

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
2. 9. 2026

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
 - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
 - *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
 - *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
 - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
 - *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x-5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
 - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*
-

1. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x^2 + \frac{1}{x}) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

- (a) [3 b.] Rozhodněte, zda je tato funkce spojitá v bodě 0, případně zda je v tomto bodě aspoň spojitá zleva či zprava.
- (b) [3 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy této funkce a určete, o jaký druh extrému se jedná (zda globální či jen lokální, zda minimum nebo maximum).
- (c) [4 b.] Je tato funkce konvexní či konkávní na intervalu $(0, +\infty)$? Je tato funkce konvexní či konkávní na $\mathbb{R}$?
2. (a) [3 b.] Nechť L je reálné číslo a nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Definujte, co znamená, že posloupnost (a_n) má limitu L .
- (b) [3 b.] Rozhodněte (a zdůvodněte), zda je následující tvrzení pravdivé:
“Jestliže L je reálné číslo a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, pro niž platí $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = L$, pak pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem $a_n = f(\frac{1}{n})$ platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.”
- (c) [4 b.] Uvažujme posloupnost (a_n) definovanou vztahem $a_n = (n + (-1)^n) \cdot (\exp(\frac{1}{n}) - 1)$. Má tato posloupnost limitu, a pokud ano, čemu se rovná?
3. (a) [3 b.] Definujte, co znamená, že funkce f je *konvexní* na intervalu I .
- (b) [3 b.] Zformulujte tvrzení, které dává do souvislosti konvexitu funkce f na daném intervalu I s hodnotami derivace f' na I . Nemusíte to tvrzení dokazovat.
- (c) [4 b.] Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá nezáporná rostoucí funkce. Pro $t > 0$ označme $g(t)$ obsah plochy pod grafem funkce f na intervalu $[0, t]$, tedy jinými slovy obsah plochy ohraničené zleva přímkou $x = 0$, zprava přímkou $x = t$, zdola osou x a shora grafem funkce f . Dokažte, že funkce g je konvexní na $(0, +\infty)$.
4. (a) [3 b.] Zformulujte tvrzení známé jako ‘kritérium riemannovské integrovatelnosti’, které dává do souvislosti existenci Riemannova integrálu s hodnotami Riemannových sum. Nemusíte to tvrzení dokazovat.
- (b) [4 b.] Nechť $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0, 1]$. Definujme funkci $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = f(\frac{x}{2})$. Plyne z této definice, že g je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0, 2]$?
- (c) [3 b.] Spočítejte

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx.$$