

Cvičení 1 – Eukleidés a Bézout

30. září 2025

Příklad 1. Najděte následující hodnoty:

- a) $\text{NSD}(104, 168)$, $\text{nsn}(104, 168)$,
- b) $\text{NSD}(728, 1001)$, $\text{nsn}(728, 1001)$,
- c) $\text{NSD}(F_n, F_{n+1})$, $\text{nsn}(F_n, F_{n+1})$,
- d) $\text{NSD}(2k+1, 3k-1)$, $\text{nsn}(2k+1, 3k-1)$.

Příklad 2. V supermarketu prodávají mléčnou, bílou a hořkou čokoládu, všechny za stejnou cenu. Jednoho krásného dne činila tržba za prodanou mléčnou čokoládu 270,-, za bílou čokoládu 189,- a za hořkou 216,-. Kolik nejméně tabulek čokolády se ten den mohlo prodat?

Příklad 3. Určete Bézoutovy koeficienty pro následující dvojice:

- a) 1023, 96;
- b) 104, 168;
- c) $2k+1$, $3k-1$.

Příklad 4. Najděte celočíselná řešení následujících rovnic:

- a) $1023x + 96y = 18$,
- b) $18x + 24y = 5$,
- c) $18x + 24y = 12$.

Příklad 5. Spočítejte 10^{-1} v $\mathbb{Z}_{37}$.

Příklad 6. Spočítejte 27^{-1} v $\mathbb{Z}_{41}$.

Příklad 7. Spočítejte 8^{-1} a 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{27}$. Zamyslete se, proč tomu tak je.

Příklad 8. Spočítejte následující rovnice:

- a) $5 - 3x \equiv 4 \pmod{7}$,
- b) $11 + 4x \equiv 7 \pmod{12}$,
- c) $4x + 7 \equiv 3 - 6x \pmod{8}$,

Příklad 9. Ukažte, že $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ pro všechna lichá $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 10. Vyřešte následující rovnici: $x^2 + 5x \equiv 0 \pmod{19}$.

Příklad 11. Vyřešte následující rovnici: $x^2 + 10x + 6 \equiv 0 \pmod{17}$.

Příklad 12. Pomocí modulární matematiky odvoďte kritéria dělitelnosti 9 a 11.