I. MECHANIKA

4. Soustava hmotných bodů II

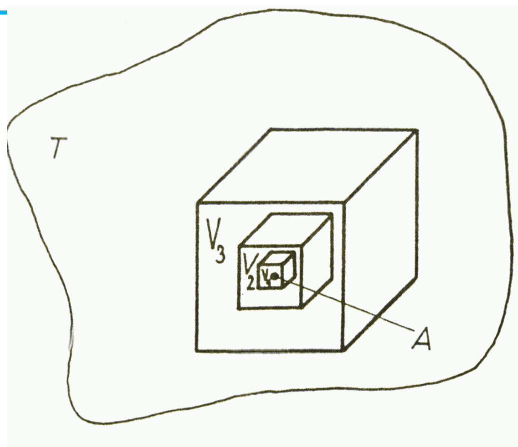
Obsah

- Spojité rozložení hmotnosti.
- Počet stupňů volnosti.
- Kinematika tuhého tělesa.
- Zjednodušení popisu – rotace kolem osy a pevného bodu.
- Chaslesova věta.
- Dynamika tuhého tělesa.
- První a druhá impulsová věta.
- Zjednodušení soustav sil
  - posun referenčního bodu
  - přenesení působiště síly
  - skládání sil
  - umístění momentu dvojice sil
  - přenesení působiště do hmotného středu (doplnění momentu)
- Rovnováha

Co rozumíme tuhým tělesem

- abstrakce reálného tělesa
- rozšíření tuhé soustavy hmotných bodů – vzájemné vzdálenosti jednotlivých bodů se nemění při libovolných silách působících na těleso
- vhodné pro
  - studium rotací
  - pokud nelze zanedbat konečné rozměry reálných těles
- nezahrnuje vlastnosti
  - pružné
  - reologické

Spojité rozložení hmotnosti



- hustota stanovena limitním přechodem $\rho(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$
- při správné interpretaci symbolů lze užít derivaci $\rho = \dfrac{dm}{dV}$
- těleso zadáno rozložením hustoty $\rho(\vec{r})$
- mimo těleso $\rho(\vec{r}) = 0$
- celková hmotnost soustavy $M = \int\limits_V \rho(\vec{r})dV \left(= \iiint\limits_V \rho(\vec{r})dV \right)$

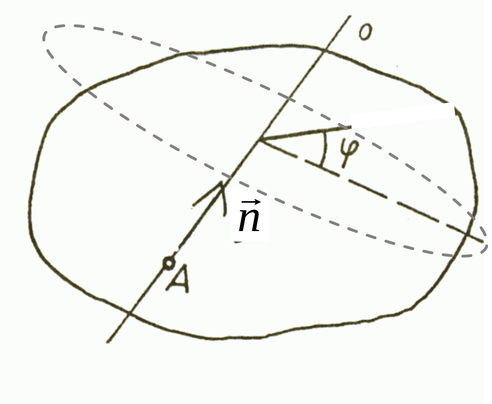
veškerá vyjádření pro soustavu hmotných bodů, kde vystupují sumace přes hmotné body, se pro tuhé těleso mění na prostorové integrály

- obecně:
- diskrétní veličina ... a_n $\rightarrow$ spojitá veličina $a(\vec{r})$
- suma ... $\sum\limits_{n=1}^{N} m_n a_n$ $\rightarrow$ prostorový integrál $\int\limits_V a(\vec{r})\rho(\vec{r})dV$
- poloha hm. středu ... $\vec{r}_s = \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n}{\sum\limits_{n=1}^{N} m_n} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_s = \dfrac{\int\limits_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV}{\int\limits_V \rho(\vec{r})dV} = \dfrac{1}{M}\int\limits_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV$

Počet stupňů volnosti

Tuhá soustava h.b. má 6 stupňů volnosti

- 3 body neležící v přímce (9 stupňů volnosti)
- 3 pevné vzdálenosti mezi nimi (3 vazební podmínky)



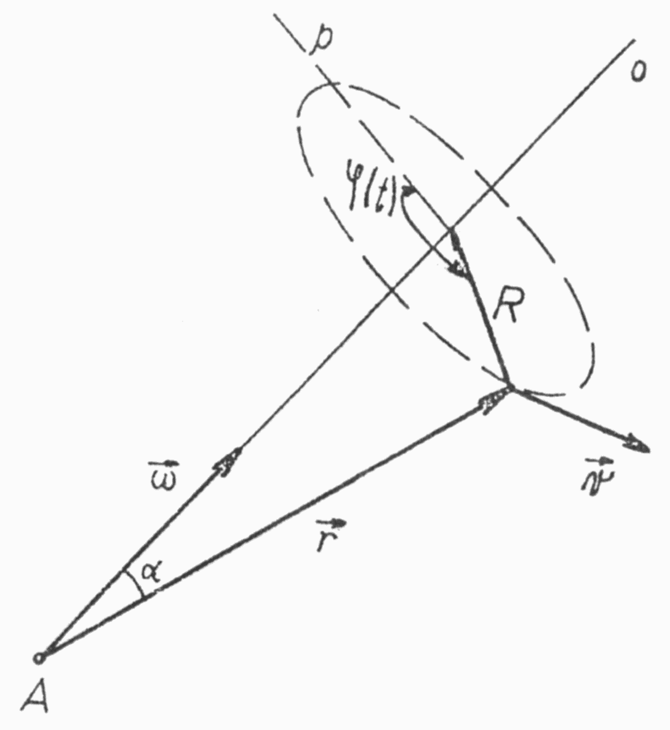
Pro kinematické úvahy se užívá tato skupina parametrů:

- poloha jednoho pevného bodu A v tělese (3 souřadnice)
- osa o procházející tímto bodem (směr určen 2 parametry – 2 směrové úhly nebo 2 nezávislé souřadnice n_1 a n_2 směrového vektoru $\vec{n}$; pro jednotkový směrový vektor platí $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$)
- úhel natočení φ tělesa kolem osy (úhel mezi přímkou pevnou v tělese a přímkou pevnou v prostoru)

Pohyb tuhého tělesa – kinematika

<u>otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy</u>

- bod A a jím procházející osa o zachovávají v tělese i prostoru stálou polohu
- časově proměnná veličina $\varphi = \varphi(t)$
- všechny body (s výjimkou bodů na ose) konají kruhový pohyb se společnou úhlovou rychlostí $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ v rovině kolmé k ose o
- rotaci určuje vektor $\vec{\omega}$, rychlost bodu s polohovým vektorem $\vec{r}$ bude $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



- vektory úhlové rychlosti $\vec{\omega}, \vec{r}$ a $\vec{v}$ tvoří pravotočivý systém

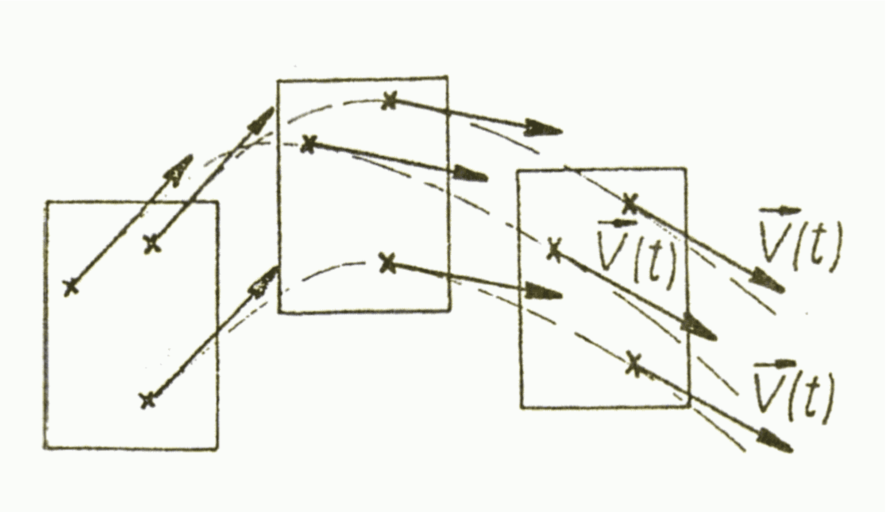
Pohyb tuhého tělesa – kinematika

<u>otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu</u>

- východiskem je *Eulerova věta:* „Otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu lze v každém okamžiku vyjádřit jako otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy procházející pevným bodem.“
- rotaci určuje vektor $\vec{\omega}(t)$
- rychlost bodu s polohovým vektorem $\vec{r}$ bude $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$
- průběžně se mění jak směr osy otáčení, tak velikost úhlové rychlosti

<u>translace (pohyb posuvný, postupný)</u>

- rychlost $\vec{v} = \vec{V}(t)$ všech bodů tělesa je v každém okamžiku stejná
- trajektorie posunuté vzhledem k počáteční poloze bodů

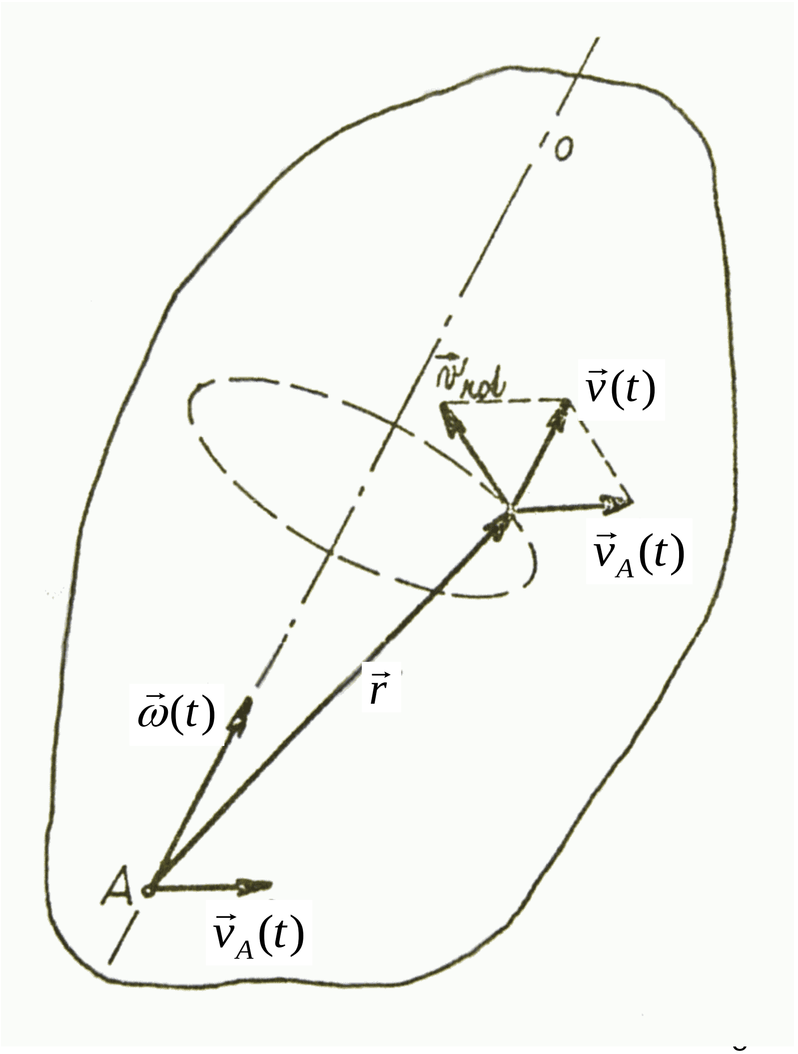


Pohyb tuhého tělesa – kinematika

<u>libovolný pohyb</u>

- východiskem je *Chaslesova věta* ([šál] Michel Chasles, 1793 – 1880, Francie, matematik): „Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z translace a rotace kolem pevného bodu.“
- translace popsána pomocí rychlosti $\vec{v}_A(t)$ referenčního bodu A
- rotaci určuje vektor $\vec{\omega}(t)$, rychlost bodu s polohovým vektorem $\vec{r}$ bude

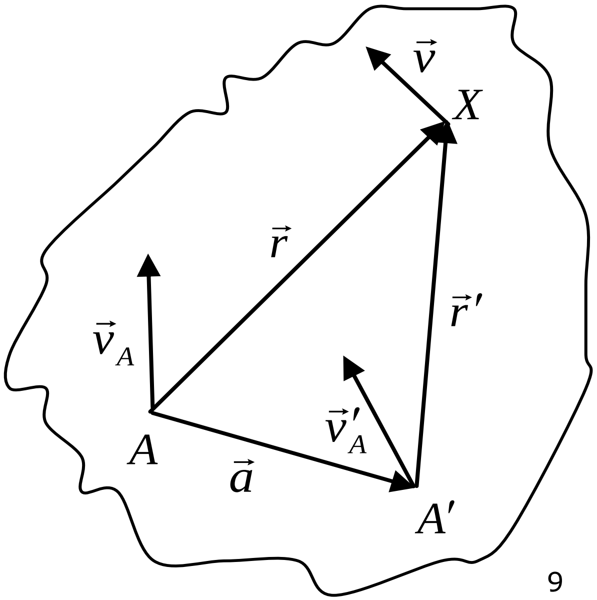
  $\vec{v}(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$
- poloha bodu *A* v tělese není omezena (často hmotný střed)



Pohyb tuhého tělesa – kinematika

jak souvisí parametry pro různé volby?

- rychlosti bodů A a A' jsou obecně různé $\vec{v}_A \neq \vec{v}'_A$
- úhlové rychlosti jsou stejné $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$
- důkaz:
  - vyjádření rychlosti bodu X tělesa pomocí různých referenčních bodů:
$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\vec{v} = \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \times \vec{r}\,'$$
  - vyjádření rychlosti bodu A' pomocí referenčního bodu A: $\vec{v}'_A = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{a}$
  - do vyjádření rychlosti bodu X pomocí referenčního bodu A zavedeme vztah mezi vektory $\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}\,'$
$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{r}\,') =$$
$$= \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{a}}_{\vec{v}'_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$



  - platí tedy současně:
$$\vec{v} = \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \times \vec{r}\,'$$
$$\vec{v} = \vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$
  - porovnáním: $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ q.e.d.

Pohyb tuhého tělesa – kinematika

Důležité:

- funkce $\vec{v}_A = \vec{v}_A(t)$ a $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ určují rychlost v bodě $\vec{r}$, ale ne trajektorii
- určení trajektorie z těchto funkcí není obecně jednoduché

Problém:

- $\vec{r}$ pevný v tělese – je to skutečně polohový vektor určitého bodu, jenže funkci $\vec{r} = \vec{r}(t)$ neznáme, dokud neurčíme trajektorii tělesa
- jiná možnost: $\vec{r}$ pevný v prostoru – ukazuje pro různá *t* na různé body tělesa

Dynamika tuhého tělesa

pohybové rovnice soustavy hmotných bodů

$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}^E$ 1. impulsová věta

$\frac{d}{dt}\vec{B} = \vec{M}^E$ 2. impulsová věta

6 skalárních rovnic $\rightarrow$ 6 nezávislých funkcí např. $\vec{v}_A = \vec{v}_A(t)$ a $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

<u>1. impulsová věta</u> $\rightarrow$ věta o pohybu hmotného středu soustavy $M\vec{a}_s = \vec{F}^E$,

referenční bod *A* umístíme do hmotného středu soustavy, dále budeme značit

$\vec{v}_A \rightarrow \vec{v}_S$, dostaneme rovnici pro $\vec{v}_S$: $M\frac{d\vec{v}_S}{dt} = \vec{F}^E$, jejím řešením bude $\vec{v}_S = \vec{v}_S(t)$

Hmotný střed soustavy se pohybuje jako h.b., který má hmotnost rovnu celkové hm. soustavy a na nějž působí výslednice vnějších sil $\vec{F}^E$ působících na soustavu.

$\rightarrow$ možnost studovat metodami dynamiky hmotného bodu

$\rightarrow$ např. těleso v tíhovém poli – hm. střed se pohybuje po trajektorii některého vrhu

<u>2. impulsová věta</u> – analogickou rovnici pro $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ není zdaleka tak snadné získat

Zjednodušení sil působících na těleso

$$\vec{F}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{E}$$

$$\vec{M}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E} = \sum_{i=1}^{N} M_i^{E}$$

různé soustavy vnějších sil, jejichž $\vec{F}^{E}$ a $\vec{M}^{E}$ (vyjádřený vzhledem k témuž bodu) jsou stejné, mají na stejné těleso <u>stejný dynamický účinek</u>, tj. jsou <u>dynamicky ekvivalentní</u>

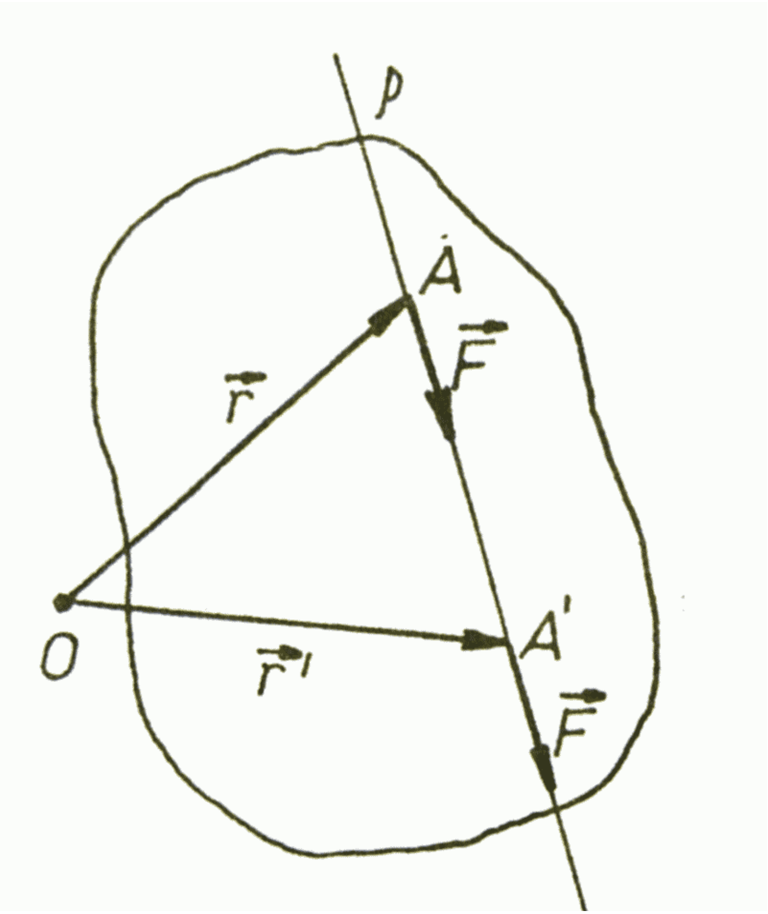
Úpravy soustavy sil při zachování $\vec{F}^{E}$ a $\vec{M}^{E}$

- zjednodušení nebo zpřehlednění problému
- pro technické aplikace

Přenesení působiště síly podél přímky

přenesení působiště síly podél „vektorové přímky“

- zachová působení síly i moment k lib. bodu (přímka se nezmění a tedy ani její vzdálenost od libovolného bodu)



Přesun referenčního bodu momentu sil

přesun referenčního bodu pro výpočet momentu sil $O \to O'$

- moment sil vzhledem k bodu O:

$$\vec{M}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E}$$

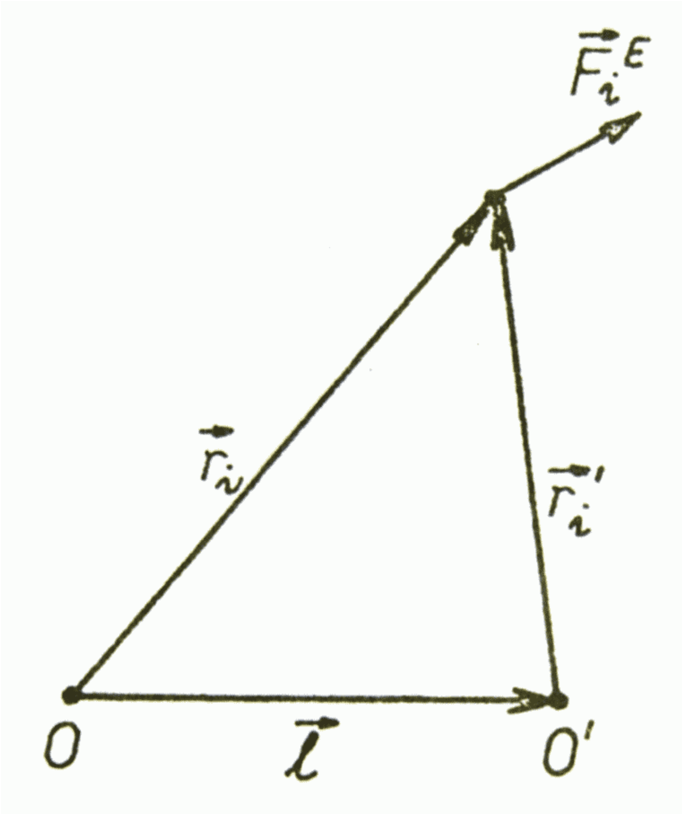
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{l}$$

- moment sil vzhledem k bodu O':

$$\vec{M}'^{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{E} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{l}\,) \times \vec{F}_i^{E} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E}}_{\vec{M}^{E}} - \vec{l} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{E}}_{\vec{F}^{E}} = \vec{M}^{E} - \vec{l} \times \vec{F}^{E}$$

- důsledky:
  - $\vec{F}^{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}'^{E} = \vec{M}^{E}$
  - $\vec{l} \parallel \vec{F}^{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}'^{E} = \vec{M}^{E}$

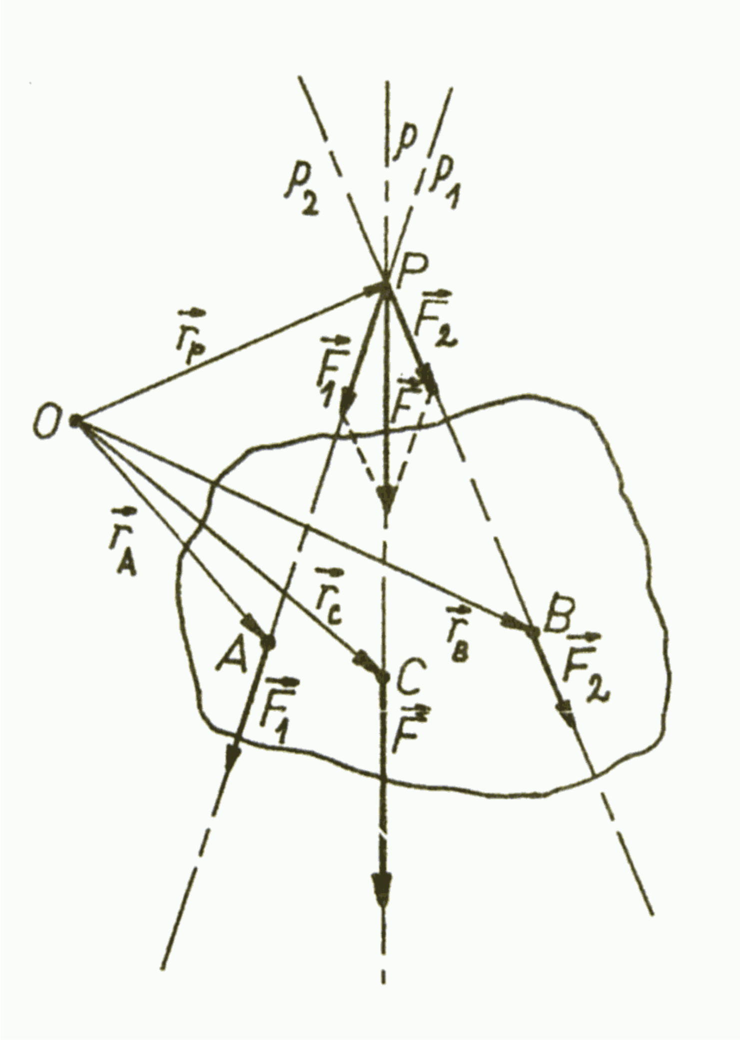


Skládání různoběžných sil

- přenos do průsečíku P „vektorových přímek“ p_1 a p_2
- složení $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
- přenos po „vektorové přímce“ p do libovolného vhodného bodu C
- zachovává celkový moment sil:

$$\underbrace{\vec{r}_A \times \vec{F}_1}_{\vec{r}_P \times \vec{F}_1} + \underbrace{\vec{r}_B \times \vec{F}_2}_{\vec{r}_P \times \vec{F}_2} = \vec{r}_P \times \vec{F}_1 + \vec{r}_P \times \vec{F}_2 =$$

$$= \vec{r}_P \times \underbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)}_{\vec{F}} = \vec{r}_C \times \vec{F}$$

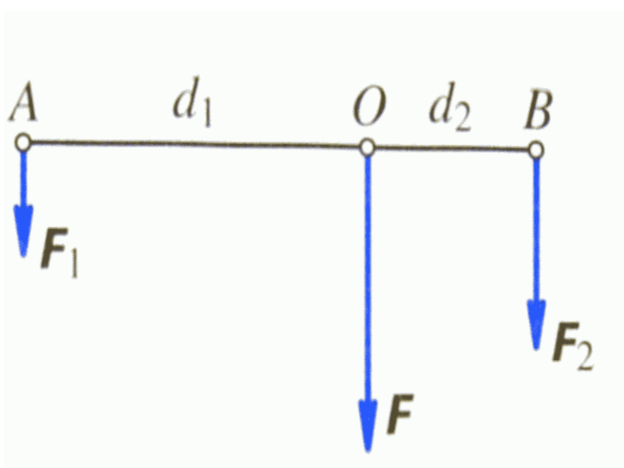


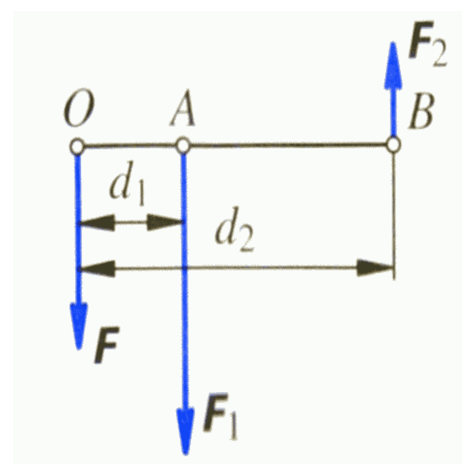
Skládání rovnoběžných sil

- velikost výslednice je součet/rozdíl velikostí
- působiště výslednice nutno hledat z rovnosti momentů
- nejjednodušší úvaha: výslednice má vzhledem k svému působišti nulový moment

$\rightarrow$ momenty složek se musí vzhledem k tomuto bodu kompenzovat $d_1 F_1 = d_2 F_2$ $\rightarrow$

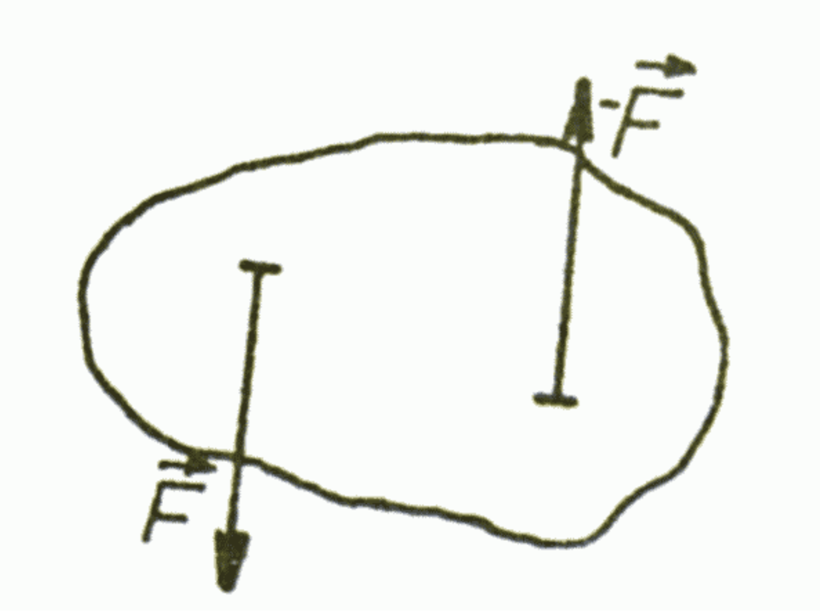
ramena budou v opačném poměru velikostí složek $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{d_2}{d_1}$





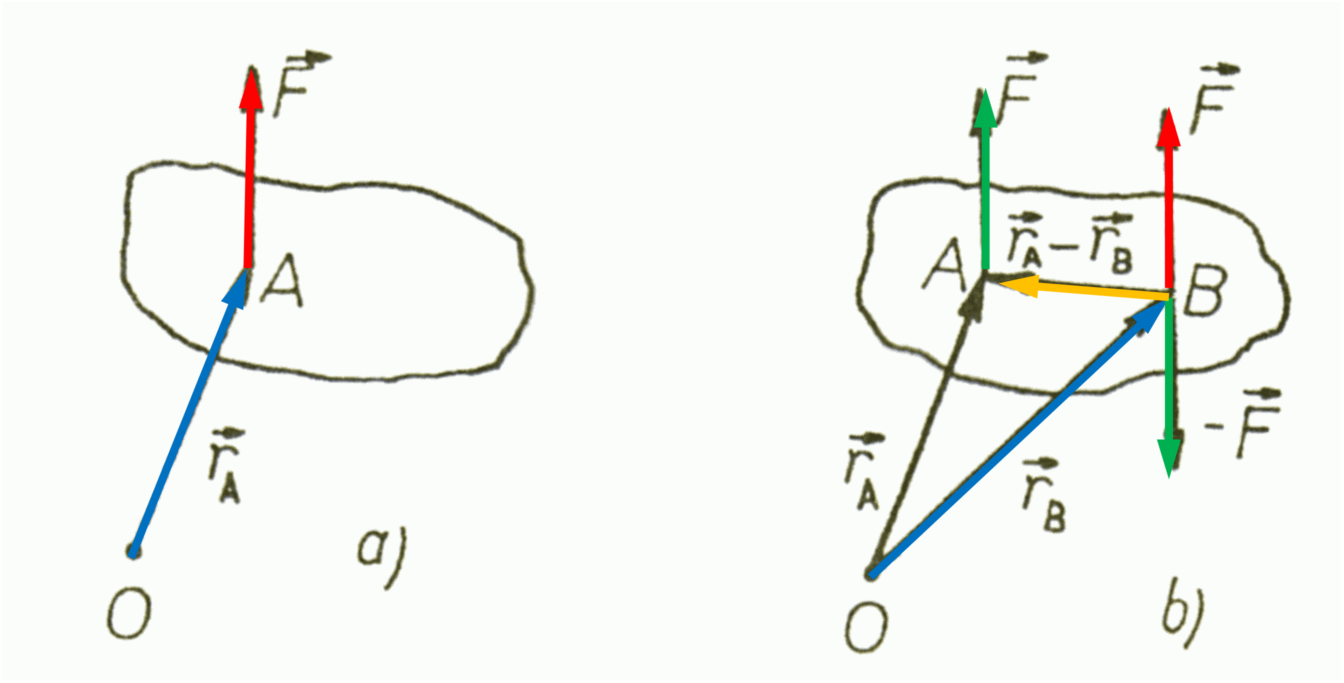
Dvojice sil – stejné antiparalelní síly

- výslednice nulová $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$
- výsledný moment $\vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = \underbrace{(\vec{r}_A - \vec{r}_B)}_{\vec{d}} \times \vec{F} = \vec{d} \times \vec{F} \neq 0$
- moment dvojice $\vec{M}^D = \vec{d} \times \vec{F} = l\,|\vec{F}\,|$, kde *l* je vzdálenost vektorů
- <u>poloha bodu, vůči němuž byly momenty počítány, nemá vliv na výsledek</u>



Přenesení síly do jiného bodu

- při přenosu síly $\vec{F}$ z bodu A do bodu B se její dynamický účinek na těleso nezmění, doplníme-li sílu $\vec{F}$ v bodu B silovou dvojicí s momentem $\vec{M}^D = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$. Platí totiž $\underbrace{\vec{r}_A \times \vec{F}}_{\vec{M}_A} = \underbrace{\vec{r}_B \times \vec{F}}_{\vec{M}_B} + \underbrace{\underbrace{(\vec{r}_A - \vec{r}_B)}_{\vec{d}} \times \vec{F}}_{\vec{M}^D}$.



Skládání mimoběžných sil

- nalézt vzdálenost mimoběžek
- posunout jednu ze sil po této úsečce (kolmá k síle)
- doplnit moment dvojice (ramenem bude vzdálenost mimoběžek)
- výsledkem jsou síly různoběžné, které se složí výše popsaným způsobem

Přenesení sil do hmotného středu

přenesení všech vnějších sil působících na těleso do hmotného středu

- výslednice vnějších sil $$\vec{F}^E = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^E$$
- celkový moment po přenesení $$\vec{M}^E = \vec{M}^D + \vec{r}_S \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^E$$

  (vzhledem k počátku souřadnic)
- moment $\vec{M}^D$ je *výsledný moment silové dvojice* (= součet momentů silových dvojic přidaných při přenášení sil do hmotného středu)

Hmotný střed v homogenním tíhovém poli

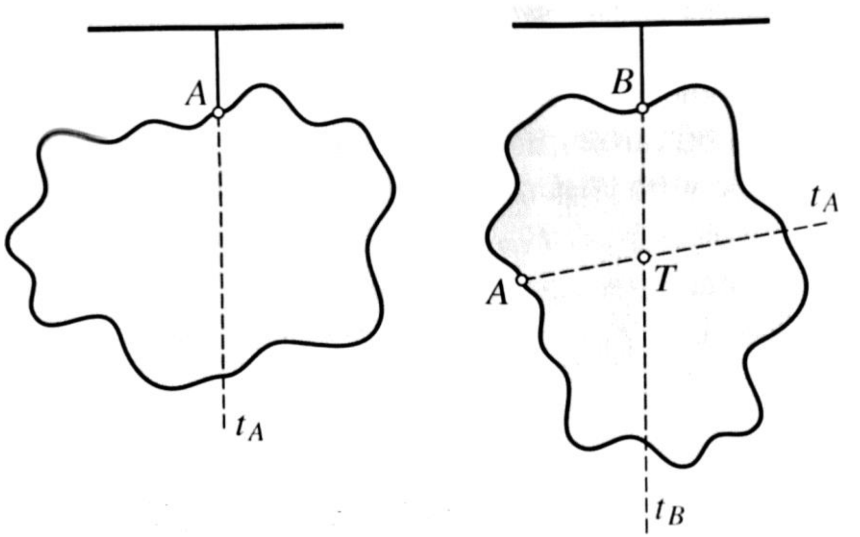
- těleso v homogenním tíhovém poli
- popsaným postupem přeneseme síly působící na jednotlivé h.b. tělesa do hmotného středu
- výslednice vnějších sil po přenosu $\vec{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{g} = M\vec{g}$
- celkový moment po přenesení $\vec{M}^G = \vec{M}^D + \vec{r}_S \times M\vec{g}$

  (vzhledem k počátku souřadnic)
- celkový moment před přenesením $\vec{M}^G = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i \right)}_{\vec{r}_S M} \times \vec{g} = \vec{r}_S \times M\vec{g}$
- porovnáním vidíme, že výsledný moment silové dvojice tíhových sil je nulový

$$\vec{M}^D = 0$$

Závěr: Soustavu sil, které působí na tuhé těleso v homogenním tíhovém poli, lze nahradit jedinou silou – tíhovou silou – umístěnou v hmotném středu tělesa.

Hmotný střed versus těžiště



- působiště tíhové síly v homogenním tíhovém poli – průsečík těžnic
- v homogenním tíhovém poli těžiště splývá s hmotným středem

- v nehomogenním poli těžiště (na rozdíl od hmotného středu) neexistuje, protože těžnice se neprotínají v jediném bodě!

Rovnováha tuhého tělesa

- výslednice vnějších sil $\vec{F}^E = 0$
- v důsledku je celkový moment roven výslednému momentu silové dvojice, a ten je nezávislý na vztažném bodu
- celkový moment $\vec{M}^E = 0$ (platí-li pro některý bod, platí pro každý bod)

Jak se chová těleso v rovnováze?

- těleso zůstává v předchozím stavu
- hmotný střed v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu
- otáčení kolem hm. středu je druhou podmínkou jen poněkud omezeno

Těleso podrobené vazbám

- výhodné využít energetických úvah
- rovnovážná poloha – minimum potenciální energie