

Name:

|   |   |   |   |          |
|---|---|---|---|----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|   |   |   |   |          |

---

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- 4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.
- Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
- Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.
- Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
- Číselné výsledky tvaru  $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$  apod. není potřeba dále zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.

- 
1. (a) Zadefinujte zobecněné kombinační číslo.  
(b) Zformulujte zobecněnou binomickou větu.  
(c) Vyjádřete koeficient u  $x^5$  v rozvoji  $\sqrt{1+4x}$  jako dvojmístné číslo.

[6 points]

2. (a) Zformulujte Hallovu větu.
- (b) Uvažme bipartitní graf  $G$  s partitami  $A, B$  velikostí  $|A| = |B| = 10$ , ve kterém má každý vrchol stupeň *alespoň*  $k$ . Zajímá nás, jestli má graf  $G$  nutně perfektní párování.
- i. Dokažte, že pro  $k = 4$  je odpověď “ne”.
  - ii. Dokažte, že pro  $k = 5$  je odpověď “ano”.
- [8 points]

3. (a) Zformulujte větu o grafech bez čtyřcyklů.
- (b) Je dán 10-regulární graf  $G$  na 27 vrcholech. Dokažte, že graf  $G$  obsahuje  $K_{2,3}$  jako podgraf. (Hint: počítejte “trojtřešně”.) [9 points]

4. (a) Zdefinujte pojem kombinatorická koule nad abecedou  $\{0, 1\}$ .
- (b) Zformulujte Gilbert-Varshamov odhad na velikost  $(n, k, d)$ -kódu nad abecedou  $\{0, 1\}$ .
- (c) V databázi je potřeba každému uživateli přiřadit 5místný PIN-kód z číslic  $0 - 9$ . Chcete si předem připravit sadu PIN-kódů tak, aby se každé dva z nich lišily na aspoň dvou pozicích. Dokažte, že existuje taková sada o 2 000 PIN-kódech. [7 points]

*Extra page 1/2 if you need it.*

---

*Extra page 2/2 if you need it.*

---