Lineární algebra II (pro fyziky)

Exponenciála

Dalibor Šmíd

MFF UK

Na vektorovém prostoru $\mathbb{C}^{m\times n}$ definujme *maticovou normu* předpisem $\|B\| := \max_{i,j} |(B)_{ij}|$. Není indukovaná skalárním součinem ♣, ale umožňuje definovat na $\mathbb{C}^{m\times n}$ strukturu metrického prostoru ♣. Je-li $(B_q)_{q=0}^{\infty}$ posloupnost matic z $\mathbb{C}^{m\times n}$. Pak matice B je její definována jako její limita, právě když

$$\lim_{q\to\infty} \|B_q - B\| = 0$$

To je ekvivalentní ♣ podmínce $\forall i,j : \lim_{q\to\infty}(B_q)_{ij} = B_{ij}$. Můžeme pak definovat součet nekonečné řady matic jako limitu posloupnosti částečných součtů. Nejužitečnějším příkladem je *exponenciála matice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\exp A := \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} A^q$$

Platí ♣, že $\forall A, \forall i,j$ je $\sum_q \frac{1}{q!}(A^q)_{ij}$ absolutně konvergentní řada.

Příklady a vlastnosti ♣:

- $\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \begin{pmatrix} a^q & 0 \\ 0 & b^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$
- $\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$
- $\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$
- $\exp J_{0,k} = E + J_{0,k} + \frac{1}{2}(J_{0,k})^2 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(J_{0,k})^{k-1}$
- Pokud $AB = BA$, pak $\exp(A+B) = \exp A \exp B$
- $\exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$
- $\exp J_{\lambda,k} = e^\lambda \exp J_{0,k}$
- $\exp Q^{-1}AQ = Q^{-1}(\exp A)Q$
- $\exp 0 = E$
- $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$, tedy $\exp A$ je vždy regulární.

Z těchto vlastností a Jordanova tvaru lze spočíst $\exp A$ vždy.

Derivaci maticové funkce $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m\times n}$ definujeme jako

$$\frac{d}{dt}A(t) \equiv \dot{A}(t) := \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h},$$

tedy jako derivaci po jednotlivých elementech matice. Pak platí

Tvrzení

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$$

Důkaz.

Mocninná řada $\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}(A^q)_{ij}t^q$ má poloměr konvergence ∞ a dá se tedy derivovat člen po členu pro libovolné t. Výsledkem je mocninná řada

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q-1)!}(A^q)_{ij}t^{q-1} = (A\exp(tA))_{ij}$$

□

Příklad

Hledáme dvě funkce $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ splňující rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$. Zadání můžeme kompaktně přepsat jako

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \text{ kde } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}(0) = (2,1)^T$$

Taková úloha se nazývá homogenní soustavou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Ukážeme, že její obecné řešení má tvar $\mathbf{x}(t) = \exp(tA)\mathbf{x}(0)$.

VĚTA

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$. *Pak jediná funkce* $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, *splňující rovnici* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ *s počáteční podmínkou* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ *je* $\mathbf{x}(t) = \exp(tA)\mathbf{c}$.

DŮKAZ.

Rovnosti $\mathbf{x}(0) = \exp(0)\mathbf{c} = \mathbf{c}$ a $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\exp(tA)\mathbf{c} = A\mathbf{x}(t)$ jsou pro $\mathbf{x}(t)$ z věty splněny. Pokud by $\mathbf{y}(t)$ splňovalo tyto rovnosti také, pak platí

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(-tA)\mathbf{y}(t)) &= \exp(-tA)\dot{\mathbf{y}}(t) + (-A)\exp(-tA)\mathbf{y}(t) \\ &= \exp(-tA)\left[A\mathbf{y}(t) - A\mathbf{y}(t)\right] = 0,\end{aligned}$$

tedy $\exp(-tA)\mathbf{y}(t) =: \mathbf{d}$ je konstantní vektor. Protože $\mathbf{y}(0) = \mathbf{c}$, platí $\mathbf{d} = \mathbf{c}$. Tedy $\mathbf{y}(t) = \exp(tA)\mathbf{c} \equiv \mathbf{x}(t)$. $\square$

V příkladu $\sigma(A) = \{1, -3\}$, příslušné vlastní vektory volme $\mathbf{v}_1 := (1, -2)^T$ a $\mathbf{v}_2 := (1, 2)^T$. Pak lze A diagonalizovat:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic je tedy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + 5e^{-3t} \\ -6e^t + 10e^{-3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativně můžeme také reprezentovat $\mathbf{x}(t)$ vzhledem k bázi z vlastních vektorů jako $\mathbf{x}(t) = x_1'(t)\mathbf{v}_1 + x_2'(t)\mathbf{v}_2$. Pak

$$\dot{x}_1'(t)\mathbf{v}_1 + \dot{x}_2'(t)\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) = x_1'(t)A\mathbf{v}_1 + x_2'(t)A\mathbf{v}_2$$

Z $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_2$ pak dostáváme řešení

$$x_1'(t) = e^t x_1'(0), \quad x_2'(t) = e^{-3t} x_2'(0)$$

Na soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty lze převést i soustavy řádů vyšších. Jednoduchým příkladem je rovnice harmonického oscilátoru

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t)$$

Definicí $x_1(t) := \dot{y}(t)$ a $x_2(t) := \omega\dot{y}(t)$, lze rovnici přepsat jako

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

a tuto soustavu pak vyřešit:

$$\mathbf{x}(t) = \exp t \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Tím dostáváme standardní řešení harmonického oscilátoru ve tvaru

$$y(t) = \frac{1}{\omega} x_2(t) = \frac{1}{\omega}\dot{y}(0)\sin\omega t + y(0)\cos\omega t$$

Věta

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$. *Pak všechna řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

jsou tvaru $\mathbf{x}(t) = \exp(tA)\mathbf{c}(t)$, *kde* $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ *je funkce splňující* $\dot{\mathbf{c}}(t) = \exp(-tA)\mathbf{b}(t)$.

Důkaz.

Pokud $\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)$ jsou dvě řešení soustavy $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$, pak jejich rozdíl $\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$ je řešením homogenní soustavy $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Stačí tedy najít partikulární řešení nehomogenní soustavy. Pokud ho budeme hledat ve tvaru $\mathbf{x}_P(t) = \exp(tA)\mathbf{c}(t)$, pak dosazením do rovnice dostáváme právě $\dot{\mathbf{c}}(t) = \exp(-tA)\mathbf{b}(t)$. Obecné řešení nehomogenní soustavy je

$$\mathbf{x}(t) = \exp(tA)\mathbf{c}(t) + \exp(tA)\mathbf{d} = \exp(tA)(\mathbf{c}(t) + \mathbf{d}),$$

a protože $\frac{d}{dt}(\mathbf{c}(t) + \mathbf{d}) = \dot{\mathbf{c}}(t)$, mají všechna řešení požadovaný tvar. $\square$