

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
17. 6. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
 - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
 - *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
 - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
 - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*
-

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(x) = |x^2 - 1|(x + 1)$.
 - (a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ má tato funkce vlastní derivaci?
 - (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž tato funkce nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
 - (c) [4 b.] Najděte co největší otevřený interval I obsahující nulu, na němž je tato funkce konvexní nebo konkávní, a uveďte, zda je f na I konvexní, nebo zda je tam konkávní.
2.
 - (a) [3 b.] Definujte, co je *limes superior* a *limes inferior* posloupnosti (a_n) .
 - (b) [3 b.] Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé:
"Jestliže (a_n) a (b_n) jsou dvě posloupnosti takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, tak potom

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n."$$

- (c) [4 b.] Definujme

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) n^3 + 3n}{n^3 + 5}.$$

Určete limes superior a limes inferior posloupnosti (a_n) .

3.
 - (a) [3 b.] Napište, jak je definován *Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě A* .
 - (b) [3 b.] Zformulujte větu, která charakterizuje Taylorův polynom pomocí limity. Nemusíte tu větu dokazovat.
 - (c) [4 b.] Určete, pro jaké přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$ je následující limita vlastní a nenulová:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot (\cos(x) - 1)}{x^k}.$$

Jaká je pro toto k hodnota té limity?

4.
 - (a) [3 b.] Napište, co je to *primitivní funkce* a jak je definován *Newtonův integrál* $(N) \int_A^B f(x) dx$.
 - (b) [3 b.] Napište vzorec pro výpočet povrchu pláště rotačního tělesa vzniklého otáčením grafu nezáporné funkce f na intervalu $[A, B]$ kolem osy x .
 - (c) [4 b.] Nechť U je úsečka v rovině, jejíž jeden krajní bod je v počátku, tj. v bodě se souřadnicemi $(0, 0)$, a druhý krajní bod má souřadnice $(3, 4)$. Jaký povrch má plášť tělesa (kužele) vzniklý otáčením úsečky U kolem osy x ?