

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

10. 7. 2024

Čas: 90 minut.

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.
- Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.
- Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.
- Své odpovědi musíte zdůvodnit.
- Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \exp(-1/x) & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci e^x .

- [3 b.] Rozhodněte, zda je funkce f spojitá v bodě $x = 0$ a zda má limitu v $+\infty$.
 - [3 b.] Rozhodněte, zda má funkce $f(x)$ derivaci v bodě $x = 0$, případně zda má v tomto bodě aspoň jednostranné derivace.
 - [4 b.] Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f konvexní, a maximální intervaly, na nichž je konkávní.
2. (a) [3 b.] Napište, co to znamená, že funkce f je *spojitá* v bodě $A \in \mathbb{R}$.
- (b) [3 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení:
"Jestliže f a g jsou dvě funkce spojitě na intervalu $[0, 1]$ splňující $f(0) < g(0)$ a $f(1) > g(1)$, pak nutně existuje $A \in (0, 1)$ takové, že $f(A) = g(A)$."
- (c) [4 b.] Pro přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n(x)$ následovně:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \\ \frac{\sin(x^n)}{x} & \text{pro } x \neq 0. \end{cases}$$

Pro jaká přirozená čísla n je funkce f_n spojitá v bodě $x = 0$?

- (a) [2 b.] Nechť I je otevřený interval a f nechť je funkce definovaná na I . Definujte, co je to *primitivní funkce* k funkci f na intervalu I .
 - (b) [3 b.] Nechť I je otevřený interval. Definujte, co znamená, že funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu I *Darbouxovu vlastnost*.
 - (c) [5 b.] Dokažte větu, podle níž každá funkce f , která má na otevřeném intervalu I primitivní funkci, má na tomto intervalu Darbouxovu vlastnost.
4. (a) [3 b.] Definujme pro $y \in (0, +\infty)$ funkci

$$g(y) = \int_0^y \exp(x^2) dx.$$

Čemu se rovná derivace funkce $g(y)$ v bodě $y = 1$? (Zde není potřeba hledat vzorec pro samotnou funkci g , stačí jen určit její derivaci.)

- [3 b.] Zformulujte větu o substituci pro výpočet primitivní funkce. Nemusíte ji dokazovat. Znáte-li více verzí této věty, zformulujte kteroukoliv z nich.
- [4 b.] Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \exp(\sin(x)) \sin(x) \cos(x)$.