Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
20. 6. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(x) = x + (|x| - 1)^2$.
   (a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ má tato funkce vlastní derivaci?
   (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž tato funkce nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
   (c) [4 b.] Najděte co největší otevřený interval tvaru $I = (-\infty, A)$, na němž je funkce f konvexní nebo konkávní, a uveďte, zda je f na I konvexní, nebo zda je tam konkávní.

2. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *derivace funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$*.
   (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé:
   “Nechť f, g a h jsou tři funkce splňující $f(0) = g(0) = h(0)$, nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a nechť navíc platí, že f i h mají vlastní derivaci v nule splňující $f'(0) = h'(0)$. Potom nutně i g má vlastní derivaci v nule a platí $f'(0) = g'(0) = h'(0)$.”
   (c) [3 b.] Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ následovně:
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ racionální} \\ x^2 & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$
   Rozhodněte, zda má funkce f derivaci v nule.

3. (a) [3 b.] Definujte, co je *horní a dolní Riemannova suma*, *horní a dolní Riemannův integrál* a *Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[A, B]$.
   (b) [2 b.] Zformulujte větu z přednášky, která se týká riemannovské integrovatelnosti monotónních funkcí.
   (c) [5 b.] Dokažte tu větu.

4. (a) [3 b.] Napište, jak se definuje součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a co znamená, že řada je *konvergentní*.
   (b) [3 b.] Zformulujte integrální kritérium konvergence řady. Nemusíte ho dokazovat.
   (c) [4 b.] Je řada $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ konvergentní?