MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2025–2026
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA E

LUBOŠ PICK

Příklad E1. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\pi}{4}\sqrt{9-y^2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right),$$

definovaná na intervalu $(-\pi,\pi)$. **(10 bodů)**

Příklad E2. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 3y + e^{2t} \\ y' &= 2x + 2y + e^{2t} \end{aligned}$$

pro diferencovatelné funkce x, y proměnné t.

(a) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy.

(b) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = -2$, $y(0) = \frac{3}{2}$.

(c) Určete množinu všech $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pro která platí: tvoří-li dvojice funkcí x, y maximální řešení uvedené soustavy vyhovující podmínce $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, potom jsou funkce $x(t)e^{-2t}$ a $y(t)e^{-2t}$ omezené na intervalu $[0,\infty)$. **(10 bodů)**

Příklad E3. Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \sin(\pi z), \\ v &= \log y + \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{z}\right), \\ w &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [0, 1, e^2 + 3]$ diferencovatelné funkce x, y, z proměnných u, v, w, pro které platí $x(0, 1, e^2+3) = 0$, $y(0, 1, e^2+3) = e$, $z(0, 1, e^2+3) = 2$. Rozhodněte, zda má funkce y totální diferenciál v bodě $[0, 1, e^2 + 3]$, a pokud ano, spočtěte $\frac{\partial y}{\partial u}(0, 1, e^2 + 3)$. **(10 bodů)**

Příklad E4. Nalezněte všechny globální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2y$$

na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Zdůvodněte existenci globálních extrémů. **(10 bodů)**

Příklad E5. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy buď je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

(a) A, B jsou křivkově souvislé a $A \cap B \neq \emptyset$ $\quad\Rightarrow\quad$ $A \cup B$ je křivkově souvislá.

(b) A je křivkově souvislá $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathrm{Int}\,A$ je křivkově souvislá.

(10 bodů)

$\boxed{E1}$ Nalezněte všechna maximální řešení dif. rovnice

$$(E1\text{-}1) \quad y' = \frac{\pi}{4}\sqrt{9-y^2}\,\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

definovaná na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Řešení: Položme $I = (-\pi, \pi)$ a

$$h(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in I.$$

Singulárními řešeními rovnice (E1-1) jsou

$$y = 3, \ x \in I \quad \text{a} \quad y = -3, \ x \in I.$$

Položme

$$g(y) = \sqrt{9-y^2},$$

potom $D(g) = [-3, 3]$, a tedy jediný maximální otevřený interval obsažený v $D(g)$ je $(-3,3)$, položme tedy $J = (-3,3)$. Hledáme tedy řešení rovnice (E1-1) definovaná někde v I s hodnotami v J. Taková řešení splňují

$$(E1\text{-}2) \quad \frac{y'(x)}{\sqrt{9-y(x)^2}} = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right),$$

a tedy po integraci vzhledem k x

$$(E1\text{-}3) \quad \arcsin\left(\frac{y(x)}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\left(-\log\cos\frac{x}{2} + C\right),$$

takže řešení y_C závislé na $C \in \mathbb{R}$ splňuje

(E1-4) $$y_C(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(-\log\cos\frac{x}{2}+C\right)\right), \quad x \in I_C,$$

kde I_C je max. ot. interval obsažený v množině

$$A_C = \{x \in (-\pi,\pi) : \frac{\pi}{2}\left(-\log\cos\frac{x}{2}+C\right) \in G((-3,3))\},$$

kde

(E1-5) $$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \arcsin\frac{y}{3}+K, \quad x \in (-3,3).$$

Protože

(E1-6) $$G((-3,3)) = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

je

(E1-7) $$A_C = \{x \in (-\pi,\pi) : -\log\cos\frac{x}{2}+C \in (-1,1)\}.$$

Jest

$$-\log\cos\frac{x}{2}+C < 1$$

$$\iff -\log\cos\frac{x}{2} < 1-C$$

$$\iff \log\cos\frac{x}{2} > C-1$$

$$\iff \cos\frac{x}{2} > e^{C-1}.$$

Tato nerovnost nemá řešení pro $C \geq 1$. Pro $C<1$ je splněna právě tehdy, když

$$x \in \left(-2\arccos\left(e^{C-1}\right), 2\arccos\left(e^{C-1}\right)\right).$$

Podobně platí

$$-\log\cos\frac{x}{2}+C > -1$$

$$\iff -\log\cos\frac{x}{2} > -C-1$$

$$\iff \log\cos\frac{x}{2} < C+1$$

$$\iff \cos\frac{x}{2} < e^{C+1}.$$

Tuto nerovnost splňují pro $C>-1$ všechna $x\in(-\pi,\pi)$. Pro $C\le -1$ je splněna právě tehdy, když buď $x\in(-\pi,-2\arccos(e^{C+1}))$, nebo $x\in(2\arccos(e^{C+1}),\pi)$.

Definičním oborem I_C řešení y_C je tedy průnik intervalů obdržených z obou podmínek. Protože funkce $-2\arccos(e^x)$ je na $(-\infty,0)$ rostoucí a funkce $2\arccos(e^x)$ je na $(-\infty,0)$ klesající, platí

$$I_C=\emptyset \quad \text{pro } C\in[1,\infty),$$

$$I_C=(-2\arccos(e^{C-1}),2\arccos(e^{C-1})) \quad \text{pro } C\in(-1,1),$$

$$\left.\begin{aligned} I_C^-&=(-2\arccos(e^{C-1}),-2\arccos(e^{C+1}))\\ I_C^+&=(2\arccos(e^{C+1}),2\arccos(e^{C-1}))\end{aligned}\right\}\ \text{pro } C\in(-\infty,-1].$$

Posoudíme možnosti lepení řešení.

Pro $C\in(-1,1)$ jest

$$\lim_{x\to-2\arccos(e^{C-1})+} y_C(x)=3$$

a

$$\lim_{x\to 2\arccos(e^{C-1})-} y_C(x)=3.$$

V obou případech lze řešení nalepit na $y=3$.

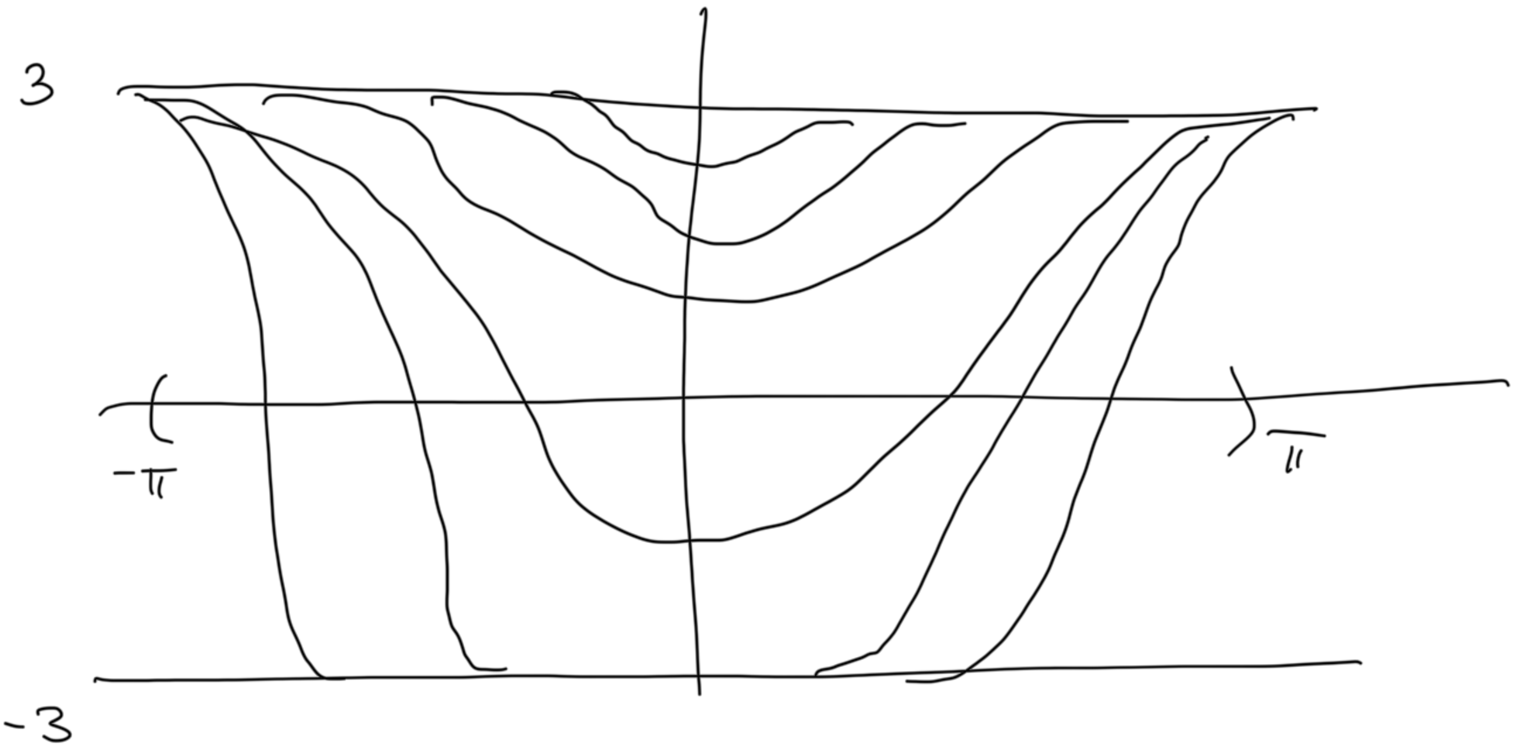
Pro $C\in(-\infty,-1]$ jest

$$\lim_{x\to -2\arccos(e^{C+1})-} y_C(x) = -3$$

a

$$\lim_{x\to 2\arccos(e^{C+1})+} y_C(x) = -3.$$

V obou případech lze řešení nalepit na $y=-3$.



Popis všech řešení:

pro dané C označme $\alpha = 2\arccos(e^{C-1})$,

$\beta = 2\arccos(e^{C+1})$.

a obdobně pro C_1, C_2. Možná řešení jsou

(i) $y = \pm 3$, $x \in (-\pi,\pi)$

(ii)
$$y = \left\{ \begin{array}{ll} 3, & x \in (-\pi,-\alpha), \\ y_C, & x \in I_C, \\ -3, & x \in (\alpha,\pi) \end{array} \right\}, \quad C \in (-1,1),$$

(iii)
$$y = \left\{ \begin{array}{ll} 3, & x \in (-\pi,-\alpha), \\ y_C, & x \in I_C^-, \\ -3, & x \in (-\beta,\pi) \end{array} \right\}, \quad C \in (-\infty,-1],$$

(iv)
$$y = \left\{ \begin{array}{ll} -3, & x \in (-\pi,\beta), \\ y_C, & x \in I_C^+, \\ 3, & x \in (\alpha,\pi) \end{array} \right\}, \quad C \in (-\infty,-1],$$

$$(v) \quad y = \begin{cases} 3, & x \in (-\pi, -\alpha_1), \\ y_{C_1}, & x \in I_{C_1}^-, \\ -3, & x \in (-\beta, \beta), \\ y_{C_2}, & x \in I_{C_2}^+, \\ 3, & x \in (\alpha, \pi). \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in (-\infty, -1].$$

<u>Hodnocení</u>

	singulární řešení	1
	tvar I_c	2
	podmínky pro I_c	4
	lepení	3

2025-2026-ZS-E2

$\boxed{E2}$ Uvažujte soustavu dif. rovnic

$$x' = x + 3y + e^{2t}$$

$$y' = 2x + 2y + e^{2t}$$

pro dif. fce x, y proměnné t.

(a) Nalezněte všechna max. řešení,

(b) —"— splňující $x(0) = -2$, $y(0) = \frac{3}{2}$,

(c) určete množinu všech $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pro která platí: je-li x, y řešení, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, pak jsou $x(t)e^{-2t}$, $y(t)e^{-2t}$ omezené na $[0, \infty)$.

Řešení. (a) Sestavme λ-matici soustavy a provedeme řádkové úpravy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-1 & -3 & e^{2t} \\ -2 & \lambda-2 & e^{2t} \end{array}\right) \quad + \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \times \text{druhý řádek} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{2}\lambda - 2 & \frac{3}{2} e^{2t} \\ -2 & \lambda-2 & e^{2t} \end{array}\right)$$

neboť

$$\frac{\lambda-1}{2} \cdot (-2) + \lambda - 1 = 0,$$

$$\frac{\lambda-1}{2}(\lambda-2) - 3 = \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 2}{2} - 3 = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{2}\lambda - 2,$$

$$\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)e^{2t}+e^{2t}=e^{2t}+\frac{1}{2}e^{2t}=\frac{3}{2}e^{2t}.$$

Z prvního řádku dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2}y''-\frac{3}{2}y'-2y=\frac{3}{2}e^{2t},$$

neboli

$$y''-3y'-4y=3e^{2t}. \qquad \text{(E2-1)}$$

Charakteristický polynom rovnice jest

$$P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda+1), \text{ kořeny } 4,-1,$$

takže $FS=\{e^{4t}, e^{-t}\}$. Rovnice má speciální pravou stranu

$$3e^{2t}=e^{2t}(3\cdot\cos(0\cdot t)+0\cdot\sin(0\cdot t)).$$

Protože $2+0\cdot i=2$ není kořen $P(\lambda)$, hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(t)=Ae^{2t}, \quad A\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},$$

neboť $\max\{\operatorname{st}3, \operatorname{st}0\}=0$.

Derivováním dostaneme

$$y_p'(t)=2Ae^{2t}, \quad y_p''(t)=4Ae^{2t},$$

a tedy dosazením do (E2-1) obdržíme

$$4Ae^{2t}-6Ae^{2t}-4Ae^{2t}=3e^{2t}, \qquad \text{(E2-2)}$$

tedy $A=-\frac{1}{2}$. Obecný tvar řešení (E2-1) je tedy

(E2-3) $\quad y(t) = \alpha e^{4t} + \beta e^{-t} - \frac{1}{2} e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Z druhého řádku upravené matice dostaneme

$$-2x + y' - 2y = e^{2t},$$

tedy

$$2x = y' - 2y - e^{2t}.$$

Derivováním dostaneme z (E2-3)

$$y'(t) = 4\alpha e^{4t} - \beta e^{-t} - e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

tedy

$$2x = 4\alpha e^{4t} - \beta e^{-t} - e^{2t} - 2\alpha e^{4t} - 2\beta e^{-t} + e^{2t} - e^{2t}$$

$$= 2\alpha e^{4t} - 3\beta e^{-t} - e^{2t},$$

takže obecné řešení soustavy je napři. tvaru

(E2-4) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{4t} - \frac{3}{2}\beta e^{-t} - \frac{1}{2} e^{2t} \\ \alpha e^{4t} + \beta e^{-t} - \frac{1}{2} e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(b) Počáteční podmínka

Dosazením $t=0$ do (E2-4) dostaneme

(E2-5) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2} \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tedy řešení vyhovující $x(0) = -2$, $y(0) = \frac{3}{2}$ splňují

(E2-6) $$\begin{cases} -2 = \alpha - \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} = \alpha + \beta - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Odečtením řádků dostaneme

$$\frac{7}{2} = \frac{5}{2}\beta, \quad \text{tedy } \beta = \frac{7}{5}$$

a po dosazení

$$-2 = \alpha - \frac{21}{10} - \frac{1}{2},$$

tedy
$$\alpha = -2 + \frac{21}{10} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Tedy řešení vyhovující počáteční podmínce je tvaru

$$(E2\text{-}6) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{21}{10}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{3}{5}e^{4t} + \frac{7}{5}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Obecné řešení splňuje

$$\begin{pmatrix} x(t)e^{-2t} \\ y(t)e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} - \frac{3}{2}\beta e^{-3t} - \frac{1}{2} \\ \alpha e^{2t} + \beta e^{-3t} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tato funkce je omezená na $[0,\infty)$ právě tehdy, když $\alpha = 0$. Z (E2-4) dostaneme dosazením

$$t = 0, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

soustavu

$$x_0 = \alpha - \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}$$
$$y_0 = \alpha + \beta - \frac{1}{2},$$

tedy

$$\frac{2}{3}x_0 = \frac{2}{3}\alpha - \beta - \frac{1}{3}$$
$$y_0 = \alpha + \beta - \frac{1}{2}.$$

sečtením rovnic obdržíme

$$\frac{2}{3}x_0 + y_0 = \frac{5}{3}\alpha - \frac{5}{6},$$

tedy

$$4x_0 + 6y_0 = 10\alpha - 5.$$

Odtud plyne, že $\alpha = 0$ právě tehdy, když

(E2-7) $$4x_0 + 6y_0 + 5 = 0.$$

<u>Hodnocení:</u>

(a) 6

(b) 2

(c) 2

$\boxed{E3}$ Dokažte, že vztahy

$$u = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \sin(\pi z)$$

$$v = \log y + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right)$$

$$w = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

definují na okolí $[u,v,w] = [0,1,e^2+3]$ diferencovatelné funkce x,y,z proměnných u,v,w splňující

$$x(0,1,e^2+3) = 0, \quad y(0,1,e^2+3) = e, \quad z(0,1,e^2+3) = 2.$$

Rozhodněte, zda má y tot. dif. v $[0,1,e^2+3]$, a pokud ano, spočtěte $\frac{\partial y}{\partial u}(0,1,e^2+3)$.

Řešení: Označme

$$F(u,v,w,x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \sin(\pi z) - u,$$

$$G(u,v,w,x,y,z) = \log y + \operatorname{arctg}\frac{x}{z} - v,$$

$$H(u,v,w,x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 - w.$$

Potom

$$F, G, H \in C^\infty(G),$$

kde

$$G = \mathbb{R}^4 \times (0,\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^6.$$

Množina G je otevřená v $\mathbb{R}^6$. Označme

$$a = [0, 1, e^2+3, 0, e, 2],$$

pak $a \in G$, funkce F, G, H jsou třídy C^∞ na nějakém okolí bodu a (např. na $B(a,2)$) a platí $F(a) = G(a) = H(a) = 0$. Dále

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y^2} & \frac{-2x^2}{y^3} & \pi\cos(\pi z) \\ \frac{z}{x^2+z^2} & \frac{1}{y} & \frac{-x}{x^2+z^2} \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix},$$

takže

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \pi \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & 2e & 4 \end{vmatrix} = \pi e \neq 0.$$

Tedy dle VOIF existují okolí U bodu $[0,1,e^2+3]$ v $\mathbb{R}^3$ okolí V bodu $[0,e,2]$ v $\mathbb{R}^3$ taková, že F,G,H definují na U funkce $x,y,z \in C^\infty(U)$ proměnných u,v,w.

Protože $y \in C^\infty(U) \subset C^1(U)$ a $[0,1,e^2+3] \in U$, má v tomto bodě totální diferenciál. Navíc

$$\frac{\partial y}{\partial u}(0,1,e^2+3) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}(a)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(a)} = -\frac{1}{\pi e}\begin{vmatrix} 0 & -1 & \pi \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\pi e}\cdot 2 = -\frac{2}{\pi e}.$$

<u>Hodnocení:</u>

$F,G,H \in C^\infty$ na okolí	1
$F,G,H\,(a) = 0$	1
$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(a) \neq 0$	3
existence impl. fcí	1
existence y'	1
výpočet $\frac{\partial y}{\partial u}$	3

2025-2026 - ZS - E4

$\boxed{E4}$ Rozhodněte (a zdůvodněte), zda existují globální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 - 2y$$

na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

a pokud ano, určete je.

Řešení: Množina M je omezená v $\mathbb{R}^2$, neboť

$$[x,y] \in M \Rightarrow \|[x,y]\|_{\mathbb{R}^2} \leq 2.$$

Platí $M = g^{-1}([-4,4])$, kde $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2$. Protože g je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a množina $[-4,4]$ je kompaktní, a tedy uzavřená v $\mathbb{R}$, je M uzavřená v $\mathbb{R}^2$. M je tedy kompaktní v $\mathbb{R}^2$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2$, a tedy nabývá na M globálních extrémů.

Podle VOLM se mohou extrémy na hranici M vyskytovat pouze v bodech, kde $\nabla g = \theta$, nebo ve stacionárních bodech funkce $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, kde $h(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $x,y \in \mathbb{R}^2$. Protože

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, a tedy $\nabla g(x,y) = \theta \iff [x,y] = [0,0]$,

přičemž $[0,0] \notin H(M)$, platí $\nabla g \neq \theta$ na M. Protože

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - 2y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 4\lambda,$$

platí

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x(1+\lambda),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = -2 + 2\lambda y,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 4.$$

Řešíme tedy soustavu

$$2x(1+\lambda) = 0$$
$$-2 + 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Z první rovnice máme $x = 0$ nebo $\lambda = -1$. Je-li $x = 0$, pak ze třetí rovnice dostaneme body $A = [0,2]$, $B = [0,-2]$. Je-li $\lambda = -1$, pak $y = -1$ z druhé rovnice, a tedy ze třetí rovnice plyne $x = \pm\sqrt{3}$. Tedy $C = [-\sqrt{3},-1]$, $D = [\sqrt{3},-1]$.

Na $\operatorname{Int} M$ se mohou extrémy nacházet pouze ve stacionárních bodech f. Jest $\nabla f(x,y) = (2x,-2)$, $x \in \mathbb{R}$, a tedy f nemá stacionární body na $\operatorname{Int} M$.

Porovnáme hodnoty v podezřelých bodech. Jest $f(A) = -4$, $f(B) = 4$, $f(C) = 5$, $f(D) = 5$.

Tedy f nabývá svého maxima 5 na M v bodech $[\pm\sqrt{3},-1]$ a svého minima -4 na M v bodě $[0,2]$.

Hodnocení:

zdůvodnění existence extrému .. 3

kandidáti na $H(M)$ -- 3

kandidáti na $\mathrm{Int}\, M$ --- 2

$\boxed{\text{E5}}$ Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$. Rozhodněte, zda platí:

(a) A, B křivkově souvislé, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ křivkově souv.

(b) A křivkově souvislá $\Rightarrow \operatorname{Int} A$ souvislá.

Řešení. (a) Platí.

Důkaz. Zvol $a \in A \cap B$ a $x, y \in A \cup B$. Nalezneme spojitá zobrazení $f : [0,1] \to A$, $g : [0,1] \to B$ splňující

$f(0) = x$, $f(1) = a$, $g(0) = a$, $g(1) = y$.

Definujme $h : [0,1] \to P$ předpisem

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Potom h je spojité, $h([0,1]) \subset A \cup B$, $h(0) = x$ a $h(1) = y$. Tedy $A \cup B$ je křivkově souvislá.

(b) Neplatí.

Polož $A = \overline{B([-1,0], 1)} \cup \overline{B([1,0], 1)} =: A_1 \cup A_2$.

Potom jsou A_1 a A_2 konvexní množiny v NLP $\mathbb{R}^2$, a tedy jsou křivkově souvislé. Navíc platí $[0,0] = A_1 \cap A_2$. Odtud plyne, že A je křivkově souvislá.

Dále platí $\operatorname{Int} A = B([-1,0],1) \cup B([1,0],1)$, což je zřejmě nesouvislá množina. Bod $[0,0]$ není prvkem $\operatorname{Int} A$, neboť $\forall r > 0$ je $B([0,0], r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$.

Hodnocení!

(a) 5

(b) 5