti již plyne

$$\int e^x \sin x dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Věta 7.5 (Darboux). *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f Darbouxovu vlastnost na I , tj. $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.*

Důkaz. Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$, a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na I . Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

tj. H má na I vlastní derivaci. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. (V opačném případě bychom postupovali obdobně.) Funkce H nabývá na intervalu $[x_1, x_2]$ svého minima, které označíme symbolem x_0 . Díky tomu, že

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta): H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$. Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.

Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$, a proto platí $H'(x_0) = 0$. Odtud plyne $f(x_0) = z$. \square

Poznámka. Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom na I platí následující implikace:

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow f \text{ má primitivní funkci} \Rightarrow f \text{ má Darbouxovu vlastnost.}$$

Poznámka. Z Věty 7.5 plyne, že funkce sign nemá na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkci.

konec 6. přednášky (7.3.2025)

Věta 7.6 (první věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a, b) , $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. \square

V následujících příkladech použijeme právě dokázanou první větu o substituci.

Příklad. Spočtete

$$\int \sin^4 t \cos t dt.$$

Řešení. Položme $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$,

$$f(x) = x^4, \quad x \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{5}x^5, \quad x \in (a, b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 7.6) platí

$$\int \sin^4 t \cdot \cos t \, dt = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sin^5 t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá na celém \mathbb{R} , existuje k ní tedy primitivní funkce na celém \mathbb{R} . Při výpočtu $\int g(x) \, dx$ použijeme substituci „ $t = 2 + 5x^2$ “, tj. funkci $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $\varphi(x) = 2 + 5x^2$, neboť si všimneme, že $\varphi'(x) = 10x$, a tedy

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} \, dx = \frac{1}{10} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} \, dx.$$

Podle Věty 7.6 je třeba vypočítat

$$\frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sqrt{t}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Každá funkce

$$x \mapsto \frac{1}{5} \sqrt{2+5x^2} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je tedy primitivní funkcí k funkci g na \mathbb{R} .

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na svém definičním oboru $(-2/3, 4/3)$, a tedy k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní. Nejprve si funkci g upravíme následujícím způsobem:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{9-(3x-1)^2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2}}.$$

Počítejme tedy

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}} \, dx.$$

Tento integrál připomíná integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \stackrel{c}{=} \arcsin t.$$

Užijeme Větu 7.6. Roli funkce φ bude plnit funkce $x \mapsto x - 1/3$, jejíž derivace je rovna 1. Dostáváme tak

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}} \, dx.$$

Podle Věty 7.6 stačí spočítat

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \arcsin t, \quad t \in (-1, 1),$$

takže

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}} \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \arcsin(x-1/3), \quad x \in (-2/3, 4/3).$$

Poznámka. Chceme-li použít Větu 7.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g , je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci φ a k ní pak určíme funkci f . Ve výše uvedených příkladech jsme výraz $\varphi'(x) dx$ nahradili výrazem dt a zbývající část integrandu již byla ve tvaru $f \circ \varphi$. Formálně jsme tedy provedli substituci $\varphi(t) = x$ a $\varphi'(t) dt = dx$. Poslední vztah, kterému nedáváme žádný matematický význam, je užitečnou pomůckou při výpočtech.

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz x nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(t)$ a výraz dx výrazem $(\varphi^{-1})'(t) dt$, tak obdržíme výraz $\int g(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) dt$. Integrand je potom hledanou funkcí f . Platí totiž

$$f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi^{-1}(\varphi(x))) \cdot (\varphi^{-1})'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(x),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o derivaci inverzní funkce.

Věta 7.7 (druhá věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 7.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy je buď φ klesající na (α, β) , nebo je rostoucí na (α, β) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned} (G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce a větu o derivaci inverzní funkce. \square

V následujícím příkladu použijeme druhou větu o substituci, kterou jsme právě dokázali.

Příklad. Spočítejte primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$.

Řešení. Položme $(a, b) = (-1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$\varphi(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Tedy podle druhé věty o substituci (Věta 7.7) platí

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx,$$

kde a je kladné reálné číslo.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, a $\varphi(t) = a \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1 + \sinh^2 t}} = \frac{1}{a \cosh t}$$

a

$$\varphi'(t) = a \cosh t.$$

Tedy

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int 1dt \stackrel{c}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proto

$$\int f(x)dx \stackrel{c}{=} \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Poslední rovnost snadno odvodíme ze vzorce $\frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.)

Uvedeme nyní ještě jednu užitečnou variantu věty o substituci.

Věta 7.8 (druhá věta o substituci - alternativní verze). *Nechť $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $\varphi'(x)$ vlastní a nenulová. Potom $\varphi((a, b))$ je interval, který označíme (α, β) . Definujme funkci $g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)$. Nechť G je primitivní funkce k g na (α, β) . Potom $G \circ \varphi$ je primitivní funkce k f na (a, b) .*

Důkaz. Funkce φ má na (a, b) vlastní derivaci, tudíž je spojitá, a tedy má Darbouxovu vlastnost. Odtud plyne, že $\varphi((a, b))$ je interval. Podle Věty 7.5 platí buď $\varphi'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, nebo $\varphi'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Tedy je buď φ klesající na (a, b) , nebo je φ rostoucí na (a, b) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$. Odtud plyne, že funkce g je dobře definovaná. Potom pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\begin{aligned} (G \circ \varphi)'(x) &= (g \circ \varphi)(x)\varphi'(x) = f(x)(\varphi^{-1})'(\varphi(x))\varphi(x) \\ &= \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))}\varphi'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. □

Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Předpokládejme nejprve, že $x \in (1, \infty)$. Potom platí

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}.$$

Položme dále $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (1, \infty)$ a $g(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ pro $t \in (-1, 1)$. Potom

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (1, \infty).$$

Protože $\int g(t)dt \stackrel{c}{=} \arccos t$, $t \in (-1, 1)$, platí podle Věty 7.8

$$\int f(x)dx \stackrel{c}{=} \arccos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (1, \infty).$$

Podobně odvodíme, že

$$\int f(x)dx \stackrel{c}{=} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (-\infty, -1).$$

Poznámka. Věta 7.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci. Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí. Tuto vlastnost má například funkce e^{-x^2} , důkaz však není snadný. Ukážeme nyní některé druhy funkcí, kde tato potíž nevzniká. Základní třídou takových funkcí jsou funkce racionální. Ukážeme také ještě některé další typy funkcí, jejichž integraci je možné převést na integraci racionálních funkcí pomocí vhodné substituce.

Integrace racionálních funkcí.

Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině \mathbb{R} , která neobsahuje žádný kořen polynomu Q .

Poznámka. Nejprve uvedeme některé poznatky z algebry. Všimněme si, že máme-li polynom

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

lze za proměnnou x dosazovat i komplexní čísla, přičemž hodnoty pak budou opět komplexní čísla. Každý polynom tedy můžeme chápat i jako zobrazení z \mathbb{C} do \mathbb{C} . Ve zbytku tohoto oddílu budeme uvažovat i polynomy s komplexními koeficienty, tj. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Podobně jako v reálném případě, je takový polynom roven nule pro každé $x \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou všechny jeho koeficienty nulové. Odtud plyne, že můžeme definovat stupeň takového polynomu stejně jako v reálném případě a budeme jej značit symbolem $\text{st } P$.

Lemma (o dělení polynomů). *Nechť P a Q jsou dva polynomy (obecně s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:*

- $\text{st } Z < \text{st } Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

Důsledek. *Je-li P polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$ jeho kořen (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.*

Důkaz. Položme $Q(x) = x - \lambda$. Pak dle lemmatu nalezneme polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$, kde $\text{st } Z < \text{st } Q = 1$. Polynom Z je tedy konstantní. Platí $0 = P(\lambda) = R(\lambda)(\lambda - \lambda) + Z(\lambda)$, tedy $Z(\lambda) = 0$. Z toho plyne, že Z je nulový. \square

Věta 7.9 (rozklad na kořenové činitele). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ taková, že*

$$(28) \quad P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, neboť $P(x) = a_1(x - (-\frac{a_0}{a_1}))$ a stačí položit $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. Nechť tedy $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a tvrzení platí pro všechny polynomy stupně nejvýše $n - 1$. Podle základní věty algebry nalezneme kořen $x_n \in \mathbb{C}$ polynomu P . Dle důsledku je $P(x) = (x - x_n)R(x)$ pro nějaký polynom R . Všimněme si, že $\text{st } R = n - 1$ a navíc koeficient u x^{n-1} v polynomu R je roven a_n . Podle indukčního předpokladu tedy existuje rozklad $R(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$. Tím dostaneme i požadovaný rozklad polynomu P . \square

Poznámka. (a) Pro každý polynom je rozklad (28) určený jednoznačně až na pořadí činitelů. Mezi čísla x_1, \dots, x_n se vyskytují všechny kořeny polynomu P . Odtud plyne, že polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ má nejvýše n různých kořenů.

(b) Tvrzení důsledku lze ještě dále zesílit následujícím způsobem. Je-li P nenulový polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak existuje právě jedno $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a jednoznačně určený polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$ a $R(\lambda) \neq 0$.

Platí-li totiž $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro jistý polynom R a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak je nutně polynom R nenulový a $k \leq \text{st } P$. Můžeme tedy nalézt největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro které existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$. Z důsledku plyne, že $R(\lambda) \neq 0$, jinak bychom dostali spor s maximalitou k .

Dokažme jednoznačnost. Předpokládejme, že platí $P(x) = (x - \lambda)^l \tilde{R}(x)$ pro nějaké $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a polynom \tilde{R} splňující $\tilde{R}(\lambda) \neq 0$. Všimněme si, že z volby k plyne $l \leq k$. Pak dostáváme $(x - \lambda)^{k-l} R(x) = \tilde{R}(x)$ pro $x \neq \lambda$ a ze spojitosti plyne, že tento vztah je splněn i pro $x = \lambda$. Musí být $k = l$, jinak dosazením $x = \lambda$ dostáváme $\tilde{R}(\lambda) = 0$, což je spor. Potom také $R = \tilde{R}$, čímž je důkaz proveden.

Definice. Nechť P je nenulový polynom, $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že číslo λ je **kořen násobnosti** k polynomu P , jestliže existuje polynom R splňující $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Poznámka. Z poznámky před definicí plyne, že násobnost kořene je určená jednoznačně a je rovna počtu výskytů čísla λ v n -tici x_1, x_2, \dots, x_n z Věty 7.9.

Věta 7.10 (rozklad polynomu s reálnými koeficienty). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla x_1, \dots, x_k , $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, β_1, \dots, β_l a přirozená čísla p_1, \dots, p_k , q_1, \dots, q_l taková, že*

- $P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- žádné dva z polynomů $x - x_1, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,
- polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.

Důkaz. Nechť x_1, \dots, x_k jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi p_1, \dots, p_k a z_1, \dots, z_l jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi q_1, \dots, q_l . Potom jsou též čísla $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l$ kořeny polynomu P s násobnostmi q_1, \dots, q_l . Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x - z_1)^{q_1} (x - \bar{z}_1)^{q_1} \cdots (x - z_l)^{q_l} (x - \bar{z}_l)^{q_l}.$$

Dále platí $(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 + (-z_i - \bar{z}_i)x + z_i\bar{z}_i$. Obě čísla $-z_i - \bar{z}_i$, $z_i\bar{z}_i$ jsou reálná, a proto můžeme položit $\alpha_i = -z_i - \bar{z}_i$ a $\beta_i = z_i\bar{z}_i$. Snadno ověříme, že požadované vlastnosti jsou splněny. \square

Věta 7.11 (rozklad na parciální zlomky). *Nechť P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\text{st } P < \text{st } Q$ a nechť*

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 7.10. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \\ &+ \frac{B_1^1x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\ &+ \frac{B_1^lx + C_1^l}{(x^2 + \alpha_lx + \beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^lx + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{q_l}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Q je **monický**, tj. jeho vedoucí koeficient je roven 1.

1. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro případ, kdy $Q(x) = (x - x_1)^n$ nebo $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Je-li $n = 1$, je výraz $\frac{P}{Q}$ v požadovaném tvaru.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nechť nyní Q je tvaru $Q(x) = (x - x_1)^n$. Pak existují polynom A a $r \in \mathbb{R}$ takové, že $P(x) = A(x)(x - x_1) + r$. Tedy

$$\frac{P(x)}{(x - x_1)^n} = \frac{A(x)}{(x - x_1)^{n-1}} + \frac{r}{(x - x_1)^n}.$$

Na první člen vpravo aplikujeme indukční předpoklad a druhý je již v požadovaném tvaru.

Podobně postupujeme v případě $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Předpokládáme-li platnost tvrzení pro každé $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, píšeme $P(x) = A(x)(x^2 + \alpha x + \beta) + R(x)$, kde A je polynom a R je polynom nejvýše stupně 1. Pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}} + \frac{R(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}.$$

Opět lze na první člen použít indukční předpoklad, zatímco druhý je v požadovaném tvaru.

Tím je tvrzení dokázáno v případě, kdy Q je polynom typu $(x - x_1)^n$ nebo $(x^2 + \alpha x + \beta)^n$, kde kvadratický člen je nerozložitelný.

2. Dokazujeme nyní tvrzení pro případ, kdy Q je součinem n různých typů nerozložitelných prvočinitelů. Pro případ $n = 1$ bylo tvrzení dokázáno v části 1.

Předpokládejme nyní jeho platnost pro všechna $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nechť $Q = GH$ je polynom stupně n , kde G i H jsou monické, nesdílejí žádné netriviální společné dělitele a $\text{st } P < n$. Tedy $\text{st } P < \text{st } G + \text{st } H = n$ a $\min\{\text{st } G, \text{st } H\} \geq 1$. Jelikož nemají G a H žádného netriviálního společného dělitele, nalezneme polynomy C a D takové, že $1 = CG + DH$. Pak C nemá společný násobek s H a D nemá společný násobek s G . Pak máme

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{PCG}{Q} + \frac{PDH}{Q} = \frac{PC}{H} + \frac{PD}{G}.$$

Dostali jsme tak součet dvou výrazů, z nichž každý má ve jmenovateli méně než n různých nerozložitelných prvočinitelů. V případě, kdy $\text{st } PC < \text{st } H$ a $\text{st } PD < \text{st } G$, lze aplikovat indukční předpoklad a důkaz ukončit. V opačném případě předpokládejme nejprve, že $\text{st } PC \geq \text{st } H$. Pak $PC = GH + R$ pro nějaké polynomy Q a R , kde $\text{st } R < \text{st } H$. To implikuje, že R nesdílí s H žádného společného dělitele, neboť v opačném případě by společný dělitel H a R byl též dělitelem P (neboť C nemá s H společného dělitele), což by byl spor.

Máme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{(QH + R)G + DHP}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q}.$$

Jako výše vidíme, že $Q + DF$ nemá společného dělitele s G . Pak

$$\text{st } RG < \text{st } H + \text{st } G \quad \text{a} \quad \text{st } P < \text{st } H + \text{st } G,$$

a tedy též

$$\text{st}(Q + DF) < \text{st } H + \text{st } G.$$

Tedy $\text{st}(Q + DF) < \text{st } G$ a $\text{st } R < \text{st } H$. Dostáváme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q} = \frac{R}{H} + \frac{Q + DF}{G},$$

přičemž na oba zlomky na pravé straně již lze použít indukční předpoklad.

Důkaz je tak dokončen. □

Poznámka (postup při hledání primitivní funkce k funkci racionální). Mějme polynomy P a Q . Máme-li integrovat racionální funkci P/Q , pak postupujeme takto:

V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q , vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q . Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R . Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\text{st } P < \text{st } Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q , resp. P/Q , kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Nyní si ukážeme jak na to. Parciální zlomek odpovídající reálnému kořeni a integrujeme následovně:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x-a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx = \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_1} + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_2}.$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2 + \alpha x + \beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{((x + \alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4)^q} dx = \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x + \alpha/2}{\sqrt{\beta - \alpha^2/4}}\right)^2 + 1\right)^q} dx.$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x + \alpha/2}{\sqrt{\beta - \alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1 + t^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si ukázali ve výše uvedeném příkladu.

konec 7. přednášky (11.3.2025)

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x^2 + 2x - 3)}.$$

Řešení. Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na $\mathcal{D}(f)$ na parciální zlomky. Platí

$$(29) \quad \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1)(x + 3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{E}{x - 1} + \frac{F}{x + 3}.$$

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$(30) \quad x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3) + (Cx + D)(x - 1)(x + 3) + E(x^2 + 2x + 2)^2(x + 3) + F(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1),$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Polynomy jsou však spojité na \mathbb{R} , a proto výše uvedený vztah (30) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby: buď porovnáme

koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (30), tedy

$$\begin{aligned} x^5: 0 &= A + E + F, \\ x^4: 0 &= 4A + B + 7E + 3F, \\ x^3: 0 &= 3A + 4B + C + 20E + 4F, \\ x^2: 0 &= -2A + 3B + 2C + D + 32E, \\ x^1: 1 &= -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F, \\ x^0: 0 &= -6B - 3D + 12E - 4F, \end{aligned}$$

nebo dosadíme do (30) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají 0 (tj. reálné kořeny jmenovatele původního zlomku – v našem případě čísla -3 a 1). Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (30) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy rovnic. Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (29), který má tedy tvar

$$f(x) = -\frac{1}{25} \cdot \frac{x}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{x + 3}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{1}{((x + 1)^2 + 1)^2} dx \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{c}{=} \log|x - 1|, \quad x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, \infty), \\ \int \frac{1}{x + 3} dx &\stackrel{c}{=} \log|x + 3|, \quad x \in (-\infty, -3) \text{ a } x \in (-3, \infty). \end{aligned}$$

Na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, \infty)$ je tak primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$\begin{aligned} -\frac{1}{50} \log(x^2 + 2x + 2) + \frac{7}{50} \operatorname{arctg}(x + 1) + \frac{1}{10} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \\ + \frac{1}{100} \log|x - 1| + \frac{3}{100} \log|x + 3| + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Trigonometrické substituce.

Definice. Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[x, y] \mapsto \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{0, \dots, n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Značení. Až do konce tohoto oddílu budeme symbolem R značit racionální funkci dvou proměnných.

Definice. Řekneme, že R je **sudá v první souřadnici**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x, y) = R(x, y)$. Analogicky definujeme **lichost v první a sudost a lichost v druhé souřadnici**. Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, -y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x, y) = R(-x, -y)$. Analogicky definujeme lichost funkce R .

Poznámka. Necht' R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$(31) \quad \int R(\sin t, \cos t) dt, \quad t \in I,$$

přičemž integrand je definován na intervalu I . Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít jednu z následujících substitucí.

(a) Je-li R lichá ve druhé souřadnici, lze užít substituci $x = \sin t$. Přesněji řečeno: použijeme Větu 7.6 pro funkci $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $\varphi(t) = \sin t$. Příslušnou funkci f lze pak volit jako racionální funkci jedné reálné proměnné. Podobná upřesnění je možné doplnit i v následujících bodech (b)-(d).

(b) Je-li R lichá v první souřadnici, lze užít substituci $x = \cos t$.

(c) Je-li R sudá, lze užít substituci $x = \operatorname{tg} t$.

(d) Vždy lze použít substituci $x = \operatorname{tg}(\frac{t}{2})$.

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(t) = \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t + \cos^4 t}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na \mathbb{R} , má tedy na \mathbb{R} primitivní funkci. Označme

$$R(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$. Funkce R je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá. Pro převod na integraci racionální funkce lze tedy užít kteroukoli z výše uvedených substitucí.

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(\frac{t}{2})$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočteme nejprve

$$\begin{aligned} \cos t &= \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \\ \sin t &= 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2}, \\ t &= 2 \operatorname{arctg} x, \quad dt = \frac{2}{1 + x^2} dx. \end{aligned}$$

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx = 4 \int \frac{x(1-x^2)(1+x^2)}{16x^4 + (1-x^2)^4} dx.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle. Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $x \in (-\pi, \pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkusme tedy další substituce.

Nyní zkusme substituci $x = \sin t$. Funkci g lze upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $dx = \cos t dt$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} dx.$$

Užitím substituce $y = x^2$, $dy = 2x dx$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4y^2 - 4y + 2} dy = \int \frac{1}{(2y - 1)^2 + 1} dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2y - 1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tedy

$$\int g(t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin^2 t - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zcela analogicky lze využít i substituce $x = \cos t$. Funkci g lze upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\cos t}{(1 - \cos^2 t)^2 + \cos^4 t} \cdot \sin t.$$

Uvědomíme-li si, že $dx = -\sin t dt$, dostáváme

$$-\int \frac{t}{(1 - t^2)^2 + t^4} dt \stackrel{c}{=} -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Primitivní funkcí k g je na \mathbb{R} kterákoliv z funkcí

$$-\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cos^2 t - 1) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Je tedy třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 t)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My však víme, že funkce f má primitivní funkci na celém \mathbb{R} (je totiž na \mathbb{R} spojitá). Tuto primitivní funkci můžeme nalézt pomocí techniky zvané *lepení*.

Shrnutí: poččetně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f . Tento nedostatek lze překonat „nalepováním“ v bodech,

kteře jsme museli vynechat. Obdobná situace vznikne při užití substituce $x = \operatorname{tg}(\frac{t}{2})$ – ta vřak větřinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepřı – pokud to dovoluje tvar integrované funkce – se jejímu použití vyhnout a použit některou ze zbývajících tří substitucí.

Z vyře uvedeného je vidět, že tvar vyřledku může podstatne záviset na použité substituci, vždy vřak jde o funkce, které se liřı pouze o konstantu.

Věta 7.12 (o lepení). *Nechť f, F jsou spojıte funkce na otevřeném intervalu I , $c \in I$ a nechť $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I .*

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z věty o limitě derivací. □

Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$.

Řeřenı. Položme $R(x, y) = \frac{1}{1+x^2}$. Protože R je sudá, pouijeme první větu o substituci (Věta 7.6) s $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Potom $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ je vlastní na (α, β) a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Jest

$$x^2 = \operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t},$$

tedy

$$\sin^2 t = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Jest dále $t = \operatorname{arctg} t$, tedy $dt = \frac{1}{1+x^2} dx$. Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+2x^2} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podle první věty o substituci (s $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$) tedy platí

$$(32) \quad \int \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t), \quad t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 t}$ je ale spojıta na \mathbb{R} , a tedy dle Věty 7.2 má na \mathbb{R} primitivní funkci. Položme

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t), \quad t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} F(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Položme

$$G(t) = \begin{cases} F(t) + k\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & t \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak G je spojıta funkce na \mathbb{R} a v každém bodě $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(t) = (1 + \sin^2 t)^{-1}$. Díky Větě 7.12 tedy $G'(t) = (1 + \sin^2 t)^{-1}$ platí v každém bodě $t \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

neboli pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $G + c$ primitivní funkce k $\frac{1}{1+\sin^2 t} dt$ na \mathbb{R} .

Integrály typu $R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$.

Poznámka. Při integraci funkce $R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$, kde $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $x = \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

Věta 7.13 (integrály tvaru $\int R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right) dt$). *Nechť $q \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$ a R je racionální funkcí dvou proměnných. Nechť I je otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}\left(R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right)$. Položme $\varphi(t) = \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^{\frac{1}{q}}$, $t \in I$. Pak je φ monotónní funkce, $J = \varphi(I)$ je otevřený interval a $x \mapsto R(\varphi^{-1}(x), x)(\varphi^{-1})'(x)$ je racionální spojitá funkce definovaná na J . Je-li F její primitivní funkce na J , je $F \circ \varphi$ primitivní funkce k $R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$ na I .*

Důkaz. Zobrazení $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ je ryze monotónní na každém otevřeném intervalu obsaženém v jeho definičním oboru. Vzhledem k monotonii odmocniny pak dostáváme ryzí monotonii funkce $t \mapsto \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^{\frac{1}{q}}$ na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru této funkce. Proto je φ ryze monotónní funkce a množina $J = \varphi(I)$ je otevřený interval. Funkce $\varphi^{-1}: J \rightarrow I$ je určena předpisem $\varphi^{-1}(x) = \frac{x^q d - b}{a - x^q c}$, z čehož plyne, že $x \mapsto R(\varphi^{-1}(x), x)(\varphi^{-1})'(x)$ je racionální funkce na J . Fakt, že $F \circ \varphi$ je primitivní k $R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$, $t \in I$, nyní plyne z Věty 7.7. \square

Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} dt.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$ je definována na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme

$$x = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} = \varphi(t).$$

Pak

$$t = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \varphi^{-1}(x),$$

přičemž $\varphi: (-\infty, -1) \rightarrow (0, 1)$ a $\varphi: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Jest

$$dt = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}, \quad x \in (-\infty, -1), \quad \text{nebo } x \in (1, \infty).$$

Podle druhé věty o substituci dostaneme integrál

$$I = \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} x \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} dx = \int \frac{-4x^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} dx.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4x^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = -\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log|x + 1| - \log|x - 1| - 2 \operatorname{arctg} x, \quad x \in (0, 1) \text{ nebo } x \in (1, \infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} dt \stackrel{c}{=} \log \left| \frac{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} + 1}{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} - 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty).$$

Integrály typu $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt$. Také integraci funkce $R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2 + bt + c$ můžeme pro převod použít následující postup.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α . Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$. Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t - \alpha|, \quad t \in \mathbb{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2 . Potom slepíme F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I , která bude primitivní ke g na I .

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{at}, \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{ax} - b}, \quad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1} . Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{ax}^2 + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{ax} - b)^2}.$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a \frac{c - x^2}{2\sqrt{ax} - b}} + x$$

a

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Je-li G její primitivní funkce na $\varphi(I)$, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g na I . Právě uvedená substituce se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{at} + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme tyto kořeny α_1 a α_2 , přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)} = \sqrt{-a}(t - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I , který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v předchozím oddíle.

Příklad. Spočtete $\int \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + t + 1}} dt$.

Řešení. Symbolem g označme integrand. Potom $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ a g je spojitá na $\mathcal{D}(g)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém \mathbb{R} , použijeme tedy substituci

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x.$$

Tedy

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \quad dt = -2 \frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2} dx.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné x výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)} dx.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x - 2)(2x - 1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)} dx &= \int 1 dx + 2 \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{1}{2x - 1} dx \\ &\stackrel{c}{=} x + 2 \log |x - 2| - \frac{1}{2} \log |2x - 1| \end{aligned}$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2)$ a $(2, \infty)$. Podle Věty 7.6 má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\sqrt{t^2 + t + 1} - t + 2 \log |\sqrt{t^2 + t + 1} - t - 2| - \frac{1}{2} \log |2\sqrt{t^2 + t + 1} - 2t - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

konec 8. přednášky (14.3.2025)

7.2. Riemannův integrál. Zavedení Riemannova integrálu je mimo jiné motivováno problémem, jak definovat pojem obsahu i pro komplikovanější množiny v rovině než jsou jednoduché geometrické útvary jako obdélník, trojúhelník, apod.

Mějme tedy omezenou nezápornou funkci f definovanou na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$. Chceme definovat, jakou plochu má obrazec pod grafem funkce f tak, aby to bylo v souladu s tím, jak počítáme plochu u jednoduchých geometrických obrazců.

Jednou z možností je aproximovat obrazec pomocí konečných sjednocení obdélníků, jejichž plochu známe, a pak pomocí „limitního přechodu“ dojít k výsledku.

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a, b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělicími body** D . **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělicí body D jsou obsaženy v D' .

Značení. Necht' f je reálná funkce a $M \subset \mathbb{R}$. Potom symbol $\sup_M f$ značí $\sup\{f(x); x \in M\}$ a symbol $\inf_M f$ značí $\inf\{f(x); x \in M\}$.

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht' $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je nějaké dělení intervalu $[a, b]$. Potom definujeme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Hodnotu $\overline{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D .

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a, b]$ je pak rovna společné hodnotě $\int_a^b f(x) dx$ a $\overline{\int_a^b f(x) dx}$ a značíme ji $\int_a^b f(x) dx$. Je-li $a > b$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, a je-li $a = b$ položíme $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Značení. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}(a, b)$.

Poznámka. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f, D)$ a $\underline{S}(f, D)$ nemusely být vlastní.

Příklady. (a) Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $c \in \mathbb{R}$. Necht' $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem $f(x) = c, x \in [a, b]$. Potom $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$, protože pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f = \inf_I f = c$, a tedy $\overline{S}(f, D) = \underline{S}(f, D) = c(b - a)$ pro každé dělení D intervalu $[a, b]$.

(b) Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Necht' D je Dirichletova funkce. Potom $\int_a^b D(x) dx = 0$ a $\int_a^{\overline{b}} D(x) dx = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Necht' R je Riemannova funkce. Potom $R \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b R(x) dx = 0$ (odvodíme později).

(d) Platí $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

Poznámka. Necht' $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, $M_1 \subset M_2$. Necht' f je funkce definovaná alespoň na M_2 . Potom platí

$$\sup_{M_1} f \leq \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \geq \inf_{M_2} f.$$

Věta 7.14 (vlastnosti dělení). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$.

(a) Necht' D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$, přičemž D' zjemňuje D . Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

(b) Necht' D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(c) Platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Důkaz. (a) Druhá nerovnost zřejmě ihned plyne z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) &= \inf_{[x_{j-1}, z]} f \cdot (z - x_{j-1}) + \inf_{[z, x_j]} f \cdot (x_j - z) \\ &\quad - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Protože

$$\inf_{[x_{j-1}, z]} f \geq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z, x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz první nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělicí bod navíc. Obecný případ první nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti první.

(b) Máme-li dána dělení D a D' , snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D' . Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D').$$

(c) Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Tedy i

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Tím je důkaz proveden. \square

Důsledek. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Označme kde $m = \inf_{[a,b]} f$ a $M = \sup_{[a,b]} f$. Pak*

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b-a).$$

Důkaz. První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení $D'' = \{a, b\}$. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Věty 7.14. \square

Věta 7.15 (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí*

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \varepsilon$$

a

$$\int_a^b f(x) dx \geq \underline{S}(f, D) > \int_a^b f(x) dx - \varepsilon.$$

konec 9. přednášky (18.3.2025)

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\left\{\mu(D_0), \frac{\varepsilon}{4Kn}\right\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0 . Ověřme nejprve, že

$$(33) \quad \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D).$$

Označme symbolem \mathcal{D} všechny intervaly dané dělením D a \mathcal{P} všechny intervaly dané dělením P . Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I . Pak

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I| \quad \text{a} \quad \bar{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot |I|.$$

Nechť interval $I = [\alpha, \beta]$ splňuje $I \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v \mathcal{P} , příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný. Není-li I v \mathcal{P} , protíná jeho vnitřek množinu X . Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{0, \dots, n\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\bar{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha, \beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\bar{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha, x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i, \beta]} f \cdot (\beta - x_i).$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{[\alpha, \beta]} f(\beta - \alpha) - \left(\sup_{[\alpha, x_i]} f(x_i - \alpha) + \sup_{[x_i, \beta]} f(\beta - x_i) \right) \right| \\ & \leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \leq 2K\nu(D). \end{aligned}$$

Jelikož je intervalů z \mathcal{D} protínajících X nejvýše n , máme

$$\bar{S}(f, D) - \bar{S}(f, P) \leq 2Kn\nu(D),$$

tj. nerovnost (33).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\begin{aligned} \int_a^{\bar{b}} f(x) dx & \leq \bar{S}(f, D) \leq \bar{S}(f, P) + 2Kn\nu(D) \\ & \leq \bar{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + 2\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\int_a^b f(x) dx \geq \underline{S}(f, D) \geq \int_a^b f(x) dx - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak vyhovuje požadovaným vlastnostem. \square

Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Nechť $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 7.15 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\bar{S}(f, D) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D_n) < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. \square

Věta 7.16 (aproximace Riemannova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je omezená funkce na $[a, b]$ a posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ splňuje*

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$(35) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Dle Věty 7.14 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underline{S}(f, D_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D_n).$$

Odtud plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Díky (34) dostáváme $\int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. Funkce f je tedy riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí (35). \square

Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a spočítejte $\int_0^1 f(x) dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{ \frac{j}{n} \right\}_{j=0}^n$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3} (n-1)n(2n-1), \\ \overline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Věty 7.16 pak máme $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Věta 7.17 (kritérium existence Riemannova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

- (i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,
- (ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a, b]$ zjemňující D_1 i D_2 . Pak dostaneme díky Větě 7.14 nerovnosti

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &\leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2) \\ &\leq \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy (ii) platí.

(ii) \Rightarrow (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. □

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je **stejněměrně spojitá** na I , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejněměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejněměrné spojitosti pro ε . Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0 , respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I .

Příklad. Nechť $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I , ale není stejněměrně spojitá na I .

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejněměrné spojitosti. □

Věta 7.18 (spojitost a stejněměrná spojitost). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejněměrně spojitá na $[a, b]$.*

konec 10. přednášky (21.3.2025)

Důkaz. Nechť f není stejněměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy $\varepsilon > 0$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x . Podle Heineovy věty platí

$$(36) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}).$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$(37) \quad 0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|.$$

Díky (36) platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|) = 0.$$

Odtud a z (37) dostáváme pomocí věty o dvou strážnících

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ však platí $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, což je spor. \square

Věta 7.19 (spojitost a riemannovská integrovatelnost). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.*

Důkaz. Funkce f je omezená na $[a, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá (Věta 7.18), lze tedy nalézt $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Věta 7.17 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. \square

Věta 7.20 (monotonie a riemannovská integrovatelnost). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]: f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 7.17. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n} (b - a) (f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, $i = 0, \dots, n$. Pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle Věty 7.20 tedy platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. □

Věta 7.21 (linearita Riemannova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí*

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Důkaz. Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.

Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

$$\inf_I f + \inf_I g \leq \inf_I (f + g) \quad \text{a} \quad \sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$(38) \quad \underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Ze (38) tedy máme podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f + g, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f + g, D_n) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Z Důsledku plyne $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ a

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Z Důsledku tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(-f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(-f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$. \square

Věta 7.22 (Riemannův integrál a uspořádání). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x) dx. \quad \square$$

Věta 7.23 (aditivita Riemannova integrálu). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$, právě když $f \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak platí*

$$(39) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Důkaz. Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělicích bodů dělení D_n^1 a D_n^2 . Pak platí $\lim \nu(D_n) = 0$.

\Leftarrow Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$(40) \quad \begin{aligned} \overline{S}(f, D_n) &= \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2), \\ \underline{S}(f, D_n) &= \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2). \end{aligned}$$

Podle Důsledku platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Dle Důsledku platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a také (39).

\Rightarrow Předpokládejme $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti (40). Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \\ &\leq (\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) + (\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)) \\ &= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n). \end{aligned}$$

Poněvadž platí $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}(a, b)$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně. Rovnost (39) plyne z první části důkazu. \square

Poznámka. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 7.23 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Věta 7.24 (Riemannův integrál a absolutní hodnota). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí*

$$(41) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důkaz. Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$(42) \quad \sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost (42) ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &\leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta \\ &\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost (42) ověřena.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 7.17 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z (42) plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 7.17 je tedy $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$. Zbývá odvodit nerovnost (41).

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$(43) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 7.21. Použijeme nerovnost (43) pro funkci f a pomocí Věty 7.21 obdržíme

$$(44) \quad - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-f(x)) dx \leq \int_a^b |-f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Z nerovností (43) a (44) dostáváme (41). □

Poznámka. Implikaci $f \in \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(a, b)$ nelze obrátit. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 2D(x) - 1$, kde D je Dirichletova funkce. Potom pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f \notin \mathcal{R}(a, b)$.

Věta 7.25 (derivace funkce horní meze). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každá $a, b \in J$ platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Nechť $c \in J$ a $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{pro } x \in J.$$

Potom platí:

- (a) F je spojitá na J ,
- (b) jestliže $x_0 \in \text{Int } J$ a f je spojitá v x_0 , pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J . Nalezneme $\eta > 0$ takové, že $[y_0, y_0 + \eta] \subset J$. Protože je $f \in \mathcal{R}([y_0, y_0 + \eta])$, je f omezená na $[y_0, y_0 + \eta]$. Nechť $K > 0$ splňuje

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \eta] : |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\delta \leq \eta$ a $K\delta < \varepsilon$. Zvolme $y \in [y_0, y_0 + \delta]$. Potom

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_c^y f(x) dx - \int_c^{y_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)| dx \leq \int_{y_0}^y K dx = K(y - y_0) < K\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \rightarrow y_{0+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \rightarrow y_{0+}} F(y) = F(y_0),$$

takže F je spojitá zprava v bodě y_0 . Obdobně lze dokázat, že F je spojitá zleva v každém bodě intervalu J , který není levým krajním bodem J .

(b) Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že $P(x_0, \delta) \subset J$ a

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right| = \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

Důkaz Věty 7.2. Zvolme $c \in (a, b)$ a položíme

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle Věty 7.19 platí $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ pro každý interval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Funkce F je tedy dobře definovaná na (a, b) . Z Věty 7.25(b) plyne, že pro každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Tedy F je primitivní k f na (a, b) . □

konec 11. přednášky (25.3.2025)

Značení. Nechť F je funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Jestliže existuje $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$, pak hodnotu této limity značíme symbolem $F(a+)$. Obdobně definujeme symbol $F(a-)$.

Věta 7.26 (Riemannův integrál spojitě funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je primitivní funkce k f na (a, b) . Potom existují vlastní $F(a+)$ a $F(b-)$ a platí*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+).$$

Důkaz. Definujme funkci $\tilde{f}: (a-1, b+1) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

Pak je \tilde{f} spojitá na $(a-1, b+1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t) dt, \quad x \in (a-1, b+1).$$

Pak je \tilde{F} primitivní funkce k \tilde{f} na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože $\tilde{F}|_{(a,b)}$ je primitivní funkce k funkci f , nalezneme podle Věty 7.1 $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) : F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Platí $\tilde{F}(a) = 0$. Tedy

$$F(a+) = \tilde{F}(a) + c = c \quad \text{a} \quad F(b-) = \tilde{F}(b) + c.$$

Tudíž

$$\int_a^b f(t) dt = \tilde{F}(b) = F(b-) - c = F(b-) - F(a+).$$

□

Věta 7.27 (Riemannův integrál funkcí lišících se v konečně mnoha bodech). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Jestliže g je funkce definovaná alespoň na $[a, b]$, která se v intervalu $[a, b]$ liší od f v konečném počtu bodů, potom $g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.*

Důkaz. Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g . Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme m počet prvků množiny J . Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Označme \mathcal{I} systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme \mathcal{S} systém těch intervalů z \mathcal{I} , které mají neprázdný průnik s J . Systém \mathcal{S} má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z \mathcal{I} . Potom platí

$$(45) \quad \begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) &= \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I| \\ &= \sum_{I \in \mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|, \end{aligned}$$

neboť $\sup_I f = \sup_I g$, pokud $I \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{S}$. Můžeme tedy odhadnout

$$\begin{aligned}
 |\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D)| &\leq \sum_{I \in \mathcal{S}} (|\sup_I f| + |\sup_I g|) \cdot |I| \\
 (46) \qquad \qquad \qquad &\leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot |I| \leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot \nu(D) \\
 &\leq 2m \cdot 2K \cdot \nu(D) < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Obdobně obdržíme

$$(47) \qquad \qquad \qquad |\underline{S}(f, D) - \underline{S}(g, D)| < \varepsilon.$$

Podle (45), (46) a (47) dostáváme

$$\begin{aligned}
 (48) \qquad \int_a^b f(x) dx - 2\varepsilon &< \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D) \\
 &< \overline{S}(f, D) + \varepsilon < \int_a^b f(x) dx + 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Odtud podle Věty 7.17 plyne, že g je na intervalu $[a, b]$ riemannovsky integrovatelná. Z odhadu (48) pak plyne $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. \square

Věta 7.28 (charakterizace riemannovské integrovatelnosti). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

- (i) *Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$.*
- (ii) *Existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x) dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 7.17 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Výrok (ii) tedy platí.

(ii) \Rightarrow (i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbb{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f . Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\},$$

$$K = \max\{|f(x_i)|; i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolně. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ t & i = j. \end{cases}$$

Pak

$$\begin{aligned} |f(t)(x_j - x_{j-1})| &= \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^n K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b - a). \end{aligned}$$

Tedy platí

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}(1 + |I| + K(b - a))$$

a f je omezená.

Můžeme tedy použít Větu 7.17. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b - a) \leq I + \varepsilon + \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f, D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b - a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < 2(1 + b - a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. □

Poznámka. Podívejme se ještě na vztah hodnoty I a hodnoty $\int_a^b f(x) dx$ v předchozí větě. Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x) dx$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) \Rightarrow (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq I$. Obdobně odvodíme $\int_a^{\underline{b}} f(x) dx \geq I$, a tedy $I = \int_a^b f(x) dx$.

Poznámka. Podmínka (ii) Věty 7.28 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

konec 12. přednášky (28.3.2025)

7.3. Newtonův integrál.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F ,
- existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny \mathbb{R}^* .

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny \mathbb{R}^* určený výrazem

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x) dx$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. Jestliže $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

Značení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b , kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N) \int_a^b f(x) dx \quad \text{a} \quad (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Poznámka. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta 7.1).

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{existuje} & \left\{ \begin{array}{l} a \text{ je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ a \text{ je roven } \infty \text{ nebo } -\infty, \text{ tedy diverguje,} \end{array} \right. \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech reálných funkcí, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N) \int_0^1 x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x \right]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočítejte $(N) \int_1^\infty x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x \right]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Poznámka. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \text{sign } x$ je intervalu $[-1, 1]$ monotónní, a tedy podle Věty 7.20 také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1, 1)$ nemá Darbouxovu vlastnost, a tedy dle Věty 7.5 ani primitivní funkci.

Poznámka. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 7.29 (linearita Newtonova integrálu). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí*

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Důkaz. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit funkcí máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

□

Věta 7.30 (Newtonův integrál a uspořádání). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Necht' platí $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b) . Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 7.29 máme

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

□

Věta 7.31 (aditivita Newtonova integrálu). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$.*

(a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$, potom $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a platí*

$$(49) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(b) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a f je spojitá v c , pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí (49).*

Důkaz. (a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) . Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b) . Navíc má funkce F v bodě c , jakožto spojitá funkce na (a, b) , vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b) . Z předpokladů plyne, že existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow c^-} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} G(x)$. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x \rightarrow c^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} G(x).$$

Definujeme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \rightarrow c^-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. Díky větě o limitě derivací navíc platí

$$H'(c) = \lim_{x \rightarrow c} H'(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c . Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b) a má vlastní limity v krajních bodech (a, b) , protože je v příslušných bodech mají funkce F a G . Tedy $f \in \mathcal{N}(a, b)$. □

Věta 7.32 (Newtonův integrál a absolutní hodnota). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a f je spojitá na (a, b) . Pak $\int_a^b |f(x)| dx$ existuje a*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důkaz. Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní dle Věty 7.2. Označme ji F . Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b) , přičemž $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) -$

$\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ definován. Je-li tento rozdíl roven ∞ , požadovaná nerovnost zjevně platí. Pokud je konečný, pak $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$. Můžeme tedy použít Větu 7.30. Platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, a tedy

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \max \left\{ \int_a^b f(x) dx, - \int_a^b f(x) dx \right\} \\ &= \max \left\{ \int_a^b f(x) dx, \int_a^b -f(x) dx \right\} \leq \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 7.33 (per partes pro Newtonův integrál). Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b) . Necht' F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b) . Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b) . Označme ji písmenem H . Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF . Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x) dx$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Tedy

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 7.34 (substituce pro Newtonův integrál). Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β) . Necht' φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$(50) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci (funkci φ'). Z Darbouxovy vlastnosti derivace (Věta 7.5) tedy plyne, že obraz intervalu (α, β) při zobrazení φ' , tedy množina $\varphi'((\alpha, \beta))$, je interval. Z předpokladu víme, že bod 0 není prvkem tohoto intervalu. Z toho vyplývá, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β) . Nyní rozlišíme dvě možnosti. Nejprve budeme předpokládat, že existuje integrál na levé straně rovnosti (50) a pak na pravé.

Existuje $\int_a^b f(x) dx$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t) = b$$

a z jednostranné verze věty o limitě složené funkce

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^+} F(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow b_-} F(x), \quad \lim_{t \rightarrow \beta^-} F(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) (-\varphi'(t)) dt = [-F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) + \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Existuje $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci (Věta 7.7) pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f . Platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} G(t), \quad \lim_{x \rightarrow b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x) dx = [-G \circ \varphi^{-1}]_a^b = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

□

konec 13. přednášky (1.4.2025)

Věta 7.35 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť funkce F je definována alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova-Cauchyova) podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in P(a, \delta): |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. \Rightarrow Označme $A = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$, pak $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x, y \in P(a, \delta)$ máme

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - A| + |A - F(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

\Leftarrow Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ posloupnost obsaženou v $P(a, \delta_0)$ a splňující $\lim x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezneme $\delta > 0$ z podmínky věty. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Potom pro každá $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{F(x_n)\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, a je tudíž konvergentní. Označme $A = \lim F(x_n)$.

Zvolme nyní libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a a $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky a $n_1 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1: x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Dále nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty tedy plyne, že $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$. \square

Poznámka. Tvrzení Věty 7.35 platí obdobně i pro jednostranné limity.

Věta 7.36 (konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b) . Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Podle Věty 7.2 má f na (a, b) primitivní funkci F . Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Cauchyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nalezneme $K > 0$ takové, že

$$\forall x \in (a, b): |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq K|y - x| < K\delta = \varepsilon.$$

Podle Věty 7.35 tedy existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$. Obdobně lze dokázat, že i $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ existuje vlastní. Tedy $f \in \mathcal{N}(a, b)$. \square

Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 7.36 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu \mathbb{R} také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ však dokonce ani neexistuje.

Věta 7.37 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky Větě 7.28 nalezneme $\delta > 0$, takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, platí

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R) \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ . Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Položme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow b-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \rightarrow a+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$, neboť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Navíc $H' = f$ na (a, b) . Pro každé $i = 1, \dots, n$ použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$\begin{aligned} (N) \int_a^b f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a_+} F(x) = H(b) - H(a) \\ &= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^n (H(x_i) - H(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\left| (N) \int_a^b f(x) dx - (R) \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R) \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět 7.19, 7.36 a 7.37. □

7.4. Konvergence Newtonova integrálu.

Věta 7.38 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b]$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f . Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, dostáváme $G(x) \geq F(x)$ na (c, b) . Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \rightarrow b_-} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \rightarrow b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c , protože jsou v tomto bodě spojitě. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty 7.36. Protože f je spojitá v c , platí odle Věty 7.31(b) $f \in \mathcal{N}(a, b)$. □

Poznámka. Tvrzení Věty 7.38 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konverguje.

Řešení. Zkoumejme konvergenci $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$. Máme totiž pomoci per partes

$$\int \cos \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int x \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Protože $\int_0^1 \cos \frac{1}{x}$ konverguje (Věta 7.36), konverguje i

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \left[x \cos \frac{1}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx.$$

Substitucí $\frac{1}{x} = t$ máme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 t \left(\sin \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} dt$$

(vizte Větu 7.34).

Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy dle Věty 7.36 konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1, \infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, je podle Věty 7.38 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Použitím Věty 7.31(b) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0, \infty)$.

Věta 7.39 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojitě nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Označme $c = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) : 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Protože $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 7.38 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde Newtonovsky integrovatelná. Tedy $g \in \mathcal{N}(a, x_0)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomoci odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b) . \square

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}{x^3+x^2} dx$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}{x^3+x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojitě nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}}{x^{-\frac{5}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2. \end{aligned}$$

Podle Věty 7.39 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1, \infty)$.

Lemma (odhady Newtonova integrálu součinu dvou funkcí). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom*

$$g(a) \inf_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq g(a) \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt.$$

Speciálně platí

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq g(a) \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f(t) dt \right|.$$

konec 14. přednášky (4.4.2025)

Důkaz. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg (vizte Větu 7.18) nalezneme $\delta > 0$ takové, že platí

$$(51) \quad \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow (|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon) \ \& \ (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ . Pak máme z (51) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i] : f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt.$$

Obdobnou úvahou dostáváme pomocí (51)

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t) dt &\leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq g(x_{i-1}) \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + (g(a) + 1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Pak

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t) dt &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t) dt \\
&\leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a) + 1) \\
&= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a) \\
&= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \\
&\leq \sup_{t \in [a, b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon} \\
&= g(a) \sup_{t \in [a, b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).
\end{aligned}$$

Odtud plyne odtud požadovaná nerovnost.

První nerovnost lze dokázat obdobně. \square

Důsledek. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná a spojitá.*

(a) *Je-li g nerostoucí, pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = g(a) \int_a^c f(t) dt.$$

(b) *Je-li g neklesající, pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = g(b) \int_c^b f(t) dt.$$

Důkaz. (a) Primitivní funkce $F = \int_a^x f(t) dt$ k f na (a, b) je spojitá a lze spojitě rozšířit na $[a, b]$, protože $\int_a^b f(t) dt$ konverguje. Podle předchozího lemmatu leží $\int_a^v f(t) dt$ v oboru hodnot funkce F , takže musí existovat $c \in [a, b]$ tak, že $F(c) = \int_a^b f(t)g(t) dt$, což dokazuje naše tvrzení.

(b) Je-li nyní g neklesající na $[a, b]$ a položíme $\tilde{g}(x) = g(-x)$, $\tilde{f}(x) = f(-x)$, splňují funkce \tilde{g}, \tilde{f} předpoklady části 1 na intervalu $[-b, -a]$, takže existuje bod $d \in [-b, -a]$ tak, že

$$\int_{-b}^{-a} \tilde{f}(u)\tilde{g}u du = \tilde{g}(-b) \int_{-b}^d \tilde{f}(u) du \stackrel{t=-u}{\Rightarrow} \int_a^b f(t)g(t) dt = g(b) \int_{-d}^b f(t) dt$$

Nyní stačí položit $c = -d$. \square

Z těchto důsledků snadno vyplývá tzv. 2.věta o střední hodnotě pro integrály. Zdá se vhodnější uvést nejdříve tzv. 1.větu o střední hodnotě.

Věta 7.40 (první věta o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Funkce f , jakožto spojitá funkce na $[a, b]$, nabývá na něm svého minima m a maxima M . Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$(52) \quad mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Pokud $\int_a^b g(x) dx = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x) dx > 0$. Potom z (52) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$, nalezneme $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 7.41 (druhá věta o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je monotónní a spojitá na $[a, b]$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že*

$$(53) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx.$$

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že g je neklesající, takže funkce $g(x) - g(a)$ je neklesající a nezáporná. Podle předchozího důsledku, části 2, máme pro nějaké $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(t)(g(t) - g(a)) dt = (g(b) - g(a)) \int_c^b f(t) dt.$$

Na levé straně ponecháme jen $\int_a^b f(t) dt$ a dostaneme (použijeme aditivitu integrálu)

$$\int_a^b f(t)g(t) = g(a) \left(\int_a^b f(t) dt - \int_c^b f(t) dt \right) + g(b) \int_c^b f(t) dt = g(a) \int_a^c f(t) dt + g(b) \int_c^b f(t) dt, ,$$

což bylo dokázat.

Pro důkaz případu, kdy g je nerostoucí, použijeme místo $g(x) - g(a)$ funkci $g(x) - g(b)$ s obdobným dalším postupem. □

Věta 7.42 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:*

- (a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*
- (b) *Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Pro konvergenci $\int_a^b f(x)g(x) dx$ použijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (Věta 7.35). Zvolme $\varepsilon > 0$. Hledáme $b_0 \in (a, b)$ takové, že pro libovolná $b', b'' \in (b_0, b)$ je $|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x) dx| < \varepsilon$. Jsou splněny podmínky 2.věty o střední hodnotě pro funkce f, g na libovolném intervalu $[b', b''] \subset (a, b)$, takže existuje $c \in (b', b'')$ tak, že

$$\int_{b'}^{b''} f(x)g(x) dx = g(b') \int_{b'}^c f(x) dx + g(b'') \int_c^{b''} f(x) dx.$$

V případě Dirichletovy věty jsou čísla $\int_{b'}^c f(x) dx, \int_c^{b''} f(x) dx$ omezená nějakou konstantou K pro libovolnou volbu $[b', b''] \subset (a, b)$. Existuje $b_0 \in (a, b)$, že $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2K}$ pro $x \in (b_0, b)$, takže $|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x) dx| < \varepsilon$ pro libovolná $b', b'' \in (b_0, b)$.

V případě Abelovy věty jsou všechna čísla $g(x)$ omezena nějakou konstantou L . Podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky existuje $b_0 \in (a, b)$, že $|\int_d^e f(x) dx| < \frac{\varepsilon}{2L}$ pro $d, e \in (b_0, b)$. Opět dostáváme $|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x) dx| < \varepsilon$ pro libovolná $b', b'' \in (b_0, b)$. \square

Poznámka. Abelovo kritérium vyplývá z Dirichletova (tj (a) \Rightarrow (b)). Necht f, g splňují podmínky předchozí věty a podmínky v (b). Protože g má v b_- vlastní limitu, např. p , splňuje dvojice $fg - p$ podmínky (a), takže $f(g - p) \in \mathcal{N}(a, b)$. Podle předpokladu je $pf \in \mathcal{N}(a, b)$ a tedy i $fg = pf + f(g - p) \in \mathcal{N}(a, b)$.

Pokud má g v $[a, b)$ vlastní derivaci g' , lze dokázat Dirichletovo kritérium pomocí per partes. Opět použijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro konvergenci integrálů (F je primitivní funkce k f omezená konstantou K):

$$\int_{b'}^{b''} f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_{b'}^{b''} - \int_{b'}^{b''} F(x)g'(x) dx.$$

Potom $|[F(x)g(x)]_{b'}^{b''}| \leq K(|g(b')| + |g(b'')|)$. V posledním výrazu nemění g' znaménko a můžeme předpokládat např. že $g' \geq 0$. Pak $F(x)g'(x) \leq Kg'(x)$ a dostáváme

$$\left| \int_{b'}^{b''} F(x)g'(x) dx \right| \leq K \int_{b'}^{b''} g'(x) dx = K(g(b'') - g(b')).$$

Oba odhady pro pravou stranu per partes lze udělat libovolně malé, protože g má v b_- limitu rovnou 0.

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 7.42(b) pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f , totiž $\sin x$, je omezená na $(1, \infty)$ a $g(x)$ je na $[1, \infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. Obě funkce jsou navíc spojité na $[1, \infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje.

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \arctg x \frac{\cos x}{x} dx$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 7.42(a) položíme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \arctg x.$$

Obě funkce jsou spojité na $[1, \infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tedy integrál konverguje podle Větě 7.42(a).

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverguje.

Řešení. Protože platí

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x \in [1, \infty),$$

stačí dle Věty 7.38 ověřit divergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Píšme

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Jest

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{\cos y}{y} dy$$

a z předchozího příkladu víme, že $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tím spíše $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(2, \infty)$, a tedy i $\frac{\cos 2x}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Máme tudíž

$$\frac{1}{2x} = \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^2 x}{x},$$

přičemž $\frac{1}{2x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$ a $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Kdyby $\frac{\sin^2 x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, pak by platilo i $\frac{1}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, což by byl spor. Odtud plyne, že $\frac{\sin^2 x}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$, a tedy i $\frac{|\sin x|}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$.

7.5. Aplikace určitého integrálu.

Věta 7.43 (Cauchyova–Schwarzova–Buňakovského nerovnost). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Důkaz. Položme

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$0 \leq f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Protože je uvedený kvadratický trinom nezáporný, je jeho diskriminant nekladný, tedy

$$4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Odtud plyne tvrzení. □

konec 15. přednášky (8.4.2025)

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}^n$. **Normou** vektoru $x = (x_1, \dots, x_n)$ rozumíme hodnotu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Poznámka. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 0, [\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o],$
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$
- (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Tvrzení (a) a (b) jsou elementární. Z Věty 7.43 plyne pro každá $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x + y\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2} + \sum_{i=1}^n y_i^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Tím je ověřeno i tvrzení (c).

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom definujeme

$$(N) \int_a^b f(x) dx = \left((N) \int_a^b f_1(x) dx, \dots, (N) \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Obdobně definujeme $(R) \int_a^b f(x) dx$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{R}(a, b)$.

Věta 7.44 (norma a integrál). *Necht' $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

Důkaz. Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\| dt$ je konvergentní. Položme

$$y = \left[\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right].$$

Z Věty 7.43 plyne

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b f_i(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n y_i f_i(t) \right) dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n f_i^2(t) \right)} dt = \int_a^b \|y\| \|f(t)\| dt = \|y\| \int_a^b \|f(t)\| dt. \end{aligned}$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Pokud $\|y\| > 0$, pak nerovnost plyne z právě provedeného výpočtu. \square

Věta 7.45 (integrální kritérium). *Necht' f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Necht' pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ konverguje.*

Důkaz. Uvažujme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_1 - 1, n_1\}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\begin{aligned}\bar{S}(f, D) &= a_{n_0} + \dots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i, \\ \underline{S}(f, D) &= a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.\end{aligned}$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\begin{aligned}(54) \quad \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i &= \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x) dx = (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x) dx \\ &= (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x) dx \leq \bar{S}(f, D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.\end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^x f(t) dt, \quad t \in [n_0, \infty),$$

primitivní k f na (n_0, ∞) , a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme z (54)

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{n_0}^x f(t) dt \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0+1}^n a_i = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak (54) dává

$$(55) \quad \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{n_0}^n f(t) dt = \limsup_{x \rightarrow \infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a podle (55) je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ konverguje. \square

Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

diverguje podle Věty 7.45.

Věta 7.46 (zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru). *Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$ -ní derivaci. Pak*

$$(56) \quad f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt,$$

tedy (56) pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n + 1$. Mějme tedy $(n + 2)$ -krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x - t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes (Věta 7.33) počítat

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \\ &= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} \right]_a^x \\ &\quad - \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n (-1) dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\ &= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. □

Definice. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** \mathcal{C}^1 , tj. φ'_i jsou spojitě na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

Příklady. (a) Jednotkovou kružnici v rovině lze vyjádřit křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Graf funkce f na intervalu je křivkou popsanou zobrazením $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$.

(c) Geometrický obraz křivky lze často parametrizovat různými zobrazeními φ , například graf funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ lze popsat také jako $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka. Její **délkou** rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D); D \text{ dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^n \|\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\|.$$

Věta 7.47 (délka křivky). *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka. Pak platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} dt.$$

Důkaz. Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$. Potom platí díky Větě 7.44 platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^k \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Odtud plyne $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce φ'_i jsou stejnoměrně spojitě na $[a, b]$ dle Věty 7.18. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta : |\varphi'_i(t) - \varphi'_i(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$ a každé $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| dt - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) &\leq \|\varphi'(x_j)\| (x_j - x_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) dt \right\| \\ &\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) dt \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) dt \right\| \\ &\leq \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Tudíž

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \leq \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b - a) \leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b - a).$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \leq L(\varphi)$. □

konec 16. přednášky (11.4.2025)

Příklad. (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

8. METRICKÉ PROSTORY I

Tato kapitola je věnována metrickým prostorům, tj. množinám, na kterých je dán způsob měření vzdálenosti. Metrické prostory nám umožní definovat pojem spojitosti obecněji než v předchozím textu. Dále budeme zkoumat některé důležité typy metrických prostorů. Výsledky této kapitoly budeme později často používat.

8.1. Základní pojmy.

Definice. Necht' P je množina a $\varrho: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující následující tři podmínky:

- (a) $\forall x, y \in P: \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
- (b) $\forall x, y \in P: \varrho(x, y) = \varrho(y, x),$
- (c) $\forall x, y, z \in P: \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z).$

Potom funkci ϱ nazýváme **metrikou** na P a dvojici (P, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**. Jsou-li x, y prvky množiny P , pak nezáporné číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme jejich **vzdáleností**.

Poznámka. Metrický prostor (P, ϱ) sestává z množiny prvků P a z funkce ϱ , pomocí které mezi prvky P měříme vzdálenost. V tomto kontextu budeme o prvcích množiny P hovořit jako o bodech. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina. Podmínky (a)–(c) vyjadřují přirozené požadavky, které by měl splňovat libovolný způsob měření vzdálenosti na jakékoli množině. Podmínka (a) vyjadřuje jednak to, že dva různé body mají vždy od sebe kladnou vzdálenost a jednak to, že vzdálenost každého bodu od sebe sama je vždy nulová. Podmínka (b) říká, že vzdálenost bodu x od bodu y je vždy stejná jako vzdálenost bodu y od bodu x . Podmínka (c), kterou nazýváme **trojúhelníkovou nerovností**, je dalším přirozeným požadavkem.

Úmluva. Přestože metrický prostor (P, ϱ) je dvojice (množina, metrika), často používáme obratu „metrický prostor P “, pokud je volba metriky zřejmá z kontextu.

Příklady metrických prostorů. Následující série příkladů ilustruje právě definovaný pojem metrického prostoru. S metrickými prostory z těchto příkladů se budeme setkávat i později.

Příklad. Definujme funkci ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že (\mathbb{R}, ϱ) tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x - y| \in [0, \infty)$. Stačí tedy ověřit platnost podmínek (a)–(c) z definice metriky. Podmínky (a) a (b) jsou však zřejmě splněny a podmínka (c) je trojúhelníková nerovnost reálných čísel.

Úmluva. V dalším textu budeme na metrickém prostoru \mathbb{R} vždy uvažovat metriku ϱ definovanou v předcházejícím příkladu, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Příklad. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_2 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_2(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z definice metriky jsou zřejmě splněny. Ověříme podmínku (c). Necht' $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$

a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Označme $a_i = x_i - y_i$ a $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, \dots, n$. Potom z Cauchyovy–Schwarzovy–Buňakovského nerovnosti (Věta 7.43) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \varrho_2(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\ &= \varrho_2(x, y) + \varrho_2(y, z). \end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ je metrický prostor.

Poznámka. Funkci ϱ_2 nazýváme **eukleidovskou metrikou** na \mathbb{R}^n . Symbol ϱ_2 je zvolen z důvodů, které budou zřejmé z dalšího textu. Pro $n = 1$ splývá metrika ϱ_2 na \mathbb{R} s metrikou $|x - y|$. Pokud budeme pracovat s prostorem \mathbb{R}^n , budeme na něm vždy uvažovat metricku ϱ_2 , nebude-li výslovně řečeno jinak.

Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_1 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$(57) \quad \varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_1(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z definice metriky jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Zvolme $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom

$$\varrho_1(x, z) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) = \varrho_1(x, y) + \varrho_1(y, z).$$

Tím je ověřena platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ je metrický prostor.

Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_∞ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$(58) \quad \varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_\infty(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z definice metriky jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Necht $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že

$$\varrho_\infty(x, z) = \max\{|x_i - z_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = |x_j - z_j|.$$

Platí

$$|x_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

Protože

$$|x_j - y_j| \leq \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \varrho_\infty(x, y)$$

a

$$|y_j - z_j| \leq \max\{|y_i - z_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \varrho_\infty(y, z),$$

dostáváme celkem

$$\varrho_\infty(x, z) \leq \varrho_\infty(x, y) + \varrho_\infty(y, z).$$

Tím jsme ověřili platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ je metrický prostor.Před formulací dalšího příkladu připomeňme, že symbol \mathbb{C} značí množinu všech komplexních čísel.**Příklad** (Gaussova rovina). Funkci $\varrho: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ definujme předpisem $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Dokažte, že (\mathbb{C}, ϱ) je metrický prostor.**Řešení.** Každé komplexní číslo je jednoznačně určeno dvěma reálnými složkami – reálnou a imaginární. Funkci ϱ pak z těchto složek počítáme podle stejného vzorce, kterým počítáme vzdálenost ϱ_2 dvou bodů v \mathbb{R}^2 pomocí jejich souřadnic, tedy (\mathbb{C}, ϱ) je metrický prostor.**Příklad.** Nechtě $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme symbolem $\mathcal{C}([a, b])$ množinu všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$. Definujme funkci ϱ_{sup} na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\text{sup}}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{sup} nazýváme **supremovou metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.**Řešení.** Nechtě $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Díky spojitosti funkce absolutní hodnota, větě o spojitosti a aritmetických operacích a větě o spojitosti složené funkce platí $|f - g| \in \mathcal{C}([a, b])$. Podle věty o existenci extrémů nabývá funkce $|f - g|$ na $[a, b]$ svého maxima, takže funkce ϱ_{sup} je na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\text{sup}}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Podmínky (a) a (b) z definice metriky jsou zřejmě splněny. Nechtě $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{y \in [a, b]} |f(y) - g(y)| + \sup_{y \in [a, b]} |g(y) - h(y)| \\ &= \varrho_{\text{sup}}(f, g) + \varrho_{\text{sup}}(g, h). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že číslo $\varrho_{\text{sup}}(f, g) + \varrho_{\text{sup}}(g, h)$ je horní závorou množiny

$$\{|f(x) - h(x)|; x \in [a, b]\},$$

a tedy podle definice suprema platí

$$\varrho_{\text{sup}}(f, h) \leq \varrho_{\text{sup}}(f, g) + \varrho_{\text{sup}}(g, h).$$

Tím je ověřena podmínka (c) z definice metriky. Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ je metrický prostor.**Příklad.** Nechtě $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme funkci ϱ_{int} na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\text{int}}(f, g) = (R) \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{int} nazýváme **integrální metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

K řešení příkladu budeme potřebovat následující lemma.

Lemma. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $h \in \mathcal{C}([a, b])$. Nechť existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $h(x_0) > 0$. Potom $\int_a^b |h(x)| dx > 0$.*

Důkaz. Nechť nejprve x_0 je vnitřním bodem $[a, b]$. Ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(x_0)$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom

$$\begin{aligned} \int_a^b |h(x)| dx &= \int_a^{x_0-\delta} |h(x)| dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)| dx + \int_{x_0+\delta}^b |h(x)| dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)| dx \geq \frac{1}{2}h(x_0) \cdot 2\delta = \delta h(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $x_0 = a$. Potom ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $\delta < b - a$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(a)$ pro každé $x \in [a, a + \delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)| dx \geq \int_a^{a+\delta} |h(x)| dx \geq \frac{1}{2}h(a) \cdot \delta > 0.$$

V případě $x_0 = b$ postupujeme obdobně. □

Řešení. Podle Věty 7.19 je funkce ϱ_{int} dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\text{int}}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Jestliže $f = g$, potom zřejmě $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$. Jestliže naopak $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ a platí $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$, pak podle lemmatu je $f(x) - g(x) = 0$ pro každé $x \in [a, b]$, tedy $f = g$. Tím je ověřena podmínka (a) z definice metriky. Podmínka (b) je zřejmě splněna. Ověříme platnost podmínky (c). Nechť $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom pomocí linearitý určitého integrálu (Věta 7.21) dostáváme

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f, h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)| dx \leq \int_a^b (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - h(x)| dx \\ &= \varrho_{\text{int}}(f, g) + \varrho_{\text{int}}(g, h). \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ je metrický prostor.

Příklad. Nechť P je libovolná množina. Definujme funkci $\varrho_{\text{diskr}} : P \times P \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dokažte, že potom $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{diskr} nazýváme **diskrétní metrikou** na P a $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ **diskrétním metrickým prostorem**.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a) a (b) z definice metriky jsou zřejmě splněny. Nechť $x, y, z \in P$. Jestliže $x = z$, potom $\varrho_{\text{diskr}}(x, z) = 0$, a tedy nerovnost v (c) je zřejmě splněna. Jestliže $x \neq z$, potom $x \neq y$ nebo $z \neq y$. Odtud plyne, že

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) + \varrho_{\text{diskr}}(y, z) \geq 1 = \varrho_{\text{diskr}}(x, z).$$

Podmínka (c) je tedy splněna. Dokázali jsme, že $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je metrický prostor.

Normované lineární prostory. Výčet příkladů metrických prostorů nyní rozšíříme o normované lineární prostory.

Poznámka (vektorový prostor). Symbol \mathbb{F} bude značit množinu reálných čísel \mathbb{R} nebo množinu komplexních čísel \mathbb{C} . Pro porozumění následující definici je třeba znát pojem **vektorového prostoru nad \mathbb{F}** . Vektorový prostor nad \mathbb{F} chápeme jako trojici $(X, +, \cdot)$, kde X je množina, $+$ je operace sčítání na X a \cdot je operace násobení prvků X prvky z \mathbb{F} . Většinou budeme ale používat kratší termín „vektorový prostor X “ místo přesnějšího „vektorový prostor $(X, +, \cdot)$ “. Nulový prvek budeme značit symbolem 0 .

Definice. Necht X je vektorový prostor nad \mathbb{F} . Zobrazení $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme **normou** na X , jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

- (a) $\forall x \in X: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (b) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- (c) $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ pak nazýváme **normovaným lineárním prostorem** nad tělesem \mathbb{F} . Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, hovoříme o **reálném** normovaném lineárním prostoru, pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, hovoříme o **komplexním** normovaném lineárním prostoru.

Věta 8.1 (metrika a norma). *Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{F} . Definujme zobrazení $\varrho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ předpisem $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Potom ϱ je metrika na X .*

Důkaz. Necht $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Ověříme podmínky (a)–(c) z definice metriky. Rovnost $\varrho(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = 0$, neboli $x = y$. Použijeme-li podmínku (b) z definice metriky pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \cdot \|y - x\| \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x), \end{aligned}$$

tedy podmínka (b) z definice metriky je splněna. Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z definice metriky

$$\begin{aligned} \varrho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z). \end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i podmínku (c) z definice metriky. Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka (normovaný lineární prostor jako metrický prostor). V souladu s Větou 8.1 budeme každý normovaný lineární prostor považovat také za prostor metrický s metrikou definovanou pomocí normy způsobem uvedeným v tvrzení Věty 8.1. Tak dostáváme důležitou třídu metrických prostorů.

Uveďme několik příkladů reálných normovaných lineárních prostorů.

Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Sčítání prvků z \mathbb{R}^n je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z \mathbb{R}^n reálnými čísly. Pro $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$ a $\alpha x = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n]$. Definujme funkci $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Tvrzení plyne z poznámky za Větou 7.43.

Definice. Funkci $\|\cdot\|$ z předchozího příkladu nazýváme **eukleidovskou normou na \mathbb{R}^n** .

Příklad. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu $\mathcal{C}([a, b])$ opatříme obvyklým sčítáním funkcí a obvyklým násobením funkce reálným číslem. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ na $\mathcal{C}([a, b])$ předpisem $\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{[a, b]} |f|$. Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Je snadné ověřit, že množina $\mathcal{C}([a, b])$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor. Poznamenejme jen, že je třeba využít větu o aritmetice limit, ze které plyne, že součet spojitých funkcí je spojitá funkce a násobek spojité funkce je také spojitá funkce. Podle věty o extrémech spojité funkce je $\|f\|_{\text{sup}} \in [0, \infty)$ pro každé $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Vlastnosti (a), (b) z definice normovaného lineárního prostoru jsou zřejmě splněny. Pro $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ díky trojúhelníkové nerovnosti a subaditivitě suprema platí

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\text{sup}} &= \sup\{|f(x) + g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\} + \sup\{|g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &= \|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}}. \end{aligned}$$

Tím je ověřena vlastnost (c) z definice metriky, a tedy $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|)$ je reálný normovaný lineární prostor.

Příklad (prostor ℓ_∞). Definujme ℓ_∞ jako množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Sčítání prvků z ℓ_∞ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$, $y = \{y_n\} \in \ell_\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Operace sčítání prvků z ℓ_∞ i násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly jsou dobře definovány, neboť součet dvou omezených posloupností je opět omezená posloupnost a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost. Není těžké ověřit, že ℓ_∞ s uvedenými operacemi tvoří reálný vektorový prostor. Poznamenejme jen, že nulovým vektorem je posloupnost, jejíž všechny členy jsou rovny 0.

Ověříme, že zobrazení $x \mapsto \|x\|_\infty$ je norma na ℓ_∞ . Pokud $x = 0 \in \ell_\infty$, pak snadný výpočet dává $\|x\|_\infty = 0$. Pokud pro $x \in \ell_\infty$ platí $\|x\|_\infty = 0$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ musí platit $|x_n| = 0$, a tedy $x = 0$. Máme-li $x \in \ell_\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup\{|\alpha x_n|; n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \cdot \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty.$$

Pro $x, y \in \ell_\infty$ máme díky trojúhelníkové nerovnosti a subaditivitě suprema

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sup\{|x_n + y_n|; n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|x_n| + |y_n|; n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n|; n \in \mathbb{N}\} = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Příklad (prostor c_0). Definujme c_0 jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $\lim x_n = 0$. Sčítání prvků z c_0 je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z c_0 reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in c_0$, $y = \{y_n\} \in c_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in c_0$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Pokud $x = \{x_n\} \in c_0$, $y = \{y_n\} \in c_0$, pak $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = 0 + 0 = 0$, a tedy $x + y \in c_0$. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\lim \alpha x_n = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy opět $\alpha x \in c_0$. Poněvadž každý prvek z c_0 leží v ℓ_∞ , tvoří c_0 vektorový podprostor ℓ_∞ . Zobrazení $x \mapsto \|x\|_\infty$ je pak normou na c_0 dle výše uvedeného příkladu.

konec 17. přednášky (15.4.2025)

Podprostor, otevřená koule a diametr.

Poznámka. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M \times M})$ zřejmě tvoří opět metrický prostor, neboť podmínky (a)–(c) z definice metriky jsou splněny pro všechna $x, y, z \in P$, a tedy i pro všechna $x, y, z \in M$. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M \times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P, ϱ) . Metriku $\varrho|_{M \times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ .

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Potom množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

$$B(x, r) = \{y \in P; \varrho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem x a poloměrem r** .

Příklad. Uvažujme metrický prostor \mathbb{R} s eukleidovskou metrikou. Necht' $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Dokažte, že $B(x, r) = (x - r, x + r)$.

Řešení. Tvrzení plyne z definice eukleidovské metriky na \mathbb{R} elementárním výpočtem.

Příklad. Necht' $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{pokud } r \leq 1, \\ P, & \text{pokud } r > 1. \end{cases}$$

Řešení. Tvrzení plyne bezprostředně z definice diskrétní metriky.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Potom **vzdálenost bodu x od množiny A** definujeme předpisem

$$\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y); y \in A\}.$$

Namísto symbolu $\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A)$ lze užít také symboly $\text{dist}_\varrho(x, A)$, $\varrho(x, A)$ nebo $\text{dist}(x, A)$, je-li z kontextu jasné, s jakým metrickým prostorem pracujeme.

Speciálně pro každé $x \in P$ platí $\text{dist}(x, \emptyset) = \infty$.

Příklad. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor, $A, B \subset P$, $A \subset B$, a $x \in P$. Dokažte, že potom platí $\text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(x, A)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $A \subset B$, platí

$$\{\varrho(x, y); y \in A\} \subset \{\varrho(x, y); y \in B\}.$$

Tudíž

$$\text{dist}(x, B) = \inf\{\varrho(x, y); y \in B\} \leq \inf\{\varrho(x, y); y \in A\} \leq \text{dist}(x, A).$$

Odtud plyne dokazované tvrzení.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor. **Diametr prostoru** P definujeme předpisem

$$\text{diam } P = \sup\{\varrho(x, y); x, y \in P\},$$

pokud je P neprázdný, a klademe $\text{diam } \emptyset = 0$. **Diametrem množiny** $A \subset P$ rozumíme diametr metrického prostoru (A, ϱ) .

Definice. Řekneme, že metrický prostor P je **omezený**, jestliže platí $\text{diam } P < \infty$. Řekneme, že podmnožina A prostoru P je **omezená**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) omezený.

Poznámka. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina P prázdná nebo jednobodová, pak platí $\text{diam } P = 0$. Jestliže má množina P alespoň dva různé body, pak z podmínky (a) v definici metriky plyne, že $\text{diam } P > 0$.

Příklad. Necht' P je množina. Dokažte, že diskrétní metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je omezený.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \leq 1$, a tedy $\text{diam } P \leq 1$. Tudíž je $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ omezený.

Příklad. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Necht' $A \subset B \subset P$. Potom $\text{diam } A \leq \text{diam } B$.
- (b) Necht' $A \subset P$ a navíc $P \neq \emptyset$. Pak je množina $A \subset P$ omezená právě tehdy, když existují $r > 0$ a $x \in P$ taková, že $A \subset B(x, r)$.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z definice suprema a diametru a z inkluze

$$\{\varrho(x, y); x, y \in A\} \subset \{\varrho(x, y); x, y \in B\}.$$

(b) \Rightarrow Množina P je neprázdná, takže můžeme zvolit $x \in P$. Pokud je A prázdná, pak zvolíme $r > 0$ libovolně. V případě, že A je neprázdná položíme $r = \text{dist}(x, A) + \text{diam } A + 1$. Díky předpokladu omezenosti a neprázdnoti A dostáváme $r \in (0, \infty)$. Zvolme $y \in A$. Nalezneme $z \in A$ takové, že $\varrho(x, z) < \text{dist}(x, A) + 1$. Potom platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \text{dist}(x, A) + 1 + \text{diam } A = r,$$

a tedy $y \in B(x, r)$. Tím jsme ověřili inkluzi $A \subset B(x, r)$.

\Leftarrow Zvolme $y, z \in A$. Potom podle trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\varrho(y, z) \leq \varrho(y, x) + \varrho(x, z) \leq r + r = 2r,$$

tedy $\text{diam } A \leq 2r < \infty$, take A je omezená.

8.2. Konvergence v metrických prostorech. Konvergencí posloupností reálných čísel jsme se podrobně zabývali v prvním semestru. Nyní pojem konvergence zobecníme pro posloupnosti prvků metrického prostoru. To nám umožní zkoumat konvergenci posloupností, jejichž členy jsou komplikovanější objekty než reálná čísla, například vektory, funkce, posloupnosti, operátory, matice, množiny a další.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků P **konverguje** k prvku $x \in P$ v prostoru (P, ϱ) , jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ v (P, ϱ) . **Konvergentní posloupností v** (P, ϱ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (P, ϱ) .

Poznámka. Necht' $P = \mathbb{R}$. Pak výše uvedený pojem konvergence splývá s pojmem konvergence posloupnosti reálných čísel.

Definice. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru (P, ϱ) . Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **podposloupnost** posloupnosti $\{x_n\}$, případně **vybranou posloupností**, z posloupnosti $\{x_n\}$.

Věta 8.2 (vlastnosti konvergence). *Necht' (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P .*

- (a) *Pak má posloupnost $\{x_n\}$ v (P, ϱ) nejvýše jednu limitu.*
- (b) *Jestliže existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ taková, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, potom je x limitou posloupnosti $\{x_n\}$.*
- (c) *Necht' $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $x \in P$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (P, ϱ) , pak x je také limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$.*

Důkaz. (a) Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in P$, které jsou limitami posloupnosti $\{x_n\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a $\varrho(y, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_1$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom platí

$$0 \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_2}) + \varrho(x_{n_2}, y) < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$.

(b) Pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$, takže prvek x je limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

(c) Protože posloupnost reálných čísel $\{\varrho(x_{n_k}, x)\}$ je vybraná z posloupnosti $\{\varrho(x_n, x)\}$, plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti reálných čísel, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_k}, x) = 0$, a tedy x je limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$. \square

Značení. Pokud je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní v metrickém prostoru (P, ϱ) , pak je podle Věty 8.2(a) její limita určena jednoznačně a budeme ji značit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nebo jen $\lim x_n$. Pokud $\lim x_n = x$, pak také píšeme $x_n \xrightarrow{\varrho} x$, $n \rightarrow \infty$, případně $x_n \xrightarrow{\varrho} x$ nebo pouze $x_n \rightarrow x$.

Příklad. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost prvků neprázdné množiny P . Dokažte, že $\{x_n\}$ je konvergentní v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \geq n_0$.

Řešení. \Rightarrow Necht' $x_n \rightarrow x$ pro nějaký prvek $x \in P$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < 1$. Z definice diskrétní metriky plyne, že pro každé takové n platí $x_n = x$.

\Leftarrow Tato implikace platí v každém metrickém prostoru, jak vyplývá z Věty 8.2(b).

V následujícím příkladu ukážeme, že konvergence ve vícerozměrném eukleidovském prostoru splývá s konvergencí „po složkách“. Souřadnice prvku $z \in \mathbb{R}^n$ budeme v následujícím příkladu i později označovat z_1, z_2, \dots, z_n .

Příklad. Necht' $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z \mathbb{R}^n a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že potom platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = y$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = y_i$.

Řešení. \Rightarrow Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^m - y_i| \leq \varrho_2(x^m, y)$. Odtud plyne tvrzení.

\Leftarrow Předpokládejme, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = y_i$. Potom ze spojitosti odmocniny, věty o aritmetice limit a Heineovy věty dostáváme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho(x^m, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - y_i)^2} = 0,$$

a tedy $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = y$.

Příklad. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(59) \quad \varrho_1(x, y) \leq \sqrt{n} \varrho_2(x, y) \leq n \varrho_\infty(x, y) \leq n \varrho_1(x, y).$$

Řešení. Z Cauchyovy–Schwarzovy–Buňakovského nerovnosti odvodíme, že

$$\begin{aligned} \varrho_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i - y_i| \\ &\leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)} \\ &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{n} \varrho_2(x, y). \end{aligned}$$

Dále odhadneme shora výrazy $|x_i - y_i|$, $i = 1, \dots, n$, jejich maximem, a dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho_2(x, y) &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\})^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \sqrt{n} \varrho_\infty(x, y). \end{aligned}$$

Nerovnost $\varrho_\infty(x, y) \leq \varrho_1(x, y)$ zřejmě platí. Dokazované tvrzení pak plyne z právě odvozených nerovností.

Příklad. Necht' $n \in \mathbb{N}$, $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ je posloupnost prvků z \mathbb{R}^n a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že následující tři výroky jsou ekvivalentní.

- (i) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$.
- (ii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$.
- (iii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$.

Řešení. (i) \Rightarrow (ii) Předpokládejme, že $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$. Potom $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_1(x^m, y) = 0$. Z (59) plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \leq \sqrt{n} \varrho_1(x^m, y)$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \geq 0$, vyplývá z věty o dvou strážnících, že také $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_2(x^m, y) = 0$, a tedy platí (ii).

(ii) \Rightarrow (iii) Předpokládejme nyní, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$. Pak opět z (59) dostaneme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_\infty(x^m, y) \leq \sqrt{n} \varrho_2(x^m, y)$, a tedy $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_\infty(x^m, y) = 0$. Tím je dokázáno tvrzení (iii).

(iii) \Rightarrow (i) Konečně předpokládáme-li, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$, pak tvrzení (i) vyplývá obdobným způsobem jako v předcházejících případech z nerovnosti $\varrho_1(x^m, y) \leq n \varrho_\infty(x^m, y)$ platné pro každé $m \in \mathbb{N}$.

konec 18. přednášky (22.4.2025)

8.3. Topologické pojmy v metrických prostorech. Termíny **topologie** a **topologický** budou vysvětleny v závěru příštího oddílu. Nejprve zavedeme dva důležité typy podmnožin metrických prostorů (uzavřené a otevřené množiny), tři množinové operace v metrických prostorech (vnitřek, hranice a uzávěr) a budeme zkoumat jejich vlastnosti. Užitečnost těchto pojmů se projeví v dalších oddílech a kapitolách.

Uzavřené a otevřené množiny.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Řekneme, že množina M je **uzavřená** v (P, ϱ) , jestliže pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny M je limita této posloupnosti prvkem M .

Příklad. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- (a) Dokažte, že $[a, b]$ je uzavřená množina v \mathbb{R} .
- (b) Dokažte, že $(a, b]$ není uzavřená množina v \mathbb{R} .

Řešení. (a) Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost prvků intervalu $[a, b]$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Potom platí $H(\{x_n\}) = \{x\}$, a tedy $x \in [a, b]$. Tedy $[a, b]$ je uzavřená množina.

(b) Položme $x_n = a + \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{x_n\}$ posloupnost prvků intervalu $(a, b]$ splňující $x_n \rightarrow a$. Protože $a \notin (a, b]$, plyne odtud, že $(a, b]$ není uzavřená množina.

Příklad. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$ je konečná množina. Dokažte, že M je uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Předpokládejme, že $x \notin M$. Položme $d = \min\{\varrho(x, y); y \in M\}$. Protože M je konečná, platí $d > 0$. Dále zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_n, x) \geq d$. To je ale spor s tím, že $x_n \rightarrow x$. Odtud plyne, že $x \in M$, a tedy je množina M uzavřená.

Jiné řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Množina M je konečná, a proto existuje $z \in M$ takové, že množina $\{n \in \mathbb{N}; x_n = z\}$ je nekonečná. Existuje tedy vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ taková, že $x_{n_k} = z$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom díky Větě 8.2(b) máme $\lim x_{n_k} = z$ a podle Věty 8.2(c) máme $\lim x_{n_k} = x$. Z Věty 8.2(a) pak plyne $x = z$, a tedy $x \in M$.

Příklad. Dokažte, že v diskretním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $M \subset P$, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M , $x \in P$ a platí $x_n \rightarrow x$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $y \in P$ taková, že $x_n = y$ pro každé $n \geq n_0$. Odtud plyne $y \in M$. Z Věty 8.2(a) plyne $x_n \rightarrow y$, a tedy z Věty 8.2(b) vyplývá $x = y$. Tedy $x \in M$, takže M je uzavřená.

Věta 8.3 (vlastnosti uzavřených množin). *Necht' (P, ϱ) je metrický prostor.*

- (a) *Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené množiny v (P, ϱ) .*
- (b) *Necht' \mathcal{F} je neprázdný systém uzavřených množin. Potom je množina $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená v (P, ϱ) .*
- (c) *Necht' $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny F_1, \dots, F_m jsou uzavřené. Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená v (P, ϱ) .*

Důkaz. (a) Prázdná množina neobsahuje žádnou posloupnost, takže implikace v definici uzavřené množiny je splněna. Uzavřenost množiny P je zřejmá.

(b) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcap \mathcal{F}$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Necht' $F \in \mathcal{F}$. Potom je $\{x_n\}$ posloupnost prvků F . Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Protože F byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Tedy $\bigcap \mathcal{F}$ je uzavřená množina.

(c) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcup_{i=1}^m F_i$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Protože množin F_1, \dots, F_m je konečně mnoho, nalezneme $j \in \{1, \dots, m\}$ takové, že množina $\{n \in \mathbb{N}; x_n \in F_j\}$ je nekonečná. Existuje tedy podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$, jejíž prvky jsou v F_j . Podle Věty 8.2(c) platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Protože F_j je uzavřená

množina, platí $x \in F_j$, a tedy tím spíše $x \in \bigcup_{i=1}^m F_i$. Odtud plyne, že $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina. \square

Poznámka. V tvrzení (c) Věty 8.3 je důležité, že systém množin, které sjednocujeme, je konečný. Bez tohoto předpokladu obdobné tvrzení neplatí. Uvažujme množiny $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$. Každá z množin F_n je uzavřená, ale množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ není uzavřená.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem** množiny M , jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M a označujeme symbolem $\text{Int } M$ podle latinského slova interior (vnitřek).

Řekneme, že množina M je **otevřená** v (P, ϱ) , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} je každý otevřený interval otevřená množina.

Řešení. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $x \in (a, b)$. Položme $r = \min\{x - a, b - x, 1\}$, potom zřejmě platí $B(x, r) = (x - r, x + r) \subset (a, b)$, a tedy x je vnitřním bodem (a, b) . Odtud plyne, že (a, b) je otevřená množina.

Příklad. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $r_0 > 0$. Dokažte, že potom je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina.

Řešení. Zvolme $x \in B(x_0, r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x_0, x)$. Potom $r > 0$. Pro každé $y \in B(x, r)$ navíc platí

$$\varrho(x_0, y) \leq \varrho(x_0, x) + \varrho(x, y) < \varrho(x_0, x) + r = r_0.$$

Tedy $y \in B(x_0, r_0)$. Odtud plyne $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$. Každý bod množiny $B(x_0, r_0)$ je tedy jejím vnitřním bodem, a proto je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina.

Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} není interval $(0, 1]$ otevřenou množinou a že platí $\text{Int}(0, 1] = (0, 1)$.

Řešení. Necht' $r > 0$. Potom $B(1, r) = (1 - r, 1 + r) \not\subset (0, 1]$, takže bod $x = 1$ není vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Interval $(0, 1]$ tedy není otevřenou množinou. Každý bod $x \in (0, 1)$ je vnitřním bodem intervalu $(0, 1)$, a tedy i vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Odtud plyne, že $\text{Int}(0, 1] = (0, 1)$.

Věta 8.4 (vlastnosti otevřených množin). *Necht' (P, ϱ) je metrický prostor.*

- (a) *Prázdná množina a P jsou otevřené množiny v (P, ϱ) .*
- (b) *Necht' \mathcal{G} je systém otevřených množin v (P, ϱ) . Potom je množina $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená v (P, ϱ) .*
- (c) *Necht' $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny G_1, \dots, G_m jsou otevřené v (P, ϱ) . Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená v (P, ϱ) .*

Důkaz. (a) Tvrzení plyne bezprostředně z definice otevřené množiny.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Nalezneme $G \in \mathcal{G}$ takovou, že $x \in G$. Protože G je otevřená množina, nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Odtud plyne, že $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

(c) Necht' $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je množina G_i otevřená, tedy existuje $r_i > 0$ takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i; i \in \{1, \dots, m\}\}$.

$\{1, \dots, m\}$. Potom zřejmě platí $B(x, r) \subset B(x, r_i)$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, a tedy $B(x, r) \subset G_i$, takže $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená. \square

Poznámka. V tvrzení Věty 8.4(c) je důležité, že počet množin, které pronikáme, je konečný. Pro nekonečný systém otevřených množin obdobné tvrzení neplatí, tj. průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřenou množinou. Příkladem je prostor \mathbb{R} , kde pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená, ale $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1]$, což není otevřená množina.

Věta 8.5 (vztah otevřených a uzavřených množin). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom množina M je otevřená právě tehdy, když $P \setminus M$ je uzavřená.*

Důkaz. \Rightarrow Nechť M je otevřená množina, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P \setminus M$, $x \in P$ a platí $x_n \rightarrow x$. Předpokládejme, že $x \in M$. Potom díky otevřenosti M existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x_{n_0}, x) < r$. Potom $x_{n_0} \in (P \setminus M) \cap B(x, r)$, což je spor. Tedy $x \notin M$. To znamená, že $x \in P \setminus M$, a tedy $P \setminus M$ je uzavřená množina.

\Leftarrow Předpokládejme, že M není otevřená množina. Pak existuje $x \in M$ takové, že pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Speciálně pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze nalézt $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M)$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak leží celá v množině $P \setminus M$ a zřejmě splňuje $x_n \rightarrow x$. Protože $x \notin P \setminus M$, plyne odtud, že $P \setminus M$ není uzavřená. \square

Příklad. Dokažte, že v diskretním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina otevřená.

Řešení. Zvolme $M \subset P$. Potom je $P \setminus M$ uzavřená v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. Podle Věty 8.5 je tedy množina M otevřená v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$.

Věta 8.6 (charakterizace vnitřku). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\text{Int } M$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v M .*

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in \text{Int } M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Dokážeme, že $B(x, r) \subset \text{Int } M$. Zvolme $y \in B(x, r)$. Označme $s = r - \varrho(x, y)$. Potom $s > 0$. Dále platí $B(y, s) \subset B(x, r)$, neboť pro každé $z \in B(y, s)$ máme

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \varrho(x, y) + s = r.$$

Tedy $B(y, s) \subset M$, takže $y \in \text{Int } M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset \text{Int } M$, a tedy $\text{Int } M$ je otevřená.

Nyní dokážeme, že $\text{Int } M$ je největší otevřená množina obsažená v M . Nechť $G \subset M$ je otevřená množina. Potom pro každé $x \in G$ nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Platí tedy také, že $B(x, r) \subset M$. To znamená, že x je vnitřním bodem množiny M , a tedy $x \in \text{Int } M$. Platí tudíž $G \subset \text{Int } M$. \square

Věta 8.7 (charakterizace vnitřku koulemi). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom*

$$\text{Int } M = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset M\}.$$

Důkaz. Označme

$$G = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset M\}.$$

Předpokládejme nejprve, že $x \in \text{Int } M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset G$, a tedy speciálně $x \in G$. Tím je dokázána inkluze $\text{Int } M \subset G$.

Nyní předpokládejme, že $y \in G$. Pak existují $x \in P$ a $r > 0$ taková, že $B(x, r) \subset M$ a $y \in B(x, r)$. Pak je množina $B(x, r)$ otevřená, a tedy podle Věty 8.6 $B(x, r) \subset \text{Int } M$. Tím je dokázána inkluze $G \subset \text{Int } M$, a tedy množinová rovnost $G = \text{Int } M$. \square

Věta 8.8 (otevřené podmnožiny \mathbb{R}). *Množina $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když G je spočetným disjunktním sjednocením otevřených intervalů.*

Důkaz. \Rightarrow Je-li G prázdná, pak tvrzení platí, neboť stačí uvažovat prázdný systém intervalů. Předpokládejme nyní, že $G \neq \emptyset$. Necht' $y \in G$. Potom definujeme prvky $a_y, b_y \in \mathbb{R}^*$ předpisem

$$a_y = \inf\{x \in \mathbb{R}; [x, y] \subset G\}, \quad b_y = \sup\{z \in \mathbb{R}; [y, z] \subset G\}.$$

Dokážeme, že $a_y, b_y \notin G$. Předpokládejme pro spor, že $a_y \in G$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(a_y, r) \subset G$, tedy $(a_y - r, a_y + r) \subset G$. Pro libovolné $s \in (0, r)$ pak platí $[a_y - s, y] \subset G$, to je ale spor s definicí a_y . Odtud vyplývá, že $a_y \notin G$. Obdobně lze dokázat, že $b_y \notin G$. Povšimněme si, že $a_y < y < b_y$.

Dále dokážeme, že $(a_y, b_y) \subset G$. Předpokládejme, že $z \in (a_y, b_y)$. Potom buď $z \in (a_y, y)$ nebo $z \in [y, b_y)$. V prvním případě existuje podle definice a_y prvek $x \in (a_y, z)$ takový, že $[x, y] \subset G$. Odtud plyne $z \in G$. Ve druhém případě lze odvodit platnost $z \in G$ obdobně.

Položme $\mathcal{J} = \{(a_y, b_y); y \in G\}$. Potom platí $\bigcup \mathcal{J} \subset G$. Opačná inkluze $G \subset \bigcup \mathcal{J}$ je zřejmá, neboť pro každé $y \in G$ platí $y \in (a_y, b_y) \in \mathcal{J}$. Tedy $G = \bigcup \mathcal{J}$.

Necht' $y, z \in G$. Dokážeme, že potom buď $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$ nebo $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Předpokládejme, že $(a_y, b_y) \neq (a_z, b_z)$. Jestliže $a_y = a_z$, potom $b_y \neq b_z$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_y > b_z$. Potom ale $b_z \in (a_y, b_y)$, a tedy $b_z \in G$, což je spor. Jestliže $a_y \neq a_z$, potom bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_y < a_z$. Protože $a_z \notin G$, platí $a_z \notin (a_y, b_y)$. Takže $b_y \leq a_z$, a tedy $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Systém \mathcal{J} je tedy disjunktí. Systém \mathcal{J} je tedy spočetný.

\Leftarrow Tato implikace plyne z Věty 8.4(b). □

Hranice a uzávěr množiny. Pojem hranice geometrického objektu v rovině či prostoru jsme zvyklí běžně používat intuitivním způsobem. V následující definici zavedeme tento pojem přesně v libovolném metrickém prostoru.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M , jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme ji $H(M)$.

Poznámka. Hraniční bod množiny v metrickém prostoru může a nemusí být prvkem této množiny. Přímo z definice vyplývá, že hranice libovolné množiny M v metrickém prostoru (P, ϱ) je rovna hranici množiny $P \setminus M$.

Příklad. Necht' P je množina a $M \subset P$. Dokažte, že v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ platí $H(M) = \emptyset$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in P$. Potom pro $r \in (0, 1]$ platí $B(x, r) = \{x\}$. Jestliže $x \in M$, pak $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Je-li naopak $x \in P \setminus M$, pak $B(x, r) \cap M = \emptyset$. V obou případech x není hraničním bodem M . Vzhledem k tomu, že x bylo zvoleno libovolně, je $H(M) = \emptyset$.

Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} je hranicí intervalu $(0, 1)$ množina $\{0, 1\}$.

Řešení. Označme $M = (0, 1)$. Necht' $r > 0$. Potom $B(0, r) = (-r, r)$, a tedy

$$\begin{aligned} B(0, r) \cap M &\supset B(0, \min\{r, 1\}) \cap M = (0, r) \neq \emptyset && \text{a} \\ B(0, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) &\supset B(0, \min\{r, 1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = (-r, 0] \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $0 \in H(M)$. Podobně lze dokázat, že $1 \in H(M)$.

Je-li $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap M = \emptyset$, a tedy $x \notin H(M)$. Je-li $x \in (0, 1)$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = \emptyset$, a tedy opět $x \notin H(M)$. Odtud již vyplývá platnost dokazovaného tvrzení.

Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} platí $H(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ a $H(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Řešení. Necht' $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Nalezneme $y \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{R}$ splňující $y \in B(x, r) \cap \mathbb{Q}$ a $z \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Odtud plyne, že $x \in H(\mathbb{Q})$ a také $x \in H(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Definice. Necht' (P, ρ) je metrický prostor a $M \subset P$. Označme $\overline{M} = M \cup H(M)$. Potom množinu \overline{M} nazýváme **uzávěrem** množiny M v prostoru (P, ρ) .

Poznámka. Necht' (P, ρ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom zřejmě platí $M \subset \overline{M}$.

Věta 8.9 (charakterisace uzavřené množiny). *Necht' (P, ρ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je uzavřená právě tehdy, když $H(M) \subset M$, neboli $M = \overline{M}$.*

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme, že M je uzavřená množina a $x \in H(M)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$. Zřejmě platí $x_n \rightarrow x$. Z uzavřenosti M pak plyne, že $x \in M$.

\Leftarrow Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$, kde $x \in P$. Jestliže $x \in H(M)$, potom dle předpokladu platí $x \in M$. Předpokládejme, že $x \notin H(M)$. Potom z definice hraničního bodu vyplývá, že existuje $r > 0$ takové, že buď $B(x, r) \cap M = \emptyset$ nebo $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. První možnost nemůže nastat, protože $x_n \rightarrow x$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in M$. Tudíž platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Speciálně tedy $x \in M$. Odtud plyne, že M je uzavřená. Tím je tvrzení dokázáno. \square

konec 19. přednášky (25.4.2025)

Příklad. Dokažte, že platí $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

Řešení. Víme, že $H((0, 1)) = \{0, 1\}$. Odtud plyne, že $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

Příklad. Dokažte, že množina \mathbb{Q} není otevřená ani uzavřená v \mathbb{R} a platí $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$ a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Řešení. Víme, že $H(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, takže $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}}$, a tedy množina \mathbb{Q} není uzavřená v \mathbb{R} . Necht' $x \in \mathbb{Q}$ a $r > 0$. Potom nalezneme $y \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Tedy $B(x, r)$ není podmnožinou \mathbb{Q} , takže x není vnitřním bodem množiny \mathbb{Q} . Žádný bod \mathbb{Q} tedy není vnitřním bodem množiny \mathbb{Q} , a tedy \mathbb{Q} není otevřená v \mathbb{R} a $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$.

Věta 8.10 (vlastnosti uzávěru). *Necht' (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí:*

- (a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ a $\overline{P} = P$,
- (b) jestliže $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$,
- (c) $\overline{A} = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}$,
- (d) množina \overline{A} je uzavřená,
- (e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- (f) $\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}$,
- (g) \overline{A} je nejmenší (vzhledem k inkluzi) uzavřená množina obsahující A .

Důkaz. (a) Zřejmě platí $H(\emptyset) = \emptyset$ a $H(P) = \emptyset$. Tvrzení pak okamžitě plynou z definice uzávěru.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bar{A}$. Pokud $x \in B$, pak $x \in \bar{B}$. Jestliže $x \in \bar{A} \setminus B$, potom speciálně $x \in \bar{A} \setminus A$, a tedy $x \in H(A)$. Zvolme $r > 0$. Potom $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$, neboť $A \subset B$. Z toho, že $x \notin B$, dále zřejmě plyne, že $B(x, r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset$. Tedy $x \in H(B)$. Protože $H(B) \subset \bar{B}$, dostáváme $x \in \bar{B}$.

(c) Označme

$$M = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}.$$

Předpokládejme, že $y \in P \setminus M$. Potom $\text{dist}(y, A) > 0$. Položme $r = \frac{1}{4} \text{dist}(y, A)$. Pokud $z \in B(x, r)$ a $w \in A$, potom podle trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\varrho(z, w) \geq \varrho(y, w) - \varrho(x, z) \geq \text{dist}(y, A) - r = \frac{3}{4} \text{dist}(x, A) > r.$$

Platí tedy $B(y, r) \cap A = \emptyset$. Necht' $a \in A$ a $z \in B(y, \frac{r}{2})$. Potom

$$\varrho(z, a) \geq \varrho(y, a) - \varrho(z, y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Tedy $B(y, \frac{r}{2}) \subset P \setminus M$, takže $P \setminus M$ je otevřená množina. Podle Věty 8.5 je množina M uzavřená. Zřejmě platí $A \subset M$, a tedy podle (b) také $\bar{A} \subset \bar{M}$. Protože M je uzavřená, máme podle Věty 8.9 $\bar{M} = M$, a tedy $\bar{A} \subset M$.

Dokážeme nyní opačnou inkluzi. Necht' $x \in P \setminus \bar{A}$. Pak $x \notin \partial A$. Poněvadž $x \in P \setminus A$, musí podle definice hranice existovat $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Pak platí $\text{dist}(x, A) \geq r > 0$, a tedy $x \notin M$. Tím je inkluze $M \subset \bar{A}$ dokázána.

(d) Z tvrzení (c) víme, že $\bar{A} = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}$, přičemž v důkazu tvrzení (c) jsme ověřili, že množina na pravé straně rovnosti je uzavřená.

(e) Protože $A \subset A \cup B$, plyne z (b), že $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. Obdobně dostaneme $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, a tedy $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Víme, že $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$, a tedy podle (b) platí $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A \cup B}}$. Podle (d) a Věty 8.3(c) je $\overline{A \cup B}$ uzavřená množina, tedy $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A \cup B}$. Odtud plyne, že $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A \cup B}$.

(f) Pokud $A = \emptyset$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$ a $x, y \in \bar{A}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (c) existují $x', y' \in A$ taková, že $\varrho(x, x') < \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \varepsilon$. Potom

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 2\varepsilon + \text{diam } A.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\text{diam } \bar{A} \leq \text{diam } A$. Opačná nerovnost plyne z toho, že $A \subset \bar{A}$.

(g) Předpokládejme, že F je uzavřená množina splňující $A \subset F$. Podle tvrzení (b) potom platí $\bar{A} \subset \bar{F}$. Protože F je uzavřená množina, platí $\bar{F} = F$, takže $\bar{A} \subset F$. Podle tvrzení (d) je množina \bar{A} uzavřená a navíc zřejmě platí $A \subset \bar{A}$. \square

Hromadné body.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem množiny** M , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$M \cap (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M' . Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M , jestliže $a \in M \setminus M'$.

Příklad. Uvažujte metrický prostor \mathbb{R} a množinu $M = (0, 1)$. Dokažte, že $M' = [0, 1]$.

Řešení. Zvolme $x \in [0, 1]$ a $r > 0$. Pak není těžké si rozmyslet, že platí

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset.$$

Odtud plyne inkluze $[0, 1] \subset M'$.

Nyní zvolme $x \notin [0, 1]$. Položme $r = \min\{|x|, |x - 1|\}$. Potom $r > 0$ a zřejmě platí $B(x, r) \cap M = \emptyset$. Odtud plyne inkluze $M' \subset [0, 1]$, a tedy celkem $M' = [0, 1]$.

Příklad. Necht' $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = \{0\}$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Položme $y = \frac{1}{n}$. Potom $y \neq 0$ a $y \in B(0, \varepsilon) \cap M$. Tedy $0 \in M'$.

Nyní zvolme $x \neq 0$. Položme

$$\varepsilon = \begin{cases} |x|, & \text{je-li } x \in (-\infty, 0), \\ \min\{|x - \frac{1}{n}|, |x - \frac{1}{n+1}|\}, & \text{je-li } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{n(n+1)}, & \text{je-li } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ |x - 1|, & \text{je-li } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Ve všech případech potom platí $\varepsilon > 0$ a $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$. Tedy $x \notin M'$. Odtud plyne, že $M' = \{0\}$.

Příklad. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a $M = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = H(\{a_n\})$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in H(\{a_n\})$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$. Z toho, že posloupnost $\{a_n\}$ je prostá, plyne, že existuje $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, takové, že $a_{n_k} \neq x$. Pak $a_{n_k} \in (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M$. Odtud plyne $x \in M'$. Tím je dokázaná inkluze $H(\{a_n\}) \subset M'$.

Nyní předpokládejme, že $x \in M'$. Budeme konstruovat vybranou posloupnost s limitou rovnou x . Podle definice hromadného bodu pro každé $\varepsilon > 0$ platí $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$. Lze tedy nalézt $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(x, 1) \setminus \{x\}$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ již máme určena přirozená čísla $n_1 < \dots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \setminus \{x\}$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$. Množina $A = \{a_j; j \leq n_k\}$ je konečná, a proto existuje $\varepsilon \in (0, \frac{1}{k+1})$ takové, že $A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pak lze nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_{k+1}} \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$. Díky volbě ε máme $n_{k+1} > n_k$. Podle principu matematické indukce dostaneme touto konstrukcí rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, pro kterou navíc zřejmě platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Odtud plyne, že $x \in H(\{a_n\})$, a tedy $M' \subset H(\{a_n\})$. Tím je rovnost $M' = H(\{a_n\})$ dokázána.

Příklad. Necht' $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že $P' = \emptyset$.

Řešení. Pro každé $x \in P$ zřejmě platí $B(x, 1) = \{x\}$, a tedy $B(x, 1) \setminus \{x\} = \emptyset$. Tudíž $x \notin P'$. Protože x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $P' = \emptyset$.

Spojitosť zobrazení.

Definice. Necht' (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že zobrazení f je

- (a) **spojité v bodě a vzhledem k množině M** , jestliže $a \in M$ a platí
- $$(60) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon),$$
- (b) **spojité v bodě a** , jestliže je spojitě v a vzhledem k P ,
- (c) **spojité na množině M** , jestliže je spojitě v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M ,
- (d) **spojité**, jestliže je spojitě na P .

Poznámka. (a) Pokud je zobrazení f spojitě v bodě a vzhledem k M , pak existuje $\eta > 0$ takové, že $B(a, \eta) \cap M \subset \mathcal{D}(f)$.

(b) Výrok (60) můžeme ekvivalentně zapsat takto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap M: f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

(c) Spojitost zobrazení f z P do Q závisí nejenom na tom, jak je f definováno, ale také na tom, jaké metriky uvažujeme na množinách P a Q .

(d) Je-li $P = Q = M = \mathbb{R}$, pak výše uvedená definice spojitosti souhlasí s definicí spojitosti reálné funkce jedné reálné proměnné.

Příklad. Necht' $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, a $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem $\pi_i(x) = x_i$. Dokažte, že π_i je spojitě.

Řešení. Zvolme $a \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$|\pi_i(x) - \pi_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} = \varrho_2(x, a) < \delta = \varepsilon,$$

a tedy π_i je spojitě v a . Bod $a \in \mathbb{R}^n$ byl zvolen libovolně, a proto je π_i spojitě na \mathbb{R}^n .

Příklad. Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Dokažte, že $x \mapsto \|x\|$ je spojitě zobrazení z X do \mathbb{R} .

Řešení. Podle vlastností z definice normy platí pro každé $x, y \in X$

$$(61) \quad \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{a} \quad \|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

Díky (61) platí pro každé $x, y \in X$

$$(62) \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Nyní zvolme $x_0 \in X$. Ověříme definici spojitosti v bodě x_0 . Pro $\varepsilon > 0$ položme $\delta = \varepsilon$. Pro každé $x \in B(x_0, \delta)$ platí podle (62)

$$\left| \|x_0\| - \|x\| \right| \leq \|x_0 - x\| < \delta = \varepsilon.$$

Tím je důkaz proveden.

Spojitost zobrazení mezi metrickými prostory závisí zásadním způsobem na zvolených metrikách. Následující příklad tento fakt ilustruje.

Příklad. Necht' $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Dokažte, že f je spojitě.

Řešení. Předpokládejme, že $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = 1$. Potom platí $B_{\varrho_{\text{diskr}}}(a, \delta) = \{a\}$. Odtud plyne, že pro každé $x \in B_{\varrho_{\text{diskr}}}(a, \delta)$ platí $f(x) = f(a)$, a tedy $f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. To znamená, že f je spojitě v a . Poněvadž a bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že f je spojitě zobrazení.

Věta 8.11 (charakterizace spojitosti). *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní.*

- (i) *Zobrazení f je spojitě na P .*
- (ii) *Pro každou množinu G otevřenou v Q je množina $f^{-1}(G)$ otevřená v P .*
- (iii) *Pro každou množinu F uzavřenou v Q je množina $f^{-1}(F)$ uzavřená v P .*

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Předpokládejme, že G je otevřená množina v Q a $x \in f^{-1}(G)$. Potom $f(x) \in G$. Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subset G$. Díky spojitosti zobrazení f nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f(B_\rho(x, \delta)) \subset B_\sigma(f(x), \varepsilon)$. To znamená, že

$$B_\rho(x, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

Bod x je tedy vnitřním bodem množiny $f^{-1}(G)$. Odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina v P .

(ii) \Rightarrow (i) Nechť $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Množina $f^{-1}(B_\sigma(f(a), \varepsilon))$ obsahuje prvek a a podle předpokladu je otevřená. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že $B_\rho(a, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(a), \varepsilon))$, neboli $f(B_\rho(a, \delta)) \subset B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. Odtud plyne, že f je spojitě v a . Bod a byl zvolen libovolně v P , a proto je f spojitě.

(ii) \Rightarrow (iii) Nechť F je uzavřená množina v Q . Potom $Q \setminus F$ je otevřená množina v Q , a tedy, podle (ii), je množina $f^{-1}(Q \setminus F)$ otevřená v P . Platí

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus F)) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(Q \setminus F) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus F).$$

Množina $f^{-1}(F)$ je tedy uzavřená v P .

(iii) \Rightarrow (ii) Nechť G je otevřená množina v Q . Potom $Q \setminus G$ je uzavřená množina v Q , a tedy, podle (iii), je množina $f^{-1}(Q \setminus G)$ uzavřená v P . Množina $f^{-1}(G) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus G)$ je tudíž otevřená v P . \square

Limita zobrazení.

Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Řekneme, že zobrazení f **má v bodě a limitu b vzhledem k množině A** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A: (0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme, že f **má v bodě a limitu b** .

Příklad (jednoznačnost limity). Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Dokažte, že f má v bodě a nejvýše jednu limitu vzhledem k množině A .

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $b_1, b_2 \in Q$, $b_1 \neq b_2$, jsou limitami zobrazení f vzhledem k množině A . Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}\sigma(b_1, b_2)$. Potom je $\varepsilon > 0$ a existuje k němu $\delta_1 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A: (0 < \rho(x, a) < \delta_1 \Rightarrow \sigma(f(x), b_1) < \varepsilon).$$

Dále existuje $\delta_2 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A: (0 < \rho(x, a) < \delta_2 \Rightarrow \sigma(f(x), b_2) < \varepsilon).$$

Díky tomu, že $a \in A'$, nalezneme $x \in A$ takové, že $0 < \rho(x, a) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom platí

$$\sigma(b_1, b_2) \leq \sigma(b_1, f(x)) + \sigma(f(x), b_2) < 2\varepsilon < \sigma(b_1, b_2),$$

což je spor.

Poznámka. Limitu vzhledem k množině A počítáme pouze v bodech, které jsou hromadnými body množiny A . Pokud totiž a není hromadným bodem A , pak v jistém okolí bodu a již kromě bodu a nejsou žádné body z A a proměnná funkce f se nemůže blížit k bodu a v rámci množiny $A \setminus \{a\}$. V takovém bodě a by sice definice limity formálně dávala smysl, ale nebyla by určena jednoznačně.

Značení. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$ a $a \in A'$. Pokud existuje limita zobrazení f v bodě a vzhledem k množině A , označujeme tuto limitu symbolem $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$. Je-li $A = P$, píšeme jen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

konec 20. přednášky (29.4.2025)

Věta 8.12 (limita složeného zobrazení). *Necht (X, ϱ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z . Necht $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí*

- (a) *existuje $\lambda > 0$ takové, že $f(A \cap (B(a, \lambda) \setminus \{a\})) \subset B$,*
- (b) *$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b$,*
- (c) *$\lim_{y \rightarrow b, y \in B} g(y) = c$.*

Necht je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- (P) *existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$,*
- (S) *zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k množině B .*

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

Důkaz. Varianta s podmínkou (P). Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (c) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$(63) \quad \forall y \in B: (0 < \sigma(y, b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y), c) < \varepsilon).$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$(64) \quad \forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \psi).$$

Vezmeme λ z podmínky (a) a η z podmínky (P). Položíme $\delta = \min\{\lambda, \eta, \zeta\}$. Potom podle (a), (P) a (64) platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge 0 < \sigma(f(x), b) < \psi)).$$

Odtud a díky (63) obdržíme

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)), c) < \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť jsme k ε našli příslušné δ .

Varianta s podmínkou (S). Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (S) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$(65) \quad \forall y \in B: (\sigma(y, b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y), g(b)) < \varepsilon).$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$(66) \quad \forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \psi).$$

Vezměme λ z podmínky (a) a položíme $\delta = \min\{\lambda, \zeta\}$. Potom podle (a) a (66) platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge \sigma(f(x), b) < \psi)).$$

Odtud a díky (65) obdržíme

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)), g(b)) < \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť $c = g(b)$ podle (a) a (S), a tak jsme k ε našli příslušné δ . \square

Definice. Necht' (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je zobrazení. Řekneme, že f je **lipschitzovské**, jestliže existuje $K > 0$ takové, že pro každá $x, y \in P$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq K \varrho(x, y).$$

Řekneme, že f je **stejněměrně spojitě**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in P, \varrho(x, y) \leq \delta : \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Věta 8.13 (lipschitzovské a stejněměrně spojitě zobrazení). *Necht' (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je lipschitzovské zobrazení. Potom je f stejněměrně spojitě.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. \square

Poznámka. Ne každé stejněměrně spojitě zobrazení je lipschitzovské. Příkladem je funkce $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0, 1]$. Ta je spojitá, a tedy stejněměrně spojitá na $[0, 1]$, není ale lipschitzovská, protože pro každé $K > 0$ nalezneme dvojici $x = 0$ a $y \in (0, \min\{K^{-2}, 1\})$, pro kterou platí

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} > K(y - x).$$

Tím je ověřena platnost negace výroku definujícího lipschitzovskost funkce f .

9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH I

9.1. Parciální derivace a totální diferenciál.

Poznámka (\mathbb{R}^n jako vektorový prostor). Připomeňme, že množina \mathbb{R}^n , kde $n \in \mathbb{N}$, je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel, neboť jde o kartézský součin o n faktorech:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}.$$

Je-li $x \in \mathbb{R}^n$, potom jeho i -tou souřadnici značíme x_i , a můžeme tedy psát $x = [x_1, \dots, x_n]$. Množina \mathbb{R}^n obsahuje některé významné prvky. Je to především **počátek**, to jest prvek, jehož všechny souřadnice jsou nulové. Značíme jej o . Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a definujme prvek $e^i \in \mathbb{R}^n$ takto:

$$e^i = [0, \dots, 0, \underset{\substack{i\text{-tá sou-} \\ \text{-řadnice}}}{1}, 0, \dots, 0].$$

I tyto prvky budou pro nás později důležité.

Prvky \mathbb{R}^n můžeme mezi sebou sčítat a můžeme je násobit reálným číslem. Je-li $x \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$\begin{aligned} x + y &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n], \\ \lambda \cdot x &= [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]. \end{aligned}$$

Trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde $+$ a \cdot jsou výše uvedené operace, tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} . Množina $B = \{e^i; i \in \{1, \dots, n\}\}$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^n , tj. jde o lineárně nezávislou množinu a každý prvek $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů z množiny B . Zde konkrétně máme $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$.

O množině \mathbb{R}^n s operacemi sčítání a násobení reálným číslem budeme mluvit jako o prostoru \mathbb{R}^n a o prvcích z \mathbb{R}^n jako o bodech tohoto prostoru. Někdy je ovšem užitečné pohlížet na

daný prvek x z \mathbb{R}^n jako na **vektor**, tj. orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku a koncovým v bodě x .

Použijeme-li v dalším textu symbol $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m$ a podobně, budou n, m, k vždy přirozená čísla.

Poznámka. V průběhu celé kapitoly budeme na \mathbb{R}^n uvažovat eukleidovskou normu

$$\|x\| = \|[x_1, \dots, x_n]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

a eukleidovskou metriku $\varrho_2(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Skalární součin prvků $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Skalární součin má následující vlastnosti

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}^n: \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$,
- (b) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n: \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x, y \in \mathbb{R}^n: \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
- (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ jsou **navzájem ortogonální (kolmé)**, jestliže platí $\langle x, y \rangle = 0$. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je **ortogonální (kolmý)** na množinu M , jestliže je ortogonální na každý vektor množiny M . Symbol M^\perp značí množinu těch vektorů, které jsou ortogonální na množinu M .

Poznámka (lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m). Řekneme, že zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

- (a) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n: L(u + v) = L(u) + L(v)$,
- (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall u \in \mathbb{R}^n: L(\alpha u) = \alpha L(u)$.

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m budeme značit symbolem $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ o m řádcích a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(x) = \mathbb{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Věta 9.1 (lipschitzovskost lineárního zobrazení). *Nechť $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární. Pak L je lipschitzovské.*

Důkaz. Nechť matice $\mathbb{A} = (a_{ji})_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, m}} \in M(m \times n)$ reprezentuje L . Pak máme z Cauchyovy–Schwarzovy–Buňakovského nerovnosti

$$\|L(x)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (L(x))_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}^2\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji}^2} \cdot \|x\|.$$

Odtud plyne, že L je lipschitzovské, a to s konstantou

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji}^2}.$$

□

Úmluva. V souladu s definicí \mathbb{R}^n budeme prvky $x \in \mathbb{R}^n$ chápat jako řádkové vektory. Pokud budeme ale pracovat s maticovou reprezentací lineárních zobrazení, tak budeme x uvažovat jako sloupcový vektor neboli matici typu $n \times 1$. Potom bude součin $\mathbb{A}x$ z předchozího paragrafu dobře definován.

Poznámka. Termínem **reálná funkce n proměnných** budeme rozumět funkci z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} .

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $a = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Chování f v blízkosti bodu a můžeme zkoumat následujícím způsobem. Zvolíme jednu souřadnici, například první, a budeme se dívat, jak se mění hodnoty funkce f , měníme-li pouze tuto souřadnici nezávisle proměnné funkce f a ostatní souřadnice zůstávají rovny příslušným souřadnicím bodu a . Velikost změny funkční hodnoty pak porovnáme se změnou velikosti první souřadnice, tj. zkoumáme výraz

$$\frac{f(x_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_1 - a_1},$$

který lze pomocí vektorového zápisu zapsat jako

$$\frac{f(a + (x_1 - a_1)e^1) - f(a)}{x_1 - a_1},$$

Při tomto přístupu je ale uvedený výraz funkcí jedné proměnné, totiž proměnné x_1 , a je tedy možné jej vyšetřovat pomocí nám známých metod. Tyto úvahy nás vedou k následující důležité definici.

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i -té proměnné** definujeme předpisem

$$(67) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}.$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i -té proměnné, tj. funkci z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

V některých případech se používá místo symbolu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ i značení $\partial_i f(a)$, $D_i f(a)$ a podobně.

Poznámka. Nechť f , a a i jsou jako v předchozí definici.

(a) Pokud jde o vztah (67), můžeme rozlišit následující možnosti:

$$\text{limita v (67)} \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} \end{cases} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty \\ -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Pokud parciální derivace podle i -té proměnné v bodě a existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{a + te^i; |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat usečku, která prochází bodem a .

Poznámka (derivace parciální funkce). Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Položíme-li

$$g(y) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

pak $g'(a_j)$ existuje, právě když existuje $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, neboť výpočet vede v obou případech na stejnou limitu. Pokud obě derivace existují, pak jsou si rovny.

Poznámka (aritmetika parciálních derivací). Z předchozího paragrafu plynou některá pravidla pro výpočet parciálních derivací, neboť lze použít větu o aritmetice derivací pro funkce jedné proměnné. Pro reálné funkce f a h z \mathbb{R}^n , bod $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ tak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f+h)}{\partial x_i}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial h}{\partial x_i}(a), \\ \frac{\partial(fh)}{\partial x_i}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h(a) + f(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(a), \end{aligned}$$

pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a)$ existují vlastní.

Úmluva. V dalším textu bude výrok „parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje **vlastní**.

Příklad. Pro funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$ spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Řešení. Podle výše uvedeného v každém bodě $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} 2x_1 x_2.$$

Poznámka. Necht $n, m \in \mathbb{N}$. Množinu všech reálných matic typu $n \times m$ budeme značit $M(n \times m)$. Tyto matice jednoznačně reprezentují lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m .

Necht f je reálná funkce n proměnných a $a \in \mathbb{R}^n$. Existují-li derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$, pak nám poskytují informaci o chování funkce f blízko bodu a na úsečkách, které jsou určeny pomocí vektorů e^1, \dots, e^n . O chování funkce f například na úsečce tvaru $\{a + t(e^1 + e^2); t \in (-\delta, \delta)\}$, kde $\delta > 0$, však žádnou informaci nemáme. Funkce f dokonce nemusí být definována v žádném bodě takové úsečky vyjma bodu a . Abychom mohli zkoumat chování funkce f v malých okolích bodu a a ne pouze na některých úsečkách, zavedeme v následující definici nový pojem, který nám to umožní.

Definice. Necht f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě a** , pokud platí

$$(68) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Poznámka. Necht f a a jsou jako v předchozí definici.

(a) Výrok (68) je ekvivalentní výroku

$$(69) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

(b) Z existence totálního diferenciálu v bodě a plyne, že funkce f je definována na nějakém okolí bodu a .

Poznámka (geometrický význam totálního diferenciálu). Předpokládejme, že f je reálná funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L . Definujme funkci $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $T(x) = f(a) + L(x-a)$. Podle (69) platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T(x)}{\|x-a\|} = 0.$$

Tento vztah – neformálně řečeno – ukazuje, že funkce T aproximuje velmi dobře funkci f v blízkosti bodu a . Rozdíl funkčních hodnot $f(x) - T(x)$ je ve srovnání se vzdáleností $\|x - a\|$ malý.

Grafem funkce T je afinní podprostor prostoru \mathbb{R}^{n+1} . V uvedené situaci jej nazýváme **tečnou rovinou**, pokud $n = 2$, nebo **tečnou nadrovinou**, pokud $n > 2$, ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Graf totálního diferenciálu je potom afinní (dokonce vektorový) podprostor \mathbb{R}^{n+1} , který obsahuje počátek prostoru \mathbb{R}^{n+1} a je rovnoběžný s tečnou (nad)rovinou.

Věta 9.2 (totální diferenciál a parciální derivace). *Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L . Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární, a proto existují reálná čísla A_1, \dots, A_n taková, že pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(h) = L(h_1, \dots, h_n) = A_1h_1 + \dots + A_nh_n.$$

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $\varphi: t \mapsto te^i$ je spojitě a $\varphi(t) \neq 0$ pro $t \neq 0$. Tedy

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + \varphi(t)) - f(a) - L(\varphi(t))}{\|\varphi(t)\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a) - A_it}{|t|}.$$

Odtud

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} - A_i \right| = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} = A_i.$$

Tím je důkaz dokončen. □

konec 21. přednášky (2.5.2025)

Poznámka. Z Věty 9.2 plyne, že existuje-li totální diferenciál, je určen jednoznačně, protože je reprezentován maticí $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$, která je určena jednoznačně. To nás opravňuje k zavedení následujícího značení. Existuje-li totální diferenciál funkce f v bodě a , pak jej značíme symbolem $f'(a)$. Hodnotu lineárního zobrazení $f'(a)$ v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ pak značíme $f'(a)(h)$.

Upozorníme, že v případě $n = 1$ zde, bohužel, vzniká kolize ve značení. Symbol $f'(a)$ pak totiž jednak označuje derivaci funkce f v bodě a , tedy reálné číslo, a jednak totální diferenciál funkce f v bodě a , tedy lineární zobrazení. Toto lineární zobrazení je však reprezentováno maticí 1×1 , jejímž jediným prvkem je právě hodnota derivace. Z kontextu však bude vždy zřejmé, který význam máme na mysli.

Věta 9.3 (totální diferenciál a spojitost). *Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $x \mapsto \|x - a\|$ a $h \mapsto f'(a)(h)$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{\|x - a\|} \cdot \|x - a\| + f(a) + f'(a)(x - a) \right) \\ &= 0 \cdot 0 + f(a) + 0 = f(a). \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v a . □

Poznámka. Z pouhé existence parciálních derivací v daném bodě ještě spojitost funkce v tomto bodě nevyplývá, jak ukazuje následující příklad. Definujme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(o) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(o) = 0$, ale f není v o spojitá. Tedy ani $f'(o)$ neexistuje. Uvědomme si, že v tomto případě lze definovat lineární zobrazení, které je reprezentováno maticí parciálních derivací, ale toto zobrazení není totálním diferenciálem funkce f v bodě o , protože nesplňuje vztah s limitou z definice totálního diferenciálu.

Pokud ale předpoklad ohledně existence parciálních derivací vhodně zesílíme, pak je možné existenci totálního diferenciálu odvodit. Tento výsledek je obsahem Věty 9.5, v jejímž důkazu využijeme následující pomocnou větu, která je vícedimenzionální variantou Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

Věta 9.4 (o cestičce v kostičce). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in I$. Nechť v každém bodě I existují všechny parciální derivace funkce f . Potom existují body $c^1, \dots, c^n \in I$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} p^0 &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = a, \\ p^1 &= (b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n), \\ p^2 &= (b_1, b_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n), \\ &\vdots \\ p^{n-1} &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, a_n), \\ p^n &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n) = b. \end{aligned}$$

Potom platí

$$(70) \quad f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(p^i) - f(p^{i-1})).$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ položíme

$$g_i(x) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Funkce g_i má v (α_i, β_i) vlastní derivaci rovnou

$$(71) \quad g'_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Pokud $a_i \neq b_i$, nalezneme podle Lagrangeovy věty bod z_i v intervalu s krajními body a_i a b_i takový, že

$$(72) \quad f(p^i) - f(p^{i-1}) = g_i(b_i) - g_i(a_i) = g'_i(z_i) \cdot (b_i - a_i).$$

V případě, že $a_i = b_i$, volme $z_i = a_i$. Pak (72) platí i v tomto případě. Položme

$$c^i = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, z_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Potom podle (71) a (72) platí $f(p^i) - f(p^{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(b_i - a_i)$. Odtud a z (70) dostáváme dokazovaný vztah. \square

Věta 9.5 (spojité parciální derivace a totální diferenciál). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě a . Pak má funkce f v bodě a totální diferenciál.*

Důkaz. Ukážeme, že lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

je totálním diferenciálem funkce f v bodě a .

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall x \in B(a, \tilde{\delta}): \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$ a označme

$$I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \dots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Potom platí $B(a, \delta) \subset I \subset B(a, \tilde{\delta})$. Zvolme $x \in B(a, \delta)$. Pak podle Věty 9.4 nalezneme body $c^1, \dots, c^n \in I$ takové, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a) - L(x - a)| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) (x_i - a_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| |x_i - a_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \\ &\leq \varepsilon \sqrt{n} \|x - a\|. \end{aligned}$$

Tedy pro $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ máme

$$\frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{\|x - a\|} \leq \sqrt{n}\varepsilon,$$

čímž je důkaz proveden. \square

V definici parciální derivace jsme pracovali s kanonickými vektory e^1, \dots, e^n . Stejný přístup použijeme i v následující definici, kde ale budeme uvažovat libovolný vektor z \mathbb{R}^n .

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě a podle vektoru v** rozumíme limitu

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

pokud existuje **vlastní**.

Poznámka. Jestliže je f funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, potom zřejmě platí $D_{e^i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Pak definujeme vektor $\nabla f(a)$ z \mathbb{R}^n předpisem

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

a nazýváme jej **gradient funkce f v bodě a** .

Poznámka. Nechť f a a jsou jako v předchozí definici. Chápeme-li $\nabla f(a)$ jako matici typu $1 \times n$, pak jde o reprezentující matici totálního diferenciálu $f'(a)$. Pokud se na $\nabla f(a)$ díváme jako na vektor, pak můžeme pomocí skalárního součinu psát $f'(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ pro každé $h \in \mathbb{R}^n$.

Souvislost totálního diferenciálu, derivace podle vektoru a gradientu zachycuje následující věta.

Věta 9.6 (derivace podle vektoru, totální diferenciál a gradient). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a, v \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(a)$. Potom platí:*

- (a) $f'(a)(v) = D_v f(a)$,
- (b) $\max\{D_v f(a); \|v\| = 1\} = \|\nabla f(a)\|$.

Důkaz. (a) Pokud $v = 0$, potom dokazovaná rovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $v \neq 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + tv) - f(a) - f'(a)(tv)}{\|tv\|} \cdot \frac{\|tv\|}{t} + f'(a)(v) \right). \end{aligned}$$

Funkce $t \mapsto \frac{\|tv\|}{t}$ je omezená na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a) - f'(a)(tv)}{t} = 0.$$

Odtud plyne $D_v f(a) = 0 + f'(a) = f'(a)(v)$.

(b) Z Cauchyovy–Schwartzovy–Buňakovského nerovnosti máme

$$(73) \quad D_v f(a) = f'(a)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\|.$$

Pokud $\nabla f(a) = o$, pak dokazovaná rovnost platí, neboť obě strany jsou rovny nule. Předpokládejme, že platí $\nabla f(a) \neq o$. Položme

$$v = \|\nabla f(a)\|^{-1} \cdot \nabla f(a).$$

Pak podle již dokázané části (a) platí $D_v f(a) = f'(a)(v)$ a můžeme psát

$$D_v f(a) = f'(a)(v) = \|\nabla f(a)\|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \|\nabla f(a)\|.$$

Odtud a z (73) již plyne (b). □

Poznámka. Pokud $\nabla f(a) \neq o$, pak se v (b) nabývá maxima právě pro $v = \|\nabla f(a)\|^{-1} \cdot \nabla f(a)$.

9.2. Derivace vektorových funkcí. Pojem totálního diferenciálu pro funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} je možné zobecnit i pro **vektorové funkce**, tj. funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . To je provedeno v následující definici.

Definice. Nechť F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , $a \in \mathbb{R}^n$ a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení F v bodě a** , pokud platí

$$(74) \quad \lim_{h \rightarrow o} \frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\|h\|} = o.$$

Poznámka. Ve vztahu (74) se vyskytuje dvakrát symbol o označující nulový vektor. V případě výrazu $h \rightarrow o$ jde o vektor z \mathbb{R}^n , ve druhém případě jde o vektor z \mathbb{R}^m . Vzhledem k tomu, že je z kontextu jasné, z kterých prostorů jsou uvedené vektory, používáme jeden symbol v obou případech, ačkoliv jde o rozdílné vektory, pokud $n \neq m$.

Vztah (74) je splněn, právě když platí

$$(75) \quad \lim_{h \rightarrow o} \frac{\|F(a+h) - F(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Ve výrazu (75) se dvakrát vyskytuje symbol normy. Podobně jako pro nulový vektor vyplývá z kontextu, že norma v čitateli je normou na prostoru \mathbb{R}^m a norma ve jmenovateli je normu na prostoru \mathbb{R}^n .

Poznámka. Zobrazení F z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci právě tehdy, když každá jeho složka, tedy každé zobrazení F_j z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $j \in \{1, \dots, m\}$, má v bodě a totální diferenciál.

Značení. (a) Má-li F v bodě a derivaci $L = (L_1, \dots, L_m)$, pak je L_j totálním diferenciálem F_j v bodě a pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$. Totální diferenciál je určen jednoznačně, pokud existuje, a tedy derivace zobrazení F v bodě a je určena jednoznačně, pokud existuje. Tato úvaha nás opravňuje označit lineární zobrazení, které je derivací funkce F v bodě a , symbolem $F'(a)$.

(b) Pokud v definici derivace vektorové funkce klademe $m = 1$, pak je vztah (74) ekvivalentní s (68). V tomto případě tedy znovu definujeme pojem totálního diferenciálu. V dalším textu již nebudeme termín totální diferenciál používat a dáme přednost termínu derivace.

konec 22. přednášky (6.5.2025)

Poznámka. (a) Nechť $a \in \mathbb{R}^n$ a $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazení, které je konstantní na jistém okolí bodu a . Pak $F'(a)$ je lineární zobrazení, které libovolnému vektoru $h \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje nulový vektor v prostoru \mathbb{R}^m . Stačí nalézt $\eta > 0$ a $b \in \mathbb{R}^m$ taková, že $F(x) = b$ pro každé $x \in B(a, \eta)$. Potom pro každé $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \eta$, platí

$$F(a + h) - F(a) - F'(a)(h) = b - b - o = o.$$

(b) Je-li $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, pak v každém bodě $a \in \mathbb{R}^n$ platí $L'(a) = L$, neboť pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(a + h) - L(a) - L(h)\| = \|o\| = 0.$$

Věta 9.7 (representace derivace). *Nechť F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , které má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je $F'(a)$ reprezentována maticí*

$$(76) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ existuje derivace $F'_j(a)$ a je representována maticí typu $(1 \times n)$ tvaru $(\frac{\partial F_j}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(a))$. Lineární zobrazení $F'(a)$ má složky $F'_j(a)$, $j = 1, \dots, m$, takže je representováno maticí (76). \square

Definice. Matice reprezentující $F'(a)$ se nazývá **Jacobiho matice**. Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **jacobián** a značíme ho $J_F(a)$, případně

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Věta 9.8 (derivace a spojitost). *Nechť F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , které má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je F spojitě v a .*

Důkaz. Existují derivace $F'_j(a)$, $j = 1, \dots, m$, takže všechny funkce F_j jsou spojitě v a podle Věty 9.3. Odtud plyne spojitost F v a . \square

Věta 9.9 (postačující podmínka pro existenci derivace). *Nechť F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , $a \in \mathbb{R}^n$ a pro každá $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ je funkce $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ spojitá v a . Pak existuje $F'(a)$.*

Důkaz. Podle Věty 9.5 existují derivace $F'_1(a), \dots, F'_m(a)$. Tedy existuje $F'(a)$. \square

Definice. Na množině $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zavedeme operace sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem takto

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2)(x) &= L_1(x) + L_2(x), & L_1, L_2 &\in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ (cL)(x) &= cL(x), & L &\in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Vzhledem k těmto operacím tvoří $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektorový prostor nad reálnými čísly. Definujeme pro $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normu

$$\|L\| = \sup \left\{ \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\}.$$

Lemma. *Vektorový prostor $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je s výše definovanou normou normovaný lineární prostor.*

Důkaz. Musíme ověřit, že zobrazení $L \mapsto \|L\|$ je norma na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zřejmě je norma nulového zobrazení rovna nule a $\|L\| = 0$ právě tehdy, když $\|L(x)\| = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, tj. když $L = 0$. Snadno též odvodíme pro $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $c \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\|cL\| = \sup \left\{ \frac{\|cL(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} = |c| \sup \left\{ \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} = |c| \|L\|.$$

Zbývá ověřit trojúhelníkovou nerovnost. Pro $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ máme

$$\begin{aligned} \|L_1 + L_2\| &= \sup \left\{ \frac{\|L_1(x) + L_2(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|L_1(x)\| + \|L_2(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|L_1(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} + \sup \left\{ \frac{\|L_2(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &= \|L_1\| + \|L_2\|. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka. Zvolme $x \neq o$ v \mathbb{R}^n . Pak

$$\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} \leq \|L\|.$$

Odtud plyne důležitá nerovnost:

$$\|L(x)\| \leq \|L\| \|x\| \quad \text{pro každé } L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \text{ a } x \in \mathbb{R}^n$$

(pro $x = o$ platí triviálně).

Věta 9.10 (derivace složeného zobrazení). *Nechť $n, k, m \in \mathbb{N}$, F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , G je zobrazení z \mathbb{R}^m do \mathbb{R}^k , $a \in \mathbb{R}^n$, $b = F(a)$ a existují $F'(a)$ a $G'(b)$. Potom existuje $(G \circ F)'(a)$ a platí*

$$(G \circ F)'(a) = G'(b) \circ F'(a).$$

Důkaz. Nalezneme $\delta_0 > 0$ takové, že pro každé $h \in B(o, \delta_0)$ platí

$$\|F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)\| \leq \|h\|.$$

Potom pro $h \in B(o, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} \|F(a+h) - F(a)\| &\leq \|F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)\| + \|F'(a)(h)\| \\ &\leq \|h\| + \|F'(a)\| \|h\| = (1 + \|F'(a)\|) \|h\|. \end{aligned}$$

Položme $C = 1 + \|F'(a)\|$. Potom pro $h \in B(o, \delta)$

$$(77) \quad \forall h \in B(o, \delta_0): \|F(a+h) - F(a)\| \leq C \|h\|.$$

Ukážeme, že lineární zobrazení $G'(b) \circ F'(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ je derivací zobrazení $G \circ F$ v bodě a . Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky existenci derivace $G'(b)$ nalezneme $\eta > 0$ takové, že

$$(78) \quad \forall u \in B(o, \eta): \|G(b+u) - G(b) - G'(b)(u)\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

Dále díky existenci derivace $F'(a)$ nalezneme $\delta \in (0, \min\{\delta_0, \frac{\eta}{C}\})$ takové, že

$$(79) \quad \forall h \in B(o, \delta): \|F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Zvolme $h \in B(o, \delta)$ a označme $u = F(a + h) - F(a)$. Potom

$$(80) \quad \|u\| \leq C\|h\| < \eta$$

a dle (79) navíc platí $\|u - F'(a)(h)\| \leq \varepsilon\|h\|$. Tedy s pomocí (78) dostaneme

$$\begin{aligned} & \|(G \circ F)(a + h) - (G \circ F)(a) - (G'(b) \circ F'(a))(h)\| \\ &= \|G(F(a) + F(a + h) - F(a)) - G(b) - G'(b)(F'(a)(h))\| \\ &= \|G(b + u) - G(b) - G'(b)(u) + G'(b)(u - F'(a)(h))\| \\ &\leq \|G(b + u) - G(b) - G'(b)(u)\| + \|G'(b)\| \|u - F'(a)(h)\| \\ &\leq \varepsilon\|u\| + \|G'(b)\| \varepsilon\|h\| \leq C\varepsilon\|h\| + \|G'(b)\| \varepsilon\|h\| = (C + \|G'(b)\|) \varepsilon\|h\|. \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. \square

Poznámka. Zobrazení $(G \circ F)'(a)$ je reprezentováno součinem matic, které reprezentují zobrazení $F'(a)$ a $G'(b)$, tedy maticí

$$\left(\frac{\partial G_\ell}{\partial y_j} \right)_{j \in \{1, \dots, k\}}^{\ell \in \{1, \dots, s\}} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right)_{i \in \{1, \dots, n\}}^{j \in \{1, \dots, k\}}.$$

Věta 9.11 (řetězkové pravidlo). *Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , $b = F(a)$, G je zobrazení z \mathbb{R}^k do \mathbb{R} a existují $F'(a)$ a $G'(b)$. Pak má funkce $G \circ F$ v bodě a derivaci a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$(81) \quad \frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial G}{\partial y_j}(b) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a).$$

Důkaz. Existence derivace plyne z Věty 9.10. Vztah (81) plyne z reprezentace

$$\left(\frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_n}(a) \right) = \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}(b), \dots, \frac{\partial G}{\partial y_k}(b) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

a výpočtu součinu matic. \square

Poznámka. Nechť $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci v každém bodě. Definujme $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r, t) = f(r \cos t, r \sin t), \quad (r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Potom pro $(r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t), \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right) \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) \cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \sin t, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t)(-r \sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t)(r \cos t). \end{aligned}$$

Příklad. Na hromadu písku tvaru kužele je plynule přisypáván další písek. Výška h roste rychlostí $h'(t) = 3 \text{ cm/s}$ a poloměr podstavy r roste rychlostí $r'(t) = 2 \text{ cm/s}$. Spočítejte rychlost, s jakou narůstá objem hromady v okamžiku, kdy $r = 5 \text{ cm}$ a $h = 15 \text{ cm}$.

Řešení. Označme $W(r, h) = \frac{\pi}{3}r^2h$. Potom je velikost objemu $V(t)$ v čase t dána funkcí $V(t) = W(r(t), h(t))$, $t \in (0, \infty)$. Podle řetízkového pravidla tedy platí

$$V'(t) = \frac{\partial W}{\partial r}(r(t), h(t))r'(t) + \frac{\partial W}{\partial h}(r(t), h(t))h'(t) = \frac{2\pi}{3}r(t)h(t)r'(t) + \frac{\pi}{3}r(t)^2h'(t).$$

Označme t_0 hodnotu času, pro kterou platí $r(t_0) = 5$ a $h(t_0) = 15$. Potom

$$V'(t_0) = \frac{2\pi}{3}5 \cdot 15 \cdot 2 + \frac{\pi}{3}25 \cdot 3 = 125\pi \text{ cm}^3 / \text{s}.$$

Věta 9.12 (o přírůstku funkce). *Nechť F je reálná funkce n proměnných, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Označme J úsečku spojující body a a b , tedy $J = \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}$. Nechť pro každé $x \in J$ existuje $F'(x)$. Potom existuje $\xi \in J$ takové, že*

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a).$$

Důkaz. Definujme funkci $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$H(t) = (1-t)a + tb, \quad t \in [0, 1],$$

a funkci $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$G(t) = (F \circ H)(t), \quad t \in [0, 1].$$

Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $H_i(t) = a_i + t(b_i - a_i)$, takže

$$H'_i(t) = b_i - a_i \quad \text{pro každé } t \in (0, 1) \text{ a } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Funkce F a H jsou spojité podle Věty 9.8, a tedy také G je spojitá na $[0, 1]$ podle Věty 8.12. Dle řetízkového pravidla máme

$$G'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(t))H'_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}((1-t)a + tb)(b_i - a_i) \quad \text{pro každé } t \in (0, 1).$$

Tedy G má v každém bodě $t \in (0, 1)$ derivaci. Podle Lagrangeovy věty nalezneme $t_0 \in (0, 1)$ splňující

$$G'(t_0) = G(1) - G(0) = F(b) - F(a).$$

Položme $\xi = (1-t_0)a + t_0b$. Potom

$$F(b) - F(a) = G'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}((1-t_0)a + t_0b)(b_i - a_i) = F'(\xi)(b - a).$$

□

Definice. Řekneme, že množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé její dva body platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v G .

Věta 9.13 (omezená derivace a lipschitzovskost). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina v \mathbb{R}^n , $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ má derivaci v každém bodě G a*

$$\sup \{\|f'(x)\| : x \in G\} < \infty.$$

Označme $K = \sup \{\|f'(x)\| : x \in G\}$. Pak f je K -lipschitzovské na G , tedy

$$\forall a, b \in G : \|f(b) - f(a)\| \leq K\|b - a\|.$$

Důkaz. Zvolme $a, b \in G$. Jestliže $f(a) = f(b)$, potom tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(a) \neq f(b)$ a položme

$$v = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}.$$

Potom $\|v\| = 1$. Definujme funkci $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x) = \langle f(x), v \rangle = \sum_{j=1}^m f_j(x) v_j.$$

Potom

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b) - f(a), v \rangle = \|f(b) - f(a)\|.$$

Dále pro každé $x \in G$ máme

$$\varphi'(x) = \sum_{j=1}^m v_j f'_j(x).$$

Zvolme $x \in G$ a $h \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|h\| \leq 1$. Potom

$$|\varphi'(x)(h)| = \left| \sum_{j=1}^m v_j f'_j(x)(h) \right| = |\langle f'(x)(h), v \rangle| \leq \|f'(x)(h)\| \cdot \|v\| \leq \|f'(x)\| \|h\| \|v\| \leq K.$$

Tedy

$$\|\varphi'(x)\| = \sup \{ |\varphi'(x)(h)| : h \in \mathbb{R}^n, \|h\| \leq 1 \} \leq K.$$

Podle Věty 9.12 nalezneme $\xi \in G$ splňující

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a).$$

Tedy

$$\|f(b) - f(a)\| = \varphi'(\xi)(b - a) \leq \|\varphi'(\xi)\| \|b - a\| \leq K \|b - a\|.$$

□

konec 23. přednášky (9.5.2025)

10. METRICKÉ PROSTORY II

10.1. Kompaktní prostory.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků z P lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $K \subset P$ je **kompaktní** v P , jestliže je metrický prostor (K, ϱ) kompaktní, tedy jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat podposloupnost, která konverguje v P a jejíž limita je prvkem K .

Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je konečná. Dokažte, že A je kompaktní.

Řešení. Je-li A prázdná, pak neobsahuje žádnou posloupnost prvků, a tedy tvrzení platí. Předpokládejme, že A je neprázdná a zvolme posloupnost jejích prvků $\{x_n\}$. Nalezneme prvek $x \in A$, který se v posloupnosti $\{x_n\}$ vyskytuje nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje podposloupnost, jejíž každý člen je roven x . Tato podposloupnost tedy konverguje podle Věty 8.2(b) k prvkem x , který náleží do množiny A .

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dokažte, že interval $[a, b]$ je kompaktní v \mathbb{R} .

Řešení. Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ prvků $[a, b]$. Potom je $\{x_n\}$ omezená. Díky Bolzanově–Weierstrassově větě nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in \mathbb{R}$ splňující $x_{n_k} \rightarrow x$. Protože $[a, b]$ je uzavřená množina, platí $x \in [a, b]$. Odtud plyne, že $[a, b]$ je kompaktní množina v \mathbb{R} .

Věta 10.1 (nutná podmínka kompaktnosti). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňuje*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad n \neq m: \varrho(x_n, x_m) \geq \delta.$$

Potom P není kompaktní.

Důkaz. Předpokládejme, že P je kompaktní. Nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ splňující $x_{n_k} \rightarrow x$. Nalezneme k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom

$$\delta \leq \varrho(x_{n_{k_0}}, x_{n_{k_0+1}}) \leq \varrho(x_{n_{k_0}}, x) + \varrho(x, x_{n_{k_0+1}}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

což je spor. Prostor P tedy není kompaktní. \square

Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je kompaktní právě tehdy, když je P konečná.

Řešení. \Rightarrow Předpokládejme, že množina P je nekonečná. Potom P obsahuje prostou posloupnost $\{x_n\}$. Pro každá $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$, platí $\varrho(x_m, x_n) = 1$. Dle Věty 10.1 tedy prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ není kompaktní.

\Leftarrow Tato implikace plyne z výše uvedeného příkladu a platí v každém metrickém prostoru.

Věta 10.2 (kompaktnost a uzavřenost). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Potom je množina K uzavřená.*

Důkaz. Je-li K prázdná, pak je uzavřená. Předpokládejme, že K je neprázdná a zvolme posloupnost $\{x_n\}$ jejích prvků splňující $\lim x_n = y$ pro nějaký prvek $y \in P$. Díky kompaktnosti K nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in K$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti plyne, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že $x = y$. Tedy $y \in K$. Množina K je tudíž uzavřená. \square

Věta 10.3 (uzavřená podmnožina kompaktu). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $F \subset P$ je uzavřená. Potom je F kompaktní.*

Důkaz. Je-li F prázdná, pak je kompaktní. Předpokládejme, že F je neprázdná a zvolme posloupnost $\{x_n\}$ jejích prvků. Potom je $\{x_n\}$ také posloupnost prvků P . Díky kompaktnosti P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ splňující že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Množina F je tedy kompaktní v P . \square

Věta 10.4 (kompaktnost a omezenost). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P omezený.*

Důkaz. Předpokládejme, že prostor P není omezený. Potom je P neprázdný. Zvolme $x \in P$. Dokážeme, že

$$(82) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in P: \varrho(x_n, x) \geq n.$$

Předpokládejme, že výrok (82) neplatí. Pak nalezneme $C > 0$ takové, že pro každé $y \in P$ platí $\varrho(x, y) \leq C$. Potom

$$\text{diam } P = \sup\{\varrho(y, z) : y, z \in P\} \leq \sup\{\varrho(y, x) + \varrho(x, z) : y, z \in P\} \leq 2C,$$

a tedy P je omezený. Odtud plyne platnost výroku (82). Nalezneme tedy posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\varrho(x_n, x) \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky kompaktnosti P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $y \in P$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Nalezneme dále k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(y, x_{n_k}) \leq 1$, a $k \geq k_0$ splňující $n_k > \varrho(x, y) + 1$. Potom

$$n_k \leq \varrho(x, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + 1 < n_k,$$

což je spor. Prostor P je tedy omezený. □

Následující věta obsahuje důležitou charakterizaci kompaktních množin v prostoru \mathbb{R}^n .

Věta 10.5 (kompaktnost v \mathbb{R}^n). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $K \subset \mathbb{R}^n$. Potom K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

Důkaz. \Rightarrow Tato implikace plyne z Vět 10.2 a 10.4.

\Leftarrow Použijeme matematickou indukci podle n . Nechť $n = 1$ a $\{x_k\}$ je posloupnost prvků K . Množina K je omezená v \mathbb{R} , a tedy nalezneme $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, splňující $K \subset [a, b]$. Podle výše uvedeného příkladu je $[a, b]$ kompaktní. Protože K je podle předpokladu uzavřená v \mathbb{R} , je uzavřená i v $[a, b]$, a je tedy podle Věty 10.3 kompaktní v \mathbb{R} .

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí v každém prostoru \mathbb{R}^d , kde $d \leq n$. Zvolme omezenou a uzavřenou množinu K v \mathbb{R}^{n+1} . Definujme zobrazení $\pi_1: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\pi_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisy

$$\pi_1([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x_1, \dots, x_n], \quad \pi_2([x_1, \dots, x_{n+1}]) = x_{n+1}.$$

Eukleidovské metriky v prostorech \mathbb{R} , \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^{n+1} označíme pro účely tohoto důkazu po řadě jako ϱ_2^1 , ϱ_2^n a ϱ_2^{n+1} . Pro každé $x, y \in K$ platí

$$\varrho_2^n(\pi_1(x), \pi_1(y)) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \text{diam } K$$

a

$$\varrho_2^1(\pi_2(x), \pi_2(y)) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \text{diam } K,$$

takže $\pi_1(K)$ je omezená v \mathbb{R}^n a $\pi_2(K)$ je omezená v \mathbb{R} . Podle Věty 8.10(f) jsou omezené také množiny $\overline{\pi_1(K)}$ a $\overline{\pi_2(K)}$. Tyto množiny jsou navíc podle Věty 8.10(d) uzavřené. Podle indukčního předpokladu jsou pak obě množiny kompaktní.

Zvolme $\{x^k\}$ posloupnost prvků K . Označme $x^k = [a^k, b^k]$, kde $a^k \in \mathbb{R}^n$ a $b^k \in \mathbb{R}$. Díky kompaktnosti množiny $\overline{\pi_1(K)}$ nalezneme podposloupnost $\{a^{k_j}\}_{j=1}^\infty$ posloupnosti $\{a^k\}$ a prvek $a \in \overline{\pi_1(K)}$ splňující $\lim_{j \rightarrow \infty} a^{k_j} = a$. Protože $\overline{\pi_2(K)}$ je kompaktní, nalezneme podposloupnost $\{b^{k_{j_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty$ posloupnosti $\{b^{k_j}\}$ a prvek $b \in \overline{\pi_2(K)}$ splňující $\lim_{\ell \rightarrow \infty} b^{k_{j_\ell}} = b$. Potom

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} x^{k_{j_\ell}} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} [a^{k_{j_\ell}}, b^{k_{j_\ell}}] = [a, b].$$

Množina K je podle předpokladu uzavřená, a tedy $[a, b] \in K$. Odtud plyne, že K je kompaktní v \mathbb{R}^{n+1} . □

Poznámka. Tvrzení Věty 10.5 neplatí pro obecné metrické prostory. Například libovolná nekonečná množina v diskretním metrickém prostoru je omezená a uzavřená, avšak nikoli kompaktní. Následující příklad popisuje takovou situaci v případě důležitého prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}([0, 1])$.

Příklad. Dokažte, že uzávěr otevřené koule $B(0, 1)$ v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ je omezená a uzavřená množina, avšak není kompaktní v prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$.

Řešení. Omezenost a uzavřenost. Je snadné ověřit, že $\text{diam } B(0, 1) \leq 2$. Z Věty 8.10(f), pak plyne $\text{diam } \overline{B(0, 1)} \leq 2$, množina $\overline{B(0, 1)}$ je tedy omezená. Podle Věty 8.10(d) je uzavřená.

Negace kompaktnosti. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme funkci $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n-1}x, & x \in [0, \frac{1}{2^n}], \\ \frac{1}{2}, & x \in (\frac{1}{2^n}, 1]. \end{cases}$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Funkce f_n je zřejmě spojitá na $[0, 1]$. Počítejme

$$\varrho_{\text{sup}}(f_n, 0) = \sup\{|f_n(x) - 0|; x \in [0, 1]\} = \sup\{|f_n(x)|; x \in [0, 1]\} = \frac{1}{2}.$$

Platí tedy $f_n \in B(0, 1) \subset \overline{B(0, 1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Potom $1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}$, a tedy

$$\varrho_{\text{sup}}(f_n, f_m) \geq |f_n(\frac{1}{2^n}) - f_m(\frac{1}{2^n})| = \frac{1}{2} - 2^{m-1-n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Z Věty 10.1 tedy plyne, že $\overline{B(0, 1)}$ není kompaktní.

konec 24. přednášky (16.5.2025)

Věty Heineova typu.

Věta 10.6 (Heineova pro limitu). *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní.*

- (i) *Platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b$.*
- (ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.*

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $x_n \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $f(x_n) \in B(b, \varepsilon)$. Tím jsme ověřili, že $\lim f(x_n) = b$.

(ii) \Rightarrow (i) Provedeme nepřímý důkaz, tj. odvodíme $\neg(\text{i}) \Rightarrow \neg(\text{ii})$. Předpokládejme tedy, že neplatí (i). Nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že

$$(83) \quad \forall \delta > 0 \exists x \in A: 0 < \varrho(x, a) < \delta \wedge f(x) \notin B(b, \varepsilon).$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta = \frac{1}{n}$. K tomuto δ nalezneme podle (83) prvek x_n splňující $x_n \in (B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap A$ a $f(x_n) \notin B(b, \varepsilon)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $\lim x_n = a$ a $x_n \in A \setminus \{a\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale není pravda, že $\lim f(x_n) = b$. Podmínka (ii) tedy není splněna. \square

Věta 10.7 (Heineova pro spojitost v bodě). *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$ a $a \in P$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

- (i) *Zobrazení f je spojitě v bodě a .*
- (ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.*

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu pomocí (i) nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(y, a) < \delta$ platí $\sigma(f(y), f(a)) < \varepsilon$. K našemu δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, a) < \delta$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí $\sigma(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

(ii) \Rightarrow (i) Předpokládejme, že (i) neplatí. Pak nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in B(a, \delta)$ splňující $\sigma(f(y), f(a)) \geq \varepsilon$. Díky tomuto tvrzení nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$ splňující $\sigma(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak splňuje $\lim x_n = a$, ale neplatí $\lim f(x_n) = f(a)$. Neplatí tedy (ii). \square

Z předchozí věty plyne okamžitě následující výsledek.

Věta 10.8 (Heineova pro spojitost). *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

- (i) *Zobrazení f je spojité.*
- (ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P a $x \in P$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.*

Věta 10.9 (limita a spojitost). *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$ a $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom je f spojité v a vzhledem k A právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$.*

Důkaz. \Rightarrow Bod a patří do množiny A' , takže v něm můžeme počítat limitu vzhledem k A . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice spojitosti nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Potom tím spíše platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Tím jsme ověřili, že platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$.

\Leftarrow Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Poněvadž $a \in A$ a $\sigma(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$ máme

$$\forall x \in A: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Tím je ověřena spojitost zobrazení f v bodě a . \square

Věta 10.10 (spojitý obraz kompaktu). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojité. Potom je $f(P)$ kompaktní v Q .*

Důkaz. Zvolme $\{y_n\}$ posloupnost prvků $f(P)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Díky kompaktnosti P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ splňující $x_{n_k} \rightarrow x$ v P . Díky spojitosti f a Heineově větě máme $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ v Q . Označme $y = f(x)$. Pak $y \in f(P)$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$. Tedy $f(P)$ je kompaktní v Q . \square

Extrémy funkcí.

Definice. Nechť P je množina a $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f **nabývá svého maxima** na P , jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \geq f(y)$ pro každé $y \in P$. Obdobně řekneme, že f **nabývá svého minima** na P , jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \leq f(y)$ pro každé $y \in P$. Bod x nazýváme v prvním případě **bodem maxima** a ve druhém **bodem minima**.

Následující důležitá věta udává postačující podmínku pro existenci extrému.

Věta 10.11 (extrémy spojité funkce na kompaktu). *Nechť (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f nabývá na P svého maxima i minima.*

Důkaz. Označme $y = \sup f(P)$. Podle Věty 10.10 je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy podle Vět 10.2 a 10.4 omezená a uzavřená. Z omezenosti $f(P)$ plyne, že $y \in \mathbb{R}$ a z uzavřenosti $f(P)$ plyne, že $y \in f(P)$. Tedy f nabývá na P svého maxima. Obdobně lze dokázat, že f nabývá na P svého minima. \square

Poznámka. Předpoklad spojitosti zobrazení i předpoklad kompaktnosti ve Větě 10.11 jsou důležité. Nespojitá zobrazení nemusí nabývat extrémů ani na kompaktní množině. Příkladem je funkce f definovaná na $[0, 1]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = 0, \text{ nebo } x = 1, \\ 2x - 1, & \text{pokud } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Spojité zobrazení na nekompaktní množině rovněž nemusí nabývat svých extrémů. Příkladem je funkce f definovaná na $(0, 1)$ předpisem $f(x) = x$.

Stejněměrná spojitost.

Poznámka. Nechť (P, ϱ) , (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je stejněměrně spojitá. Potom je f spojitá.

Věta 10.12 (spojitost a stejněměrná spojitost na kompaktu). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitá. Potom f je stejněměrně spojitá.*

Důkaz. Předpokládejme, že f není stejněměrně spojitá. Nalezneme $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ prvků P splňující $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pro každé n . Díky kompaktnosti P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a $x \in P$ splňující $x_{n_k} \rightarrow x$. Potom také $y_{n_k} \rightarrow x$, neboť

$$0 \leq \varrho(x, y_{n_k}) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})$$

a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})) = 0.$$

Ze spojitosti f a Heineovy věty tudíž plyne, že $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ a $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x)$. Nalezneme k takové, že $\sigma(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom

$$\varepsilon \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(x)) + \sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Zobrazení f je tedy stejněměrně spojitá. \square

Homeomorfní zobrazení.

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f: P \rightarrow Q$ je **homeomorfismus** (prostoru P na prostor Q), jestliže je spojitá, bijektivní a zobrazení $f^{-1}: Q \rightarrow P$ je také spojitá. Řekneme, že prostory (P, ϱ) a (Q, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje homeomorfismus prostoru P na prostor Q .

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ukažte, že interval (a, b) je homeomorfní s \mathbb{R} .

Řešení. Definujme zobrazení $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{x-a}{b-a} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Zobrazení $x \mapsto \pi \frac{x-a}{b-a} - \frac{\pi}{2}, x \in (a, b)$, je prosté spojitě zobrazení definované na intervalu (a, b) , jehož obor hodnot je roven $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Odtud a z vlastností funkce tangens plyne, že f je prosté spojitě zobrazení definované na (a, b) , jehož obor hodnot je roven \mathbb{R} . Inverzní zobrazení f^{-1} má tvar

$$f^{-1}(y) = \frac{\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}}{\pi}(b-a) + a.$$

Z tohoto vyjádření plyne, že zobrazení f^{-1} je spojitě. Tím jsme ověřili, že f je homeomorfismus prostoru (a, b) na prostor \mathbb{R} .

Věta 10.13 (spojitá bijekce na kompaktu a homeomorfismus). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitá bijekce. Potom f je homeomorfismus.*

Důkaz. Zobrazení f je bijekce, a tedy je zobrazení f^{-1} dobře definováno na Q . Předpokládejme, že $F \subset P$ je uzavřená množina. Podle Věty 10.3 je F kompaktní v P . Tudíž je podle Věty 10.10 také množina $f(F)$ kompaktní, a tedy dle Věty 10.2 uzavřená v Q . Podle Věty 8.11 je zobrazení f^{-1} spojitě z Q do P . Zobrazení f je tedy homeomorfismus. \square

Totální omezenost. Následující pojem je užitečný sám o sobě. My jej později použijeme k charakterizaci kompaktnosti.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε -**síť** prostoru P , jestliže $P = \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon)$. Řekneme, že prostor P je **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε -síť prostoru P . Řekneme, že množina $A \subset P$ je **totálně omezená** v P , jestliže je prostor (A, ϱ) totálně omezený.

Příklad. Dokažte, že každý konečný metrický prostor je totálně omezený.

Řešení. Platnost tvrzení bezprostředně vyplývá z definice totální omezenosti.

Věta 10.14 (totální omezenost a omezenost). *Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.*

Důkaz. Nalezneme konečnou 1-síť H prostoru P , potom $\operatorname{diam} H < \infty$. Zvolme $x, y \in P$. Nalezneme $x', y' \in H$ splňující $\varrho(x, x') < 1$ a $\varrho(y, y') < 1$. Potom

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 1 + \operatorname{diam} H + 1 = \operatorname{diam} H + 2,$$

a tedy $\operatorname{diam} P \leq \operatorname{diam} H + 2$. Prostor P je tedy omezený. \square

Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že P je totálně omezený právě tehdy, když je konečný.

Řešení. \Rightarrow Z totální omezenosti P plyne, že existuje konečná 1-síť $H \subset P$. Z Příkladu 8.1 plyne, že pro každé $x \in P$ je $B(x, 1) = \{x\}$. Tedy platí

$$P = \bigcup_{x \in H} B(x, 1) = \bigcup_{x \in H} \{x\} = H.$$

Odtud plyne, že prostor P je konečný.

\Leftarrow Tato implikace platí v každém metrickém prostoru, jak plyne z výše uvedeného příkladu.

Poznámka. Opačná implikace k implikaci uvedené ve Větě 10.14 obecně neplatí, neboť každý nekonečný diskretní metrický prostor je omezený, není však totálně omezený.

Věta 10.15 (kompaktnost a totální omezenost). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.*

Důkaz. Předpokládejme, že P není totálně omezený. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou množinu $C \subset P$ platí

$$P \setminus \bigcup_{x \in C} B(x, \delta) \neq \emptyset.$$

Zvolme $x_1 \in P$ a $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že máme zvoleny prvky x_1, \dots, x_n . Potom je množina $P \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$ neprázdná. Zvolme x_{n+1} její libovolný prvek. Touto konstrukcí získáme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny P splňující $\varrho(x_n, x_m) \geq \delta$ pro každá $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Podle Věty 10.1 tedy prostor P není kompaktní. \square

Příklad. Dokažte, že množina

$$B = \{x \in \ell^2; \|x_n\|_{\ell^2} \leq 1\}$$

je omezená, ale nikoli totálně omezená v ℓ^2 .

Řešení. Uvažujme vektory $e^n \in \ell^2$, $n \in \mathbb{N}$, kde e^n je n -tý kanonický vektor v ℓ^2 , tj.

$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

kde pouze n -tý člen je roven 1. Potom $e^n \in B$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a navíc pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, platí $\|e^n - e^m\|_{\ell^2} = \sqrt{2}$. Zvolme $r \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Potom pro každé $x \in \ell^2$ obsahuje $B(x, r)$ nejvýše jeden z kanonických vektorů. Nemůže tedy existovat konečná r -sít množiny B . Množina B tedy není totálně omezená v ℓ^2 .

konec 25. přednášky (20.5.2025)

Charakterizace kompaktnosti.

Definice. Nechť P je metrický prostor a \mathcal{G} je systém jeho podmnožin. Řekneme, že \mathcal{G} **pokrývá** P , neboli je **pokrytím** P , jestliže $P = \bigcup \mathcal{G}$. Jestliže pokrytí \mathcal{G} prostoru P sestává z otevřených množin, říkáme, že jde o **otevřené pokrytí**. Jestliže \mathcal{G} obsahuje konečně mnoho množin, říkáme, že jde o **konečné pokrytí**.

Věta 10.16 (kompaktnost a otevřená pokrytí). *Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každé otevřené pokrytí \mathcal{G} prostoru P existuje konečné pokrytí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ prostoru P .*

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme, že \mathcal{G} je otevřené pokrytí prostoru P . Nejprve dokážeme, že platí následující výrok:

$$(84) \quad \exists n \in \mathbb{N} \forall x \in P \exists G \in \mathcal{G}: B(x, \frac{1}{n}) \subset G.$$

Předpokládejme, že (84) neplatí, potom tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in P \forall G \in \mathcal{G}: B(x, \frac{1}{n}) \not\subset G.$$

Odtud získáváme posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $G \in \mathcal{G}$ platí $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset G$. Díky kompaktnosti prostoru P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Protože \mathcal{G} je pokrytí P , nalezneme $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$.

Díky otevřenosti G nalezneme $\delta > 0$ splňující $B(x, \delta) \subset G$. K němu nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_k \geq \frac{2}{\delta}$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom pro každé $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n_k} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

takže

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

což je spor. Tím je dokázána platnost výroku (84).

Zvolme $x \in P$. Díky (84) nalezneme množinu $G \in \mathcal{G}$ splňující $B(x, \frac{1}{n}) \subset G$ a označíme ji G_x . Prostor P je kompaktní, a tedy podle Věty 10.15 je totálně omezený. Nalezneme jeho konečnou $\frac{1}{n}$ -sít H . Položme

$$\mathcal{G}^* = \{G_x; x \in H\}.$$

Potom \mathcal{G}^* je konečný podsystém \mathcal{G} splňující

$$P \subset \bigcup_{x \in H} B(x, \frac{1}{n}) \subset \bigcup_{x \in H} G_x,$$

takže \mathcal{G}^* je konečné otevřené pokrytí prostoru P .

\Leftarrow Zvolme $\{x_n\}$ posloupnost prvků P a označme $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Předpokládejme, že existuje $y \in P$ takové, že pro všechna $r > 0$ je množina $B(y, r) \cap A$ nekonečná. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $x_{n_1} \in B(y, 1)$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < \dots < n_{k-1}$. Protože $B(y, \frac{1}{k}) \cap A$ je nekonečná množina, nalezneme $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$, splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$. Tímto způsobem dostaneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom je $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$.

Nyní předpokládejme, že pro každé $y \in P$ existuje $r_y > 0$ takové, že $B(y, r_y) \cap A$ je konečná množina. Pro každé $y \in P$ je množina $B(y, r_y)$ otevřená a navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{y \in P} B(y, r_y)$. Systém $\{B(y, r_y)\}_{y \in P}$ tudíž představuje otevřené pokrytí prostoru P , a tedy podle předpokladu nalezneme konečnou množinu $F \subset P$ splňující $P = \bigcup_{y \in F} B(y, r_y)$. Potom

$$A = A \cap P = A \cap \bigcup_{y \in F} B(y, r_y) = \bigcup_{y \in F} (A \cap B(y, r_y)),$$

což je konečné sjednocení konečných množin, takže A je konečná. Odtud vyplývá, že se alespoň jeden prvek množiny A vyskytuje v posloupnosti $\{x_n\}$ nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje konstantní, a tedy konvergentní podposloupnost. V obou případech jsme našli konvergentní podposloupnost libovolně zvolené posloupnosti prvků P . Prostor P je tedy kompaktní. \square

Věta 10.17 (Borelova věta). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť \mathcal{J} je systém neprázdných otevřených intervalů splňující $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}$ takový, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}^*$.*

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z Věty 10.16. \square

Věta 10.18 (charakterisace kompaktnosti). *Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin P , která pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňuje $F_{n+1} \subset F_n$, platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Důkaz. \Rightarrow Je-li $P = \emptyset$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $P \neq \emptyset$ a zvolme $\{F_n\}$ posloupnost splňující příslušné předpoklady. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme $x_n \in F_n$. Díky kompaktnosti P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ splňující

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k_0} > n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $x_{n_k} \in F_n$, neboť

$$x_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_{n_{k_0}} \subset F_n.$$

Posloupnost $\{x_{n_{k_0}}, x_{n_{k_0+1}}, \dots\}$ je tedy obsažena v F_n . Navíc je to podposloupnost posloupnosti $\{x_{n_k}\}$, a tedy její limitou je prvek x . Díky uzavřenosti F_n platí $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, jest $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, a tedy je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ neprázdná.

\Leftarrow Zvolme $\{x_n\}$ posloupnost prvků P a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \overline{\{x_j; j \in \mathbb{N}, j \geq n\}}.$$

Potom je $\{F_n\}$ posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin P taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Podle předpokladu tedy nalezneme $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Protože $x \in F_1$, nalezneme podle definice množiny F_1 index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že $\varrho(x_{n_1}, x) < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvoleny indexy $n_1 < \dots < n_k$. Protože $x \in F_{n_{k+1}}$, nalezneme index $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} > n_k$ a $\varrho(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$. Takto získáme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Z posloupnosti $\{x_n\}$ jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. Protože posloupnost $\{x_n\}$ byla libovolně zvolena, prostor P kompaktní. \square

Husté množiny.

Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **hustá** v (P, ϱ) , jestliže $\overline{A} = P$.

Poznámka. Bude užitečné si uvědomit, že množina $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každé $x \in P$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A splňující $\lim x_n = x$.

Poznámka. Množiny \mathbb{Q} a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v \mathbb{R} .

Poznámka. Lze ukázat, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je množina všech polynomů na $[a, b]$ hustá v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. Důkaz tohoto zajímavého tvrzení uvedeme až ve čtvrtém semestru v souvislosti se stejnoměrnou konvergencí funkcí.

Příklad. Necht' P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že A je hustá v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když $A = P$.

Řešení. \Rightarrow Zvolme $x \in P$. Potom $\text{dist}(x, A) = 0$. Nalezneme $y \in A$ splňující $\varrho_{\text{diskr}}(x, y) < 1$. Potom $x = y$, a tedy $x \in A$. Odtud plyne, že $A = P$.

\Leftarrow Tato implikace zřejmě platí.

Věta 10.19 (charakterizace hustých množin). *Necht' (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $A \subset P$ je hustá v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu G v P platí $G \cap A \neq \emptyset$.*

Důkaz. Je-li $P = \emptyset$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $P \neq \emptyset$.

\Rightarrow Zvolme $G \subset P$ neprázdnou a otevřenou a $x \in G$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Protože $\overline{A} = P$, platí podle Věty 8.10(c) $\text{dist}(x, A) = 0$. Potom $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $G \cap A \neq \emptyset$.

\Leftarrow Zvolme $x \in P$ a $r > 0$. Potom je $B(x, r)$ neprázdná a otevřená, a tedy $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. To znamená, že $\text{dist}(x, A) < r$, a tedy $\text{dist}(x, A) = 0$. Platí tedy $x \in \overline{A}$ (Věta 8.10(c)). Dokázali jsme, že $P = \overline{A}$, tedy že A je hustá v P . \square

Řídké množiny.

Definice. Necht' (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **řídká** v (P, ρ) , jestliže je $P \setminus \overline{A}$ hustá v P .

Příklad. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Necht' $x \in \mathbb{R}$. Potom je jednobodová množina $\{x\}$ řídká v \mathbb{R} .
- (b) Množina přirozených čísel \mathbb{N} je řídká v \mathbb{R} .
- (c) Množina racionálních čísel \mathbb{Q} není řídká v \mathbb{R} .

Řešení. (a) Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Nalezneme $y \in G$ a $r > 0$ taková, že $(y - r, y + r) \subset G$. Zřejmě platí $(y - r, y + r) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, a proto $G \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Podle Věty 10.19 je $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ hustá. Protože $\mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathbb{R} \setminus \overline{\{x\}}$ je množina $\{x\}$ řídká.

(b) Množina \mathbb{N} je uzavřená v \mathbb{R} , protože platí

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n + 1),$$

a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je tedy otevřená v \mathbb{R} podle Věty 8.8. Stačí tedy dokázat, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je hustá. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Potom G obsahuje neprázdný otevřený interval, a je tedy nespočetná. Odtud plyne $G \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = G \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$. Podle Věty 10.19 je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hustá.

(c) Platí $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$, tedy není hustá, takže \mathbb{Q} není řídká.

Příklad. Necht' P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že množina A je řídká v metrickém prostoru (P, ρ_{diskr}) právě tehdy, když je prázdná.

Řešení. \Rightarrow Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá a uzavřená, takže $P \setminus \overline{A} = P$. To znamená, že $\overline{A} = \emptyset$, a tedy $A = \emptyset$.

\Leftarrow Tato implikace je zřejmá a platí v každém metrickém prostoru.

Věta 10.20 (charakterizace řídkých množin). *Necht' (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom A je řídká v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje neprázdňá otevřená množina $H \subset G$ taková, že $H \cap A = \emptyset$.*

Důkaz. \Rightarrow Necht' $G \subset P$ je otevřená neprázdňá množina. Pak položíme $H = G \cap (P \setminus \overline{A})$. Potom je H otevřená, neboť je průnikem dvou otevřených množin. Zřejmě platí $H \subset G$. Množina H je navíc neprázdňá, neboť množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá a podle Věty 10.19 má tedy s G neprázdňý průnik. Navíc přímo z definice množiny H plyne $H \cap A = \emptyset$.

\Leftarrow Necht' $G \subset P$ je neprázdňá otevřená množina v P . Podle předpokladu existuje neprázdňá otevřená množina $H \subset G$ splňující $H \cap A = \emptyset$. Množina $P \setminus H$ je uzavřená, obsahuje A , a proto podle Věty 8.10(g) platí $\overline{A} \subset P \setminus H$, takže také $H \subset P \setminus \overline{A}$. Tedy $G \cap (P \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Podle Věty 10.19 je tudíž množina $P \setminus \overline{A}$ hustá v P , což znamená, že A je řídká. \square

Příklad. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme

$$A = \{f \in \mathcal{C}([a, b]); \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq 1\}.$$

Dokažte, že

- (a) A je řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \rho_{\text{int}})$,
- (b) A není řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \rho_{\text{sup}})$.

Řešení. (a) Nejprve dokážeme, že A je uzavřená v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \rho_{\text{int}})$. Necht' $g \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že $|g(c)| > 1$. Předpokládejme, že $c \neq b$. Ze

spojitosti funkce g pak plyne, že existuje $d \in (c, b)$ takové, že pro každé $x \in (c, d)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$. Potom pro každou funkci $f \in A$ a pro každé $x \in (c, d)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\geq ||f(x)| - |g(x)|| = |g(x)| - |f(x)| \\ &\geq \frac{|g(c)|+1}{2} - 1 = \frac{|g(c)|-1}{2}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geq \int_c^d |f(x) - g(x)| dx \\ &\geq \int_c^d \frac{|g(c)|-1}{2} dx = (d-c) \frac{|g(c)|-1}{2}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\varrho_{\text{int}}(g, A) \geq (d-c) \frac{|g(c)|-1}{2} > 0$, a tedy podle Věty 8.10(c) platí $g \notin \overline{A}$. Z toho plyne, že $\overline{A} = A$, a tedy A je uzavřená v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. V případě, že $c = b$, nalezneme $d \in (a, c)$ takové, že pro každé $x \in (d, c)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$ a dále postupujeme obdobně, přičemž místo intervalu (c, d) pracujeme s intervalem (d, c) .

Díky uzavřenosti A platí $\mathcal{C}([a, b]) \setminus \overline{A} = \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$. K důkazu řídkosti množiny A v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ tedy stačí dokázat, že

$$\overline{\mathcal{C}([a, b]) \setminus A} = \mathcal{C}([a, b]).$$

Zvolme $h \in \mathcal{C}([a, b])$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{n_0} < b - a$. Pro $n \geq n_0$ položíme

$$h_n(x) = \begin{cases} n(h(a + \frac{1}{n}) - 2) \cdot (x - a) + 2, & \text{pro } x \in [a, a + \frac{1}{n}), \\ h(x), & \text{pro } x \in (a + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Potom $h_n \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$, neboť h_n je zřejmě spojitá na $[a, b]$ a $h_n(a) = 2$. Označme $M = \sup_{[a, b]} |h|$. Vzhledem ke spojitosti funkce h je M konečné číslo. Pak platí

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) &= \int_a^b |h_n(x) - h(x)| dx \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (|h_n(x)| + |h(x)|) dx \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (n(|h(a + \frac{1}{n})| + 2) \cdot \frac{1}{n} + 2 + M) dx \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (2M + 4) dx = \frac{2M + 4}{n}. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M+4}{n} = 0$, plyne odtud, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) = 0$, a tedy $h_n \xrightarrow{\varrho_{\text{int}}} h$. To znamená, že $h \in \overline{\mathcal{C}([a, b]) \setminus A}$, a tedy $\mathcal{C}([a, b]) \setminus A$ je hustá v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$, takže A je v tomto prostoru řídká.

(b) Označme f nulovou funkcí na intervalu $[a, b]$. Potom otevřená koule $B(f, 1)$ tvoří otevřenou neprázdnou množinu v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$, která je obsažena v A . Podle Věty 10.20 pak A není řídká v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$.

Věta 10.21 (vlastnosti řídkých množin). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$.*

- Je-li A řídká v P a $B \subset A$, pak také B je řídká v P .*
- Jsou-li množiny A a B řídké v P , pak také $A \cup B$ je řídká v P .*
- Množina A je řídká v P právě tehdy, když \overline{A} je řídká v P .*

Důkaz. (a) Podle Věty 8.10(b) platí $\overline{B} \subset \overline{A}$, a tedy $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B}$. Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá, a tedy podle Věty 10.19 je hustá i množina $P \setminus \overline{B}$. To znamená, že množina B je řídká v P .

(b) Podle Věty 8.10(e) a de Morganových pravidel platí

$$(85) \quad P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A \cup B}) = (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B}).$$

Protože množiny A a B jsou řídké v (P, ϱ) , jsou množiny $P \setminus \overline{A}$ a $P \setminus \overline{B}$ v tomto prostoru husté. Navíc jsou podle Věty 8.5 obě otevřené. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$. Potom je množina $G \cap (P \setminus \overline{A})$ otevřená a díky hustotě $P \setminus \overline{A}$ je také neprázdná. Množina $P \setminus \overline{B}$ je hustá, a proto je množina $G \cap (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ neprázdná. Množina $(P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ je tedy hustá. Z (85) plyne, že množina $P \setminus \overline{A \cup B}$ je hustá v P , a tedy $A \cup B$ je řídká v P .

(c) Z Věty 8.10(d) vyplývá, že $P \setminus \overline{\overline{A}} = P \setminus \overline{A}$. Odtud již tvrzení snadno plyne. \square

konec 26. přednášky (23.5.2025)