
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

1. Zápočtová písemka 07. 11. 2018

(Celkově 20 bodů | Čas: 90 minut)

1. (10 bodů) Uvažujme náhodný výběr X_1, \dots, X_n s hustotou danou předpisem

$$f(x) = 4\theta^4 x^{-5} 1_{[\theta, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

- (a) Najděte odhad $\tilde{\theta}$ parametru θ momentovou metodou. [1]
- (b) Vyšetřete nestrannost a konzistenci $\tilde{\theta}$. [1]
- (c) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$ parametru θ . [2]
- (d) Spočítejte distribuční funkci a příslušnou hustotu odhadu $\hat{\theta}$. [2]
- (e) Spočítejte střední hodnotu odhadu $\hat{\theta}$. Na základě tohoto výsledku navrhněte nestranný odhad θ^* parametru θ . [1]
- (f) Ukažte, že $\hat{\theta}$ je konzistentní bez užití obecných vlastností maximálně věrohodného odhadu parametru. [1]
- (g) Najděte rozptyl $\tilde{\theta}$ a θ^* a porovnejte rychlost konvergence rozptylů k 0 při $n \rightarrow \infty$. [2]

2. (10 bodů) Uvažujme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = (\theta + 1)x^\theta 1_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

kde $\theta > -1$ je neznámý parametr.

- (a) Najděte odhad parametru θ momentovou metodou. [1]
- (b) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$ parametru θ . [2]
- (c) Pomocí transformace $Y_i = -\log X_i$ zkonstruujte přesný interval spolehlivosti pro parametr θ s hladinou spolehlivosti $1 - \alpha$. [2]
- (d) Zkonstruujte přibližný $100(1 - \alpha)\%$ interval spolehlivosti pro parametr θ pomocí předchozí transformace a CLV. [2]
- (e) Zkonstruujte přibližný $100(1 - \alpha)\%$ interval spolehlivosti pro parametr θ využitím vlastností maximálně věrohodného odhadu, přičemž asymptotický rozptyl odhadu nahradíte odhadem asymptotického rozptylu odhadu. [2]
- (f) Najděte distribuční funkci a příslušnou hustotu poslední pořadové statistiky, t.j. náhodné veličny $Z = \max_{i=1, \dots, n} X_i$. [1]