

## Písemka č. 2 - 17. 4.

1. Spočítejte

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx.$$

2. Spočítejte

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2 - 1)}.$$

### Řešení

1. Trojčlen ve jmenovateli má kořeny  $z_{1,2} = -2 \pm 4i$ . Zavedeme proto funkci

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

a hledaný integrál pak bude  $I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \text{Im} J$ . Definujeme integrační křivku jako horní půlkružnici o poloměru  $R$ . Její rovná část dá integrál

$$\int_{-R}^R f(z) dz \rightarrow J, \quad R \rightarrow \infty.$$

Integrál přes oblouk půlkružnice vyřešíme Jordanovým lemmatem, kde  $\alpha = 1$  a  $M_R \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0$ . Proto

$$\int_{|z|=R, \text{Im } z \geq 0} f(z) dz \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Použitím reziduové věty pak bude

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \text{Res}_{z_1} f = 2\pi i \frac{(-2 + 4i) e^{-4-2i}}{-2 + 4i - (-2 - 4i)} \\ &= \frac{\pi}{2e^4} (-\cos 2 + 2 \sin 2 + i(\sin 2 + 2 \cos 2)) \end{aligned}$$

a nakonec

$$I = \text{Im} J = \frac{\pi}{2e^4} (\sin 2 + 2 \cos 2)$$

2. Zavedeme funkci

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z^2 - 1)},$$

kteřá má póly v bodech  $z_{1,2} = \pm 1$ . Bereme takovou větev odmocniny, která startuje z hodnoty  $\sqrt{1} = 1$  pro úhel  $\varphi = 0$ , je spojitá pro  $\varphi \in [0, 2\pi)$  a vrátí se tak na kladnou reálnou poloosu zesponu s hodnotami odpovídajícími  $\sqrt{1} = -1$ . Integrujeme přes "Pacmana s vykouslým zubem", protože zadaná funkce má pól na kladné reálné poloose, ten tak musíme obkružovat. Křivka, kterou budeme používat, tak bude mít šest částí

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t e^{i\eta}, & t \in [\varepsilon, 1 - \gamma_1(\varepsilon, \eta)] \cup [1 + \gamma_2(\varepsilon, \eta), R] \\ \varphi_2(t) &= 1 + \varepsilon e^{it}, & t \in [\pi - \delta_1(\varepsilon, \eta), \delta_2(\varepsilon, \eta)] \\ \varphi_3(t) &= R e^{it}, & t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\ \varphi_4(t) &= t e^{2\pi i - i\eta}, & t \in [R, 1 + \gamma_2(\varepsilon, \eta)] \cup [1 - \gamma_1(\varepsilon, \eta), \varepsilon] \\ \varphi_5(t) &= 1 + \varepsilon e^{it}, & t \in [2\pi - \delta_2(\varepsilon, \eta), \pi + \delta_1(\varepsilon, \eta)] \\ \varphi_6(t) &= \varepsilon e^{it}, & t \in [2\pi - \eta, \eta] \end{aligned}$$

Integrál přes  $\varphi_1$  konverguje k  $I$ . Integrál přes  $\varphi_2$  vyřešíme LOOPN1 a v limitě nám dá výsledek  $iAb$ , kde  $b = -\pi$  je úhel, který oběhneme (v limitě) a

$$A = \lim_{z \rightarrow 1, \text{Im } z > 0} f(z)(z - 1) = \lim_{z \rightarrow 1, \text{Im } z > 0} \frac{1}{\sqrt{z}(z + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Proto  $\int_{\varphi_2} f \rightarrow -\frac{i\pi}{2}$ . Integrál přes  $\varphi_3$  vyřešíme Jordanovým lemmatem. Máme totiž  $\alpha = 0$  a  $M_R \sim R^{-\frac{5}{2}}$ , tedy  $RM_R \sim R^{-\frac{3}{2}} \rightarrow 0$  a proto  $\int_{\varphi_3} f \rightarrow 0$ . Díky tomu, že se odmocnina vrátí na reálnou poloosu zesponu s opačnými hodnotami a zároveň integrujeme v opačném směru, tyto dva minusy dají plus a  $\int_{\varphi_4} f \rightarrow I$ . Integrál přes  $\varphi_5$  vyřešíme opět LOOPN1 a v limitě nám dá výsledek  $iAb$ , kde  $b = -\pi$  je úhel, který oběhneme (v limitě) a

$$A = \lim_{z \rightarrow 1, \text{Im } z < 0} f(z)(z - 1) = \lim_{z \rightarrow 1, \text{Im } z < 0} \frac{1}{\sqrt{z}(z + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Proto  $\int_{\varphi_5} f \rightarrow \frac{i\pi}{2}$ . Nakonec integrál přes  $\varphi_6$  vyřešíme z definice integrálu a omezenosti funkce  $\frac{1}{z^2-1}$  na okolí počátku. Máme tak

$$\left| \int_{\varphi_6} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} C \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} dt \rightarrow 0.$$

Posčítáním všeho, co jsme zjistili, dostaneme po limitních přechodech

$$I - \frac{i\pi}{2} + 0 + I + \frac{i\pi}{2} + 0 = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} f = 2\pi i \left( \frac{-1}{2i} \right) = -\pi.$$

Odtud tedy  $I = -\frac{\pi}{2}$ .