

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

17. 5. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
 - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
 - *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
 - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
 - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*
-

1. Uvažujme funkci $f(x) = |x|(x+2)^2$ definovanou na \mathbb{R} .
 - (a) [3 b.] Má tato funkce derivaci v bodě $x = 0$?
 - (b) [4 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémů této funkce.
 - (c) [3 b.] Najděte maximální intervaly, na nichž je tato funkce monotónní (tj. nerostoucí nebo neklesající), a maximální intervaly, na nichž je ryze monotónní (tj. rostoucí nebo klesající).
2.
 - (a) [3 b.] Definujte, co je *hromadný bod* posloupnosti čísel.
 - (b) [3 b.] Najděte příklad posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, která má nekonečně mnoho hromadných bodů, a určete všechny její hromadné body. (Nezapomeňte zdůvodnit, že jiné hromadné body neexistují.)
 - (c) [4 b.] Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je číslo $\frac{1}{k}$ hromadný bod (a_n) . Plyne z toho, že 0 je také hromadný bod (a_n) ? (Nezapomeňte svou odpověď zdůvodnit.)
3.
 - (a) [4 b.] Napište, co to znamená, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *stejněměrně spojitá* na \mathbb{R} .
 - (b) [6 b.] Existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitá na \mathbb{R} , ale není stejněměrně spojitá na \mathbb{R} ? Pokud ano, najděte příklad takové funkce a zdůvodněte, proč má požadované vlastnosti. Pokud taková funkce neexistuje, vysvětlete proč.
4.
 - (a) [3 b.] Napište, jak je definována *horní a dolní Riemannova suma*.
 - (b) [3 b.] Uveďte příklad funkce, která je na intervalu $[-1, 1]$ riemannovsky integrovatelná, ale není na intervalu $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná. Stručně zdůvodněte, proč má váš příklad požadované vlastnosti.
 - (c) [4 b.] Rozhodněte, zda existuje následující integrál, a pokud ano, určete jeho hodnotu:

$$(R) \int_{-1}^2 x^2 \operatorname{sgn}(x) dx,$$

kde funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je definována obvyklým způsobem: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$.