

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

Matematicko-fyzikální fakulta UK, letní semestr 2025-26

Termín číslo 2, 10. 6. 2026

1. Je dána funkce

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}x) - e^{-x^2} - \log\left(1 - \frac{1}{3}x^4\right).$$

Nalezněte Taylorův polynom 6. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3 \cdot (\sin x - \operatorname{arctg} x)}.$$

(15 bodů)

2. Vyšetřete konvergenci řady v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n.$$

(15 bodů)

3. Spočtěte určitý integrál:

$$\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

(15 bodů)

4. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Uvažujte následující tvrzení.

(1) Platí $\lim a_n = 0$.

(2) Existuje $p \geq 1$ takové, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ je konvergentní.

(3) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ je konvergentní.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

(a) (1) $\Rightarrow$ (2)

(b) (2) $\Rightarrow$ (1)

(c) (1) $\Rightarrow$ (3)

(15 bodů)

Řešení úloh

Úloha číslo 1. Je dána funkce

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}x) - e^{-x^2} - \log(1 - \frac{1}{3}x^4).$$

Nalezněte Taylorův polynom 6. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3 \cdot (\sin x - \operatorname{arctg} x)}.$$

Řešení. 1. *Rozvoj jednotlivých funkcí v bodě 0.* Malé o uvažujeme ve všech případech v 0. Pro nalezení Taylorova polynomu 6. řádu využijeme známé standardní rozvoje elementárních funkcí.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Platí} \\ \text{2b) Dosazením } y = \sqrt{2}x \text{ podle Vět 6.6 a 6.7 získáme:} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + o(y^6). \\ \cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{2x^2}{2} + \frac{4x^4}{24} - \frac{8x^6}{720} + o((\sqrt{2}x)^6) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{90}x^6 + o(x^6) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Platí} \\ \text{2b) Dosazením } y = -x^2 \text{ opět podle Věty 6.7 získáme:} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \\ e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Platí} \\ \text{2b) Dosazením } y = \frac{1}{3}x^4 \text{ vyhovuje přesnosti do 6. řádu pouze první člen:} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \log(1 - y) = -y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \\ \log(1 - \frac{1}{3}x^4) = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^6) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{2. Určení } T_6^{f,0}. \text{ Dosazením dílčích rozvojů do předpisu funkce } f \text{ dostáváme:} \\ \text{4b) } \begin{aligned} f(x) &= (1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{90}x^6) - (1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6) - (-\frac{1}{3}x^4) + o(x^6) \\ &= (1 - 1) + (-1 + 1)x^2 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^4 + (-\frac{1}{90} + \frac{15}{90})x^6 + o(x^6) \\ &= \frac{14}{90}x^6 + o(x^6) = \frac{7}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned} \\ \text{Taylorův polynom 6. řádu funkce } f \text{ v bodě 0 je tedy } T_6^{f,0}(x) = \frac{7}{45}x^6. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 3. \text{ Výpočet limity. Nejprve vyšetříme chování jmenovatele pomocí rozvoju funkcí } \sin x \text{ a } \arctg x \text{ do 3. řádu:} \\
 \\
 \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
 \arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
 \\
 5b \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Jejich rozdíl činí:} \\
 \sin x - \arctg x = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
 \text{Celý jmenovatel má proto tvar } \frac{1}{6}x^6 + o(x^6). \text{ Dosazením do zadané limity obdržíme:} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3(\sin x - \arctg x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{45}x^6 + o(x^6)}{\frac{1}{6}x^6 + o(x^6)} = \frac{\frac{7}{45}}{\frac{1}{6}} = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Úloha číslo 2. Vyšetřete konvergenci řady v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n.$$

Řešení:

^{2b} { Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n$, kde koeficienty jsou $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ a $y \in \mathbb{R}$ je parametr.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pro } y \neq 0 \text{ počítejme} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1} y^{n+1}|}{|c_n y^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} |y| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}} |y| = |y|. \\ \text{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n \text{ tedy konverguje absolutně pro } |y| < 1 \text{ a diverguje pro } |y| > 1. \end{array} \right.$$

Vyšetření krajních bodů.

^{3b} { Pro $y = 1$: Řada má tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. Protože posloupnost $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ je kladná, monotonně klesá a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, řada podle Leibnizova kritéria konverguje.

^{3b} { Pro $y = -1$: Řada má tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, která diverguje podle limitního srovnacího kritéria při srovnání s harmonickou řadou.

^{2b} { *Návrat k proměnné x .* Naše řada konverguje právě tehdy, když $\frac{x}{x+1} \in (-1, 1]$. Řešením příslušných nerovnic je množina $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Pokud $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \setminus \{-1\}$, pak řada diverguje. Pokud $x = -1$, pak není řada dobře definována.

Úloha číslo 3. Spočtěte určitý integrál:

$$\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

Řešení: Použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t. \quad (1)$$

Substituční funkce φ má tedy tvar $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$. Platí

$$\varphi'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} - 1 < 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Označíme $\varphi(x) = t$. Umocněním obou stran v (1) na druhou dostaneme:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2xt + t^2$$

Odečtením x^2 a vyjádřením x získáme:

$$\varphi^{-1}(t) = x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}$$

Nyní spočítáme

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2t(1 - 2t) - (t^2 - 1)(-2)}{(1 - 2t)^2} = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(1 - 2t)^2} = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}.$$

Dosadíme vyjádřené x do jmenovatele původního integrálu:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + x + 1} &= x + (x + t) = 2x + t = 2\left(\frac{t^2 - 1}{1 - 2t}\right) + t \\ &= \frac{2t^2 - 2 + t(1 - 2t)}{1 - 2t} = \frac{t - 2}{1 - 2t} \end{aligned}$$

Celý nový integrand po zjednodušení vypadá takto:

$$\frac{1}{\frac{t-2}{1-2t}} \cdot \left(-2 \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}\right) = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(t - 2)(2t - 1)}$$

Meze přepočítáme podle vztahu $t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$:

- Dolní mez ($x = 0$): $t = \sqrt{0 + 0 + 1} - 0 = 1$
- Horní mez ($x = 1$): $t = \sqrt{1 + 1 + 1} - 1 = \sqrt{3} - 1$

Integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky Nyní integrujeme racionální funkci v nových mezích:

$$\int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{2t^2 - 2t + 2}{2t^2 - 5t + 2} dt$$

Vydělením polynomů dostaneme:

$$\frac{2t^2 - 2t + 2}{2t^2 - 5t + 2} = 1 + \frac{3t}{(t - 2)(2t - 1)}$$

Zlomkovou část rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{3t}{(t-2)(2t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{2t-1}.$$

Získáme $A = 2$ a $B = -1$. Primitivní funkce je tedy

$$F(t) = \int \left(1 + \frac{2}{t-2} - \frac{1}{2t-1}\right) dt \stackrel{c}{=} t + 2 \log |t-2| - \frac{1}{2} \log |2t-1|, \quad t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

Dosadíme horní a dolní mez do primitivní funkce:

$$\begin{aligned} F(\sqrt{3}-1) &= (\sqrt{3}-1) + 2 \log |\sqrt{3}-3| - \frac{1}{2} \log |2(\sqrt{3}-1)-1| \\ &= \sqrt{3}-1 + 2 \log (3-\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \log (2\sqrt{3}-3) \\ F(1) &= 1 + 2 \log |1-2| - \frac{1}{2} \log |2 \cdot 1 - 1| = 1 \end{aligned}$$

Odečtením dolní meze od horní dostáváme finální hodnotu

$$\sqrt{3}-2 + 2 \log (3-\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \log (2\sqrt{3}-3).$$

Úloha číslo 4. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Uvažujte následující tvrzení.

- (1) Platí $\lim a_n = 0$.
- (2) Existuje $p \geq 1$ takové, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ je konvergentní.
- (3) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ je konvergentní.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

- (a) (1) $\Rightarrow$ (2)
- (b) (2) $\Rightarrow$ (1)
- (c) (1) $\Rightarrow$ (3)

5b { (a) *Implikace neplatí.* Uvažujme posloupnost $a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, čímž je splněno tvrzení (1). Vyšetřeme nyní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^p(n+1)}$ pro libovolné pevné $p \geq 1$. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/\log^p(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^p(n+1)}{n} = 0$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, musí podle limitního srovnávacího kritéria divergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^p(n+1)}$. Neexistuje tedy žádné $p \geq 1$ splňující podmínku (2).

5b { (b) *Implikace platí.* Necht platí tvrzení (2), tedy existuje $p \geq 1$ takové, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ konverguje. Z nutné podmínky konvergence řady vyplývá, že limita jejích členů je nulová:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^p = 0$$
 Jelikož $\lim_{t \rightarrow 0+} t^{1/p} = 0$, platí také $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, což je ekvivalentní s $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Tvrzení (1) je tímto dokázáno.

5b { (c) *Implikace platí.* Vyšetřeme N -tý částečný součet s_N řady z tvrzení (3). Jedná se o teleskopickou řadu, u které se vnitřní členy odečtou:

$$s_N = \sum_{n=1}^N (a_{n+1} - a_n) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{N+1} - a_N) = a_{N+1} - a_1$$
 Podle předpokladu (1) platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{N+1} = 0$. Z věty o aritmetice limit pak plyne

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} - a_1) = 0 - a_1 = -a_1$$
 Protože $-a_1 \in \mathbb{R}$, limita částečných součtů existuje a je vlastní, tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ konverguje.