Hodně štěstí ke zkouškám, nestresujte se a hlavně se nezapomínejte smát, úsměv vždy pomůže. Váš Jidáš

Tahák na písemnou zkoušku z MA 20/21

Limity $x \to \infty$, $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$

$$1 << \log x << \sqrt[a]{x} << x << x^a << a^x << x! << x^x$$

$$\sqrt[x]{a-1} \to 1, \qquad \sqrt[x]{x} \to 1, \qquad \sqrt[x]{x!} \to \infty, \qquad \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b.$$

Limity $x \to 0$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \qquad \frac{\log(1+x)}{x} \to 1, \qquad \frac{e^x - 1}{x} \to 1, \qquad \frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}, \qquad \frac{\tan x}{x} \to 1, \qquad \frac{1}{0_\pm} = \pm\infty$$

Derivace $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $x_+ > 0$, $x_1 \in (-1, 1)$

$$c' = 0, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}, \qquad \left(x_+^a\right)' = ax_+^{a-1}, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\exp x)' = \exp x, \qquad (\log x_+)' = \frac{1}{x_+}, \qquad (\arcsin x_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}}, \qquad (\arccos x_1)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \qquad (\operatorname{abs} x)' = \operatorname{sgn} x \text{ (kromě 0, kde neexistuje)},$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right), \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}).$$

Taylorovy polynomy v bodě $x = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^a = 1 + a \cdot x + \frac{a \cdot (a-1)}{2!} x^2 + \ldots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n).$$

Vyšetření funkce

Definiční obor a spojitost. Průsečíky. Symetrie (lichost, sudost, periodicita). Limity. Derivace. Monotonie a extrémy (lokální, globální). Druhá derivace. Konvexita, konkavita, inflexní body. Asymptoty. Graf a obor hodnot.

Zbytky Taylorova polynomu $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, x)$

$$\text{Lagrangeův}: f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi_1) \cdot (x-a)^{n+1},$$
$$\text{Cauchyův}: f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi_2) \cdot (x-\xi_2)^n \cdot (x-a),$$
$$\text{Taylorův}: f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-\xi)^n.$$

Věty

Aritmetika limit (+ Binomická věta*), věta o složené funkci (S, P), L'Hopital, Heine, POLICIE (strážníci, Anděl, Ďábel), omezená krát nulová = nulová, bezejmenná věta o dělení nulou, limita a uspořádání, jednoznačnost limity, Bolzano-Cauchyova podmínka, limita vybrané posloupnosti, věta o (limitě) monotónní posloupnosti, věty o hromadných bodech a limsup s liminf.

Aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce, vztah derivace a monotonie, derivace a limita derivace (spojitá funkce), vztah druhé derivace a konvexity / konkavity.

Spojité funkce†, $a \in \mathbb{R}$

$$(x^a), \log, \exp, \sin, \cos, (\tan), (\mathrm{cotg}), \arcsin, \arccos, \arctan, \mathrm{arccotg}, \mathrm{abs}, (\mathrm{sgn}).$$

Dále: složení, součet, rozdíl, součin a násobek spojitých funkcí‡.

Funkce pro vyvracení tvrzení

$$(-1)^n, \mathrm{abs}, \mathrm{sgn}, \sin\frac{1}{x}, f = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x > 0 \\ x^3 & \text{pro } x < 0 \end{cases}, \text{Dirichletova}, \text{Riemannova}^{\S}, \text{Weierstrassova}, \text{Cantorovo diskontinuum}.$$

Nemá limitu ani limitu součtu, ale má třeba limitu průměru. Nemá derivaci v nule, ale je spojitá. V nule má derivaci (nevlastní), ale není spojitá. Na libovolném okolí nuly není prostá. V nule nemá druhou derivaci, ale první ano. Není monotónní ani spojitá ani nemá jednostranné derivace, ale zato má spoustu maxim a minim. Je spojitá právě v iracionálních bodech. Je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale nemá nikde derivaci. Je opravdu divné.

Další $x, c, d > 0$, n liché

$$x^y = \exp(y \log(x)), \qquad \sqrt{c} - \sqrt{d} = \frac{c-d}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}, \qquad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}^2},$$
$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + ba^{n-2} + \ldots + b^{n-1}\right), \qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Zdroje:
- `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~hencl/prednaska.pdf`
- `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/priklady.pdf`
- `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pernecka/ZS2009-2010/stvrtok/derivace.pdf`
- `https://github.com/JoHavel/MFFNotes/blob/master/OM1/MatAnalyza/MatAnalyza.pdf`

*Pozor, 'platí' pouze pro konstantní mocninu, tj. ne pro $(\ldots)^x$ a $(\ldots)^n$.

†Funkce v () jsou spojité jen na nějakém intervalu.

‡Podíl chybí schválně!

§Riemannova, ne Riemannova ζ

Goniometrické identity[¶]

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \tan x \cdot \operatorname{cotg} x = 1.$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \tan(-x) = -\tan x, \qquad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin x, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}, \qquad \operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}.$$

Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cotg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}, \qquad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2},$$
$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}, \qquad \operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}, \qquad \tan x \pm \operatorname{cotg} y = \pm \frac{\cos(y \mp x)}{\cos x \sin y}.$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right], \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right],$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right], \qquad \tan x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{\tan x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x + \tan y},$$
$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}, \qquad \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\tan x + \tan y}.$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}, \qquad \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{cotg} x}.$$

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \qquad \left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \qquad \left|\tan \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \qquad \left|\operatorname{cotg} \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \qquad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x), \qquad \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x).$$

Logaritmy

$$\log(xy) = \log x + \log y, \qquad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \qquad \log\left(x^y\right) = y \log(x), \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

[¶]Zdroj `https://cs.wikipedia.org/wiki/Goniometrick%C3%A1_funkce`.