Teorie míry a integrálu 1

1 Základní pojmy teorie míry

1.1 Množinové systémy, pojem míry

Nechť X je množina. Symbolem $\mathcal{P}(X)$ značíme systém všech podmnožin X.

Definice. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se nazývá **σ-algebra**, jestliže:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus S \in \mathcal{A}$

(iii) $A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Dvojici $(X, \mathcal{A})$ nazýváme **měřitelným prostorem**.

Poznámka. Každá σ-algebra je uzavřená i na spočetné průniky:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k)$$

Příklad.

(i) $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra

(ii) $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra

(iii) $\{A \subset X :\ A$ je spočetná nebo $X \setminus A$ je spočetná$\}$ je σ-algebra

(iv) $\{A \subset \mathbb{N} :\ A$ je konečná nebo $X \setminus A$ je konečná $\}$ není σ-algebra

Věta 1.1 (existence nejmenší σ-algebry)**.** *Nechť $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je libovolný systém podmnožin X. Pak existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$. Značíme ji $\sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{T} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) :\ \mathcal{A}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{S}\}$. Pak $\mathcal{S} \neq \emptyset$, neboť $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \in \mathcal{T}$. Položme

$$\mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}} \mathcal{A}.$$

1. Ověříme, že $\mathcal{R}$ je σ-algebra.

(a) $X \in \mathcal{R}$, protože $X \in \mathcal{A}$ pro každou σ-algebru $\mathcal{A}$.

(b) $A \in \mathcal{R}$. Pak $A \in \mathcal{A}$ pro všechny $\mathcal{A} \in \mathcal{T} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$ pro každou $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$. Tedy $X \setminus A \in \mathcal{R}$.

(c) Nechť $A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}$. Pak $A_k \in \mathcal{A}$ pro všechna $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$. Tedy $\bigcup A_k \in \mathcal{A}$ pro každou $\mathcal{A} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup A_k \in \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{S} \in \mathcal{R}$, neboť $\mathcal{S} \in \mathcal{A}$ pro všechna $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

3. Ověříme, že $\mathcal{R}$ je nejmenší. Nechť $\tilde{R}$ je libovolná σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$. Pak $\tilde{R} \in \mathcal{T}$. Tedy $R \subset \tilde{R}$, tj. $\mathcal{R}$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$.

□

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\mathcal{G}(X)$ značí systém všech otevřených podmnožin X. **Borelovské množiny** $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ tvoří nejmenší σ-algebru obsahující všechny otevřené množiny $\mathcal{G}(X)$, tj. $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G}(X))$.

Poznámka.

- Otevřené množiny splňují (i), (ii) z definice σ- algebry, ale nejsou uzavřené vzhledem k doplňku
- Každá uzavřená množina je Borelovská (její doplněk je otevřená)

Příklad. Nechť $a < b \in \mathbb{R}$, pak:

- (a, b) je borelovská
- $[a, b]$ je borelovská
- $[a, b) = \{a\} \cup (a, b)$ je borelovská
- $(a, b]$ je borelovská

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá **míra**, pokud není identicky rovna ∞ a je σ-aditivní, tj:

$$A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \text{ jsou po dvou disjunktní, pak } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Trojici (X, A, μ) nazveme **prostor s mírou**.

Poznámka. Je-li $\mu(X) = 1$, pak se μ nazývá pravděpodobnostní míra a (X, A, μ) se nazývá pravděpodobnostní prostor.

Poznámka.

1. $\mu(\emptyset) = 0$. $\mu(\emptyset) = \sum \mu(A_k) \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$ nebo $\mu(\emptyset) = \infty$. Pokud $\mu(\emptyset) = \infty$, pak pro $A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \mu(A) + \sum \mu(\emptyset) = \infty \Rightarrow \mu(A) = \infty$ spor.

2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pro A, B disjunktní, neboť: $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$

3. $\mu(A) \leq \mu(B)$ pro $A \subset B, A, B \in \mathcal{A}$, neboť $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu A$

Příklad.

(i) Nechť $x_0 \in X$, pak:
$$\delta_{x_0} = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$
je míra na $\mathcal{P}(X)$, nazývá se Dirachova míra.

(ii)
$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & A \text{ konečná} \\ \infty & A \text{ nekonečná} \end{cases}$$
je míra na $\mathcal{P}(X)$. Nazývá se aritmetická (počítací).

(iii) Na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ lze zadefinovat míru $\mathcal{L}_1$, která bude splňovat, že $\mathcal{L}_1(a,b) = b - a$.

Věta 1.2 (spojitost míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{A}$.*

(i) Pokud $A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ (značíme $A_k \nearrow A$), pak
$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

(ii) Pokud $A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$ (značíme $A_k \searrow A$) a $\mu(A_1) < \infty$, pak
$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

Příklad (protipříklad)**.** (ii) nemusí platit, pokud $\mu(A_1) = \infty$. Nechť $A_k = [k, \infty)$, pak $A_k \searrow \emptyset$, ale $\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \infty$

Důkaz.

(i) "Trik zdisjunktněním"

Položme $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \ldots, B_k = A_k \setminus A_{k-1}, \forall k > 2 \in \mathbb{N}$. Tedy:
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A,$$
takže
$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \overset{B_k \text{ disj.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} B_i = \lim_{k \to \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{k} B_i)$$
$$= \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

(ii) Položme $C_k = A_1 \setminus A_k$. Potom $C_1 = \emptyset$ a $C_k \nearrow A_1 \setminus A$. Dle (i) platí: $\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu(A_1 \setminus A)$, tedy

$$\lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A).$$

Zároveň:

$$\lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) \overset{AL}{=} \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Tedy

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \overset{\mu(A_1)<\infty}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

□

Definice. Nechť $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Množinu $W = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$ a také množinu, která vznikne záměnou libovolného znaménka "$<$"za "$\leq$"nazveme **n-buňka**.

Objem n-buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$ a jako

$$vol(W) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

jestliže $W \neq \emptyset$.

Věta 1.3 (rozšíření elementárního objemu)**.** *Existuje právě jedna míra $\mathcal{L}_n$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taková, že pro každou n-buňku W platí $\mathcal{L}_n(W) = vol(W)$.*

Důkaz. Náznak důkazu. Lze ukázat, že je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, pak existují po dvou disjunktní n-buňky takové, že G je jejich spočetným sjednocením $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Definujeme

$$\mathcal{L}_n(G) = \sum_{i=1}^{\infty} vol(W_i),$$

ta nezávisí na volbě rozkladu.

Dále pro libovolnou $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definujeme

$$\mathcal{L}_n = \inf\{\mathcal{L}_n(G) : G \text{ otevřená}, G \subset \mathbb{R}^n, A \subset G\}$$

□

Poznámka.

1. Z konstrukce míry $\mathcal{L}_n$ plyne, že je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ borelovská a $\varepsilon > 0$, pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subset G$ a zároveň $\mathcal{L}_n(G \setminus A) < \varepsilon$.

2. Míra $\mathcal{L}_n$ je invariantní vůči posunutí - pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ platí $\mathcal{L}_n(A + x) = \mathcal{L}_n(A)$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že μ je **úplná míra**, jestliže platí: Je-li $A \in \mathcal{A}$ splňující $\mu(A) = 0$ a $A' \subset A$, pak $A' \in \mathcal{A}$.

Poznámka. V takovém případě $\mu(A') = 0$.

Věta 1.4 (zúplnění míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $\mathcal{A}_0$ je systém všech množin $E \subset X$, pro něž existují $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Potom $\mathcal{A}_0$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{A}$.*

Definujeme $\mu_0(E) = \mu(A)$ pro každou $E \in \mathcal{A}_0$. Potom $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{A}$ a $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.

Důkaz. bez důkazu. □

Definice. Prostor $(X, \mathcal{A}_0), \mu_0$ z Věty 1.4 nazýváme **zúplněním prostoru** $(X, \mathcal{A}), \mu)$, $\mathcal{A}_0$ se nazývá **zúplnění σ-algebry** $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ a μ_0 se nazývá **zúplnění míry** μ.

Definice. Zúplnění σ-algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vzhledem k $\mathcal{L}_n$ značíme $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ a nazýváme ji σ-algebrou **Lebesgueovsky měřitelných množin**. Odpovídající zúplnění míry značíme opět $\mathcal{L}_n$ a nazýváme ji **Lebesgueovou mírou**.

1.2 Měřitelné funkce

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, (Y, τ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je **měřitelné**, jestliže $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou. Je-li navíc (X, ρ) metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, pak f nazýváme **borelovské.**

Poznámka. Nechť $(X, \rho), (Y, \tau)$ jsou metrické prostory. Pak zobrazení $g : X \to Y$ je spojité právě když $g^{-1}(V)$ je otevřená pro každou V otevřenou v Y. Tedy každé spojité zobrazení je borelovské.

Příklad. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $A \subset X$. Potom charakteristické funkce množiny A definované předpisem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

je měřitelná právě když $A \in \mathcal{A}$.

Důkaz.

($\Rightarrow$) Je-li χ_A měřitelná, pak $\chi_A^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$ je vzor otevřené množiny, a tedy $A \in \mathcal{A}$.

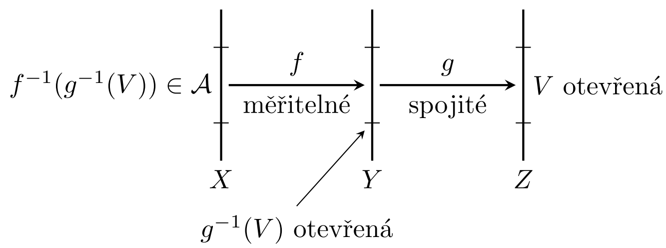
($\Leftarrow$) Nechť $A \in \mathcal{A}, B \in \mathbb{R}^n$ otevřená. Pak:

$$\chi_A^{-1}(B) = \begin{cases} X & 0, 1 \in B \\ A & 0 \notin B, 1 \in B \\ X \setminus A & 0 \in B, 1 \notin B \\ \emptyset & 0, 1 \notin B \end{cases}$$

Dle vlastností σ-algebry patří všechny tyto množiny do $\mathcal{A}$, a tedy χ_A je měřitelná. $\square$

Věta 1.5 (měřitelnost složeného zobrazení)**.** *Nechť $(Y, \tau), (Z, \sigma)$ jsou metrické prostory a $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Nechť $g : Y \to Z$ je spojité a $f : X \to Y$ měřitelné. Potom $g \circ f : X \to Z$ je měřitelné.*

Důkaz. Z obrázku: $g \circ f$ je měřitelné, neboť $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$

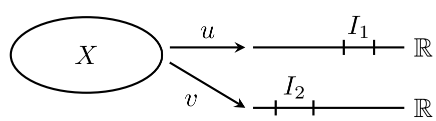


Obrázek 1: Ilustrace důkazu Věty 1.5

Věta 1.6 (měřitelnost složeného zobrazení v $\mathbb{R}^2$)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $u, vX \to \mathbb{R}$ jsou reálné měřitelné funkce. Nechť (Y, τ) je metrický prostor a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ je spojité zobrazení. Definujeme $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$. Pak h je měřitelné zobrazení.*

Důkaz. Nechť $g : X \to \mathbb{R}^2$ je dáno vztahem $g(x) = (u(x), v(x))$. Pak $h = \Phi \circ g$ a díky Větě 1.5 stačí dokázat, že g je měřitelné.

Nechť $V = I_1 \times I_2$, kde I_1, I_2 jsou otevřené intervaly. Pak $g^{-1}(V)$ je tvaru $g^{-1}(V) = \underbrace{u^{-1}(I_1)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{v^{-1}(I_2)}_{\in \mathcal{A}} \Rightarrow g^{-1}(V) \in \mathcal{A}$.



Obrázek 2: Ilustrace důkazu Věty 1.6

Nechť $V \in \mathbb{R}^2$ je obecná otevřená množina v $\mathbb{R}^2$. Pak V lze vyjádřit ve tvaru:

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i;\ V_i = I_1^i \times I_2^i,\ \text{kde } I_1^i, I_2^i \text{ jsou otevřené intervaly } \forall i \in \mathbb{N}.$$

Stačí vzít za V_i všechny otevřené obdélníky s racionálními krajními body, které jsou obsaženy ve V. Pak:

$$g^{-1}(V) = g^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{g^{-1}(V_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Tedy g je měřitelná. $\square$

Důsledek. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $f, g : X \to \mathbb{R}$. Potom $f + g$ a fg jsou rovněž měřitelné. Stačí použít Větu 1.6 na $u = f, g = v, \Phi_1(x, y) = x + y, \Phi_2(x, y) = xy$.

Věta 1.7 (kritérium měřitelnosti)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a (Y, τ) je metrický prostor. Nechť $f : X \to Y$.*

(i) Je-li $\mathcal{M}$ systém všech množin $A \subset Y$, pro něž je $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, potom $\mathcal{M}$ je σ-algebra.

(ii) Je-li f měřitelná a $B \subset Y$ borelovská, potom $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(iii) Je-li $Y = [-\infty, \infty]$, pak f je měřitelná právě tehdy, když $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ pro každé $\alpha \in [-\infty, \infty]$.

Poznámka. Na množině $Y = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ lze zavést metriku vztahem $\tau(x, y) = |f(x) - f(y)|, x, y \in Y$, kde

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|} & x \in \mathbb{R} \\ 1 & x = \infty \end{cases}.$$

Lze ukázat, že otevřené množiny (Y, τ) jsou právě ty, které lze zapsat jako sjednocení spočetně mnoha otevřených intervalů nebo intervalů tvaru $[-\infty, a), (b, \infty]$, kde $a, b \in [-\infty, \infty]$.

Důkaz.

(i) Ověříme axiomy σ-algebry:

- (i) $Y \in \mathcal{M}$, neboť jeho vzor je $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$.
- (ii) je-li $A \in \mathcal{M}$, pak $f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus \underbrace{f^{-1}(A)}_{\in \mathcal{A}}$, takže $Y \setminus A \in \mathcal{M}$.
- (iii) Nechť $A_k \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{N}$, pak $f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(A_k)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_k \in \mathcal{M}$

Tedy $\mathcal{M}$ je σ-algebra.

(ii) Dle (i) je $\mathcal{M}$ σ-algebra a navíc je f měřitelné a tedy $\mathcal{G}(Y) \subset \mathcal{M}$ (kde $g(Y)$ je systém všech otevřených podmnožin Y). Jelikož $\mathcal{B}(Y)$ je nejmenší σ-algebra obsahující $g(Y)$, pak musí platit $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{M}$.

(iii) ($\Rightarrow$) zřejmě platí, neboť $(\alpha, \infty]$ je otevřená množina v $[-\infty, \infty]$.

($\Leftarrow$) Nechť $\mathcal{M} = \{A \subset [-\infty, \infty] : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. Nalezneme posloupnost $\{\beta_k\}$ takovou, že $\beta_k < \beta, k \in \mathbb{N}$ a $lim_{k\to\infty}\beta_k = \beta$ $\beta_k \nearrow \beta$. Pak:

$$[-\infty, \beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-\infty, \beta_k] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left([-\infty, \infty] \setminus \underbrace{(\beta_k, \infty]}_{\in \mathcal{M}} \right)}_{\in \mathcal{M} \ (\mathcal{M} \text{ je } \sigma\text{-algebra})}.$$

Je-li $\beta = -\infty$, pak $[-\infty, \beta) = \emptyset \in \mathcal{M}$.

Dále nechť (a, b) otevřený interval v $\mathbb{R}$, pak $(a, b) = \underbrace{(a, \infty]}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{[-\infty, b)}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$.

Každá otevřená podmnožina $[-\infty, \infty]$ se dá zapsat jako spočetné sjednocení intervalů typu $(a, b), (\alpha, \infty], [-\infty, \beta)$ a tedy $\mathcal{G}([-\infty, \infty]) \subset \mathcal{M}$. Tedy f je měřitelná.

$\square$

Věta 1.8 (měřitelnost a limitní přechod)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A})$ *je měřitelný prostor a* $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ *jsou měřitelné funkce,* $k \in \mathbb{N}$. *Definujeme* $g(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ *a* $f(x) = \limsup_{k\to\infty} f_k(x)$. *Potom* f *a* g *jsou měřitelné funkce.*

Důkaz. Nechť $\alpha \in [-\infty, \infty]$. Pro $x \in X$ platí: $g(x) > \alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : f_k(x) > \alpha$. Tedy $g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((\alpha, \infty])$.

Protože f_k jsou měřitelné, platí $f_k^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A} \forall k \in \mathbb{N}$. Tedy $g^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$, takže g je měřitelná.

Dále $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) = -\sup_{k\in\mathbb{N}} -f_k(x)$ je měřitelná.

Nyní definujeme $h_k(x) = \sup\{f_k(x), f_{k+1}(x), \ldots\}$, pak víme, že $f(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} h_k(x)$, což je měřitelná funkce. $\square$

Poznámka.

(i) Analogické tvrzení platí pro inf a lim inf.

(ii) Limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná funkce.

(iii) Jsou-li f, g měřitelné, pak $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ jsou rovněž měřitelné, neboť $\max\{f, g\} = \sup\{f, g, g, g, \ldots\}$, podobně pro minimum.

CÍL: jdeme společně budovat Lebesgueův integrál!

Definice. Nechť X je množina a $s : X \to [-\infty, \infty]$ je funkce. Řekneme ,že s je **jednoduchá funkce**, pokud $s(X)$ je konečná podmnožina $[0, \infty)$.

Poznámka.

(i) Každou jednoduchou funkci lze zapsat ve tvaru:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}(x),$$

kde $k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in [0, \infty)$ a A_i disjunktní po dvou.

(ii) Lze dokázat, že jednoduchá funkce s z části (i) je měřitelná právě tehdy, když jsou všechny množiny A_i měřitelné.

Věta 1.9 (aproximace jednoduchými funkcemi)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A})$ *je měřitelný prostor,* $f : X \to [0, \infty]$ *a nechť* f *je měřitelná funkce. Pak existují jednoduché měřitelné funkce* $s_k, k \in \mathbb{N}$ *takové, že* $s_k \nearrow f$*, to jest* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ *a zároveň* $\lim_{k\to\infty} s_k = f$*.*

Důkaz. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Rozdělíme $[0, k)$ na intervaly $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]), i = 0, \ldots, k \cdot 2^k - 1$. Položme:

$$F_k = f^{-1}([k, \infty]) \text{ a } E_{k_i} = f^{-1}([\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]).$$

Pak:

$$s_k = k \cdot \chi_{F_k} + \sum_{i=0}^{k \cdot 2^k - 1} \frac{i}{2^k} \chi_{E_{k_i}}.$$

F_k, E_{k_i} po dvou disjunktní a měřitelné (vzor intervalu při měřitelném zobrazení) $\Rightarrow s_k$ je jednoduchá měřitelná.

Dále $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ - posloupnost s_k je rostoucí (z definice s_k).

Nyní: má s_k limitu f?

Je-li $f(x) = \infty$, pak $x \in F_k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \lim k = \infty = f(x)$.

Je-li $f(x) < \infty$, pak $\exists k_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) < k_0$ a tedy:

$$|f(x) - s_k(x)| \leq 2^{-k} \text{ pro } k \geq k_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x).$$

□

Důsledek. Nechť $f, g : X \to [0, \infty]$ měřitelné, pak $f + g, fg$ měřitelné.

Poznámka. $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné, pak $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$ patří do $\mathcal{A}$. ($\{f < g\} = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$)

2 Kontrukce integrálu

2.1 Definice abstraktního Lebesgueova integrálu

Poznámka (konvence)*.* $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce. Pro $E \in \mathcal{A}$ definujeme:

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Pro $f : X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme **abstraktní (Lebesgueův) integrál** předpisem:

$$\int_E f\, d\mu = \sup \left\{ \int_E s\, d\mu : 0 \le s \le f,\ s \text{ je jednoduchá, měřitelná} \right\}.$$

Poznámka (úmluva). V celé této kapitole je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Poznámka.

(i) Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in E$, pak $\int_E f\, d\mu = 0$ (i v případě, že $\mu(E) = \infty$).

(ii) Je-li $\mu(E) = 0$, pak $\int_E f\, d\mu = 0$ (i v případě, že $f(x) = \infty$ na E.

(iii) $\int_E f\, d\mu = \int_X f \cdot \chi_E\, d\mu$.

e

Tvrzení (monotonie integrálu)**.** *Nechť $f, g : X \to [0, \infty]$ měřitelné splňují $f \le g$ na X. Pak pro $E \in \mathcal{A}$ platí:*

$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu$$

Důkaz. Nechť s je jednoduchá měřitelná, $0 \le s \le f$. Pak $0 \le s \le s$ a tedy

$$\int_E s\, d\mu \le \int_E s\, d\mu.$$

Přejdeme k supremu přes s a tedy:

$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$

□

2.2 Leviho a Lebesgueova věta

Věta 2.1 (Leviho)**.** *Nechť $f_k \to [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce, $k \in \mathbb{N}$ splňující $f_k \nearrow f$. Pak f je měřitelná a*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Důkaz. f je limita měřitelných funkcí $\Rightarrow$ je měřitelná.

Jelikož $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, pak $\int_X f_k \, d\mu$ je neklesající posloupnost, a tedy existuje $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu = \alpha \in [0, \infty]$.

Platí $f_k \leq f$ a tedy z monotonie integrálu:

$$\int_X f_k \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \Rightarrow \underline{\alpha \leq \int_X f \, d\mu.}$$

Nyní chceme ukázat $\int_X f \, d\mu \leq \alpha$.

Nechť s jednoduchá měřitelná funkce $0 \leq s \leq f$. Zvolme $\tau \in (0,1)$ a označme $E_k = \{x \in X : f_k(x) \geq \tau s(x)\}, k \in \mathbb{N}$.

Pak $E_k \in \mathcal{A}$, $E_k \subset E_{k+1}$. Ukážeme, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = X$:

Nechť $x \in X$, pak buď

$$f(x) = 0 \Rightarrow s(x) = 0 \Rightarrow x \in E_k,$$

nebo

$$f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > \tau s(x) \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : f_{k_0} > \tau s(x) \Rightarrow x \in E_{k_0}.$$

Dle věty o spojitosti míry platí:

$$\mu(A \cap E_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A), \; A \in \mathcal{A}.$$

Zapišme s ve tvaru $s = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \chi_{A_j}$, $A_j \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní. Pak:

$$\int_X f_k \, d\mu \geq \int_{E_k} f_k \, d\mu \geq \int_{E_k} \tau s \, d\mu = \tau \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap E_k)$$

$$\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tau \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \tau \int_X s \, d\mu.$$

$$\alpha \geq \tau \int_X s \, d\mu, \; \tau \in (0,1) \overset{\tau\to 1}{\longrightarrow} \alpha \geq \int_X a \, d\mu$$

□

Věta 2.2 (linearita integrálu pro nezáporné funkce)**.** *Nechť* $f, g : X \to [0, \infty]$ *jsou měřitelné, pak*

$$\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Důkaz. f, g jednoduché funkce - snadno z definice (cvičení ;)).

obecný případ: Najdeme s_k, t_k jednoduché měřitelné, že :

$$s_k \nearrow f, \; t_k \nearrow g \Longrightarrow s_k + t_k \nearrow f + g$$

Z Leviho věty:

$$\int_X s_k + t_k \, d\mu \overset{k\to infty}{\longrightarrow} \int_X f + g \, d\mu$$
$$\int_X s_k \, d\mu \overset{k\to infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu$$
$$\int_X t_k \, d\mu \overset{k\to infty}{\longrightarrow} \int_X g \, d\mu.$$

Tedy:

$$\int_X (s_k + t_k) \, d\mu = \int_X s_k \, d\mu + \int_X t_k \, d\mu \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f + g \, d\mu.$$

□

Věta 2.3 (Leviho pro řady)**.** *Nechť* $f_k : X \to [0, \infty]$ *jsou měřitelné,* $k \in \mathbb{N}$*. Pak*

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Důkaz. Z linearity integrálu a indukce:

$$\int_X \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu.$$

Dále $\sum_{k=1}^n f_k \nearrow \sum_{k=1}^\infty f_k$, a tedy dle Leviho můžme prohodit limitu a integrál:

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

Věta 2.4 (Fatouovo lemma)**.** *Nechť* $f_k : X \to [0, \infty]$ *jsou měřitelné,* $k \in \mathbb{N}$*. Pak:*

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu$$

Důkaz. $g_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \ldots\}$,pak g_k je měřitelná a $g_k \nearrow \liminf f_k$. Dle Leviho:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu$$

Dále $g_k \leq f_k$ a tedy $\int_X g_k \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu$. Dohromady:

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

Poznámka. Nerovnost ve Fatouově lemmatu může být OSTRÁ, např: $f_k = k \cdot \chi_{(0,\frac{1}{k})}$

Definice. Označme $L^1(X,\mu)$ množinu měřitelných funkcí $f : X \to [-\infty,\infty]$, pro které je$\int_X f\,d\mu < \infty$.

Pro $f \in L^1(X,\mu)$ a $E \in \mathcal{A}$ definujeme **abstraktní (Lebesgueův) integrál** jako

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu,$$

kde f^+, resp. f^- značí kladnou, resp. zápornou část f.

Funkce z $L^1(X,\mu)$ nazýváme **Lebesgueovsky integrovatelné funkce**.

Poznámka. Definice integrálu je korektní. Je-li f měřitelná, pak:

$$f^+ = \max\{f,0\} \text{ měřitelná}, \qquad f^- = -\min\{f,0\} \text{ měřitelná},$$
$$|f| = f^+ + f^- \text{ měřitelná}.$$

Poznámka. Nechť $f \in L^1(X,\mu)$. Označme $N = \{x \in X : f(x) \in (-\infty,\infty)\}$. Pak pro $\mu(N)$ platí:

$$\infty > \int_X |f|\,\mu \geq \int_N |f|\,d\mu = \infty \cdot \mu(N) \Rightarrow \mu(N) = 0.$$

Tvrzení (integrál a absolutní hodnota)**.** *Nechť $f \in L^1(X,\mu)$. Pak*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu.$$

Důkaz.

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu\right| \leq \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu$$

□

Věta 2.5 (linearita integrálu)**.** *Nechť $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, f, g\ L^1(X,\mu)$, pak $\alpha f + \beta g \in L^1(X,\mu)$ a platí:*

$$\int_x (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu.$$

Důkaz. 1. $\alpha \geq 0, f \geq 0 : \int_X \alpha f\,d\mu \overset{?}{=} \alpha \int_X f\,d\mu$

- $\alpha = 0$ - zřejmě splněno
- $\alpha > 0$

$$S = \{s \text{ jednoduchá na } X : 0 \leq s \leq \alpha f\}$$
$$T = \{t \text{ jednoduchá na } X : 0 \leq t \leq \alpha f\}$$

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \sup_{s\in S}\int_X s\,d\mu = \sup_{s\in S}\int_X \alpha\cdot\frac{s}{\alpha}\,d\mu = \alpha\cdot\sup_{s\in S}\int_X \frac{s}{\alpha}\,d\mu =$$

$$\alpha\cdot\sup_{t\in T}\int_X t\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu$$

2. $\alpha\in\mathbb{R}, f\in L^1(X,\mu)$

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X (\alpha f)^+\,d\mu - \int_X (\alpha f)^-\,d\mu$$

$$\overset{\alpha\geq 0}{=} \int_X (\alpha f^+)\,d\mu - \int_X (\alpha f^-)\,d\mu \overset{1.}{=} \alpha\int_X f^+\,d\mu - \alpha\int_X f^-\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu$$

$$\overset{\alpha\leq 0}{=} \int_X -\alpha f^-\,d\mu - \int_X -\alpha f^+\,d\mu \overset{1.}{=} -\alpha\int_X f^-\,d\mu - \alpha\int_X f^+\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu$$

3. $f,g\geq 0, \int f+g \overset{?}{=} \int f + \int g$

   Věta 2.2

4. $f,g\in L^1(X,\mu), \int f+g \overset{?}{=} \int f+\int g$

   Označme $h=f+g \Rightarrow h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$

$$\Rightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\overset{3.}{\Rightarrow} \int_X h^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu = \int_X h^-\,d\mu + \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^+\,d\mu$$

   Všechny integrály jsou konečná čísla (předpoklad $f,g\in L^1$) a $\int h^+ \leq \int |f|+|g| < \infty$, podobně pro h^-

$$\Rightarrow \underbrace{\int_X h^+\,d\mu - \int_X h^-\,d\mu}_{\int_X h\,d\mu = \int_X f+g\,d\mu} = \underbrace{\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu}_{\int_X f\,d\mu} + \underbrace{\int_X g^+\,d\mu - \int_X g^-\,d\mu}_{\int_X g\,d\mu}$$

5. obecný případ

$$\int_X \alpha f + \beta g\,d\mu \overset{4.}{=} \int_X \alpha f\,d\mu + \int_X \beta g\,d\mu \overset{2.}{=} \alpha\int_X f\,d\mu + \beta\int_X g\,d\mu$$

□

Věta 2.6 (Lebesgueova)**.** *Nechť $f_k : X\to[-\infty,\infty]$ jsou měřitelné funkce, $k\in\mathbb{N}, f=\lim_{k\to\infty} f_k$. Nechť existuje $g\in L^1(X,\mu)$ taková, že $|f_k(x)|\leq g(x)$ pro všechna $x\in X, k\in\mathbb{N}$. Pak*

$$\lim_{k\to\infty}\int_X |f_k - f|\,d\mu = 0$$

a

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu.$$

Důkaz. f je měřitelná, neboť je limitou posloupnosti měřitelných funkcí.

$|f_k - f| \le |f_k| + |f| \le g + g$. Položme $g_k(x) = 2g(x) - |f_k - f| \ge 0, x \in X$. Platí: $\lim_{k\to\infty} g_k = 2g_k(x), x \in X$. Z Fatouova lemmatu:

$$\int_X 2g(x)\,d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X g_k(x)\,d\mu =$$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_X 2g\,d\mu - \int_X |f_k - f|\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_X |f_k - f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \int_X |f_k - f|\,d\mu \le 0$$

$$|f_k - f| \ge 0 \Rightarrow \int_X |f_k - f|\,d\mu \ge 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f|\,d\mu = 0$$

Dále

$$\left| \int_X f_k d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X f_k - f d\mu \right| \overset{2.6}{\le} \int_X |f_k - f|\,d\mu \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Tedy

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

□

2.3 Rovnost skoro všude a upravená definice měřitelnosti

Definice. Nechť $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že vlastnost V platí **skoro všude** na E, jestliže existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a vlastnost V platí na $E \setminus N$.

Řekneme, že funkce $f, g : X \to \mathbb{R}$ jsou **ekvivalentní**, značíme $f \approx g$ pokud $f = g$ skoro všude na X, tj. $\mu(\{x \in X : f(x) \ne g(x)\}) = 0$.

Definice (nová definice měřitelnosti)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f : E \to \mathbb{R}$ pro $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že f je **měřitelná** na X, jestliže $\mu(X \setminus E) = 0$ a $f^{-1}(V) \cap E \in \mathcal{A}$ pro každou V otevřenou.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x}$ je měřitelná na $[0, 1]$.

Poznámka. 1. definujeme-li (f jako výše):

$$\hat{f} = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

tahle funkce je definovaná skoro všude a měřitelná podle staré definice.

2. Stále platí, že limita měřitelných funkcí je měřitelná funkce.

3. Lze ukázat, že Leiho a Lebesgueova věta platí i v případě

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ platí pro s.v. } x \in X.$$

Věta 2.7 (Lebesgueova pro řady)**.** *Nechť $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce, $k \in \mathbb{N}$ a nechť $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k(x)| \, d\mu < \infty$. Potom $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně pro s.v. $x \in X$ a*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Důkaz. Použijeme Leviho větu pro řady na posloupnost $|f_k|$:

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \, d\mu < \infty.$$

Položme $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$, pak $g \in L^1(X, \mu) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}$ konverguje absolutně s.v..

Použijeme Lebesgueovu větu na posloupnost částečných součtů $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = g(x) \in L^1(X, \mu).$$

Tedy

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu \overset{Leb.}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu$$

$$\overset{linearita}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

2.4 Integrál závislý na parametru

Motivace:

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x} \, d\mu$$

1. Pro která α je F definovaná?
2. Ve kterých bodech je tato funkce spojitá?
3. Ve kterých bodech je F diferencovatelná? Jakým způsobem spočítat tuto derivaci?

Věta 2.8 (o spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Nechť T je metrický prostor, $\alpha_0 \in T, f : X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť:*

(i) *pro všechna $\alpha \in T$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná,*

(ii) *pro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ spojitá v α_0*

(iii) *existuje $g \in L^1(X, \mu)$ taková, že $|f(x, \alpha)| \leq g(x), x \in X, \alpha \in T$.*

Pak

$$F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\, d\mu(x), \alpha \in T$$

je spojitá v α_0.

Poznámka. Věta platí pokud ve (ii) a (iii) nahradíme "$\forall x$"za "pro s. v. x.

Důkaz. Dle Heineho stačí ukázat $\lim_{k\to\infty} F(\alpha_k) = F(\alpha_0)$ pro každou posloupnost $\{\alpha_k\}$ takovou, že $\alpha_k \to \alpha_0$.

Označme $f_k(x) = f(x, \alpha_k), k \in \mathbb{N}$. Pak f_k je měřitelná dle (i). Dle (iii) existuje $g(x) \in L^1(X, \mu)$ taková, že $|f_k(x)| \leq g(x), x \in X, k \in \mathbb{N}$.

Pro pevné x je (z Heineho a (ii)):

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} f(x, \alpha_k) = f(x, \alpha_0).$$

Podle Lebesguea:

$$F(\alpha_0) = \int_X f(x, \alpha_0)\, d\mu(x) = \int_X \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k(x)\, d\mu(x)$$
$$= \lim_{k\to\infty} F(\alpha_k).$$

□

Věta 2.9 (o derivaci integrálu podle parametru)**.** *Nechť* $I \subset \mathbb{R}$ *je otevřený interval,* $f : X \times I \to \mathbb{R}$. *Nechť:*

(i) $\forall \alpha \in I$ *je funkce* $x \mapsto f(x, \alpha)$ *měřitelná,*

(ii) $\forall x \in X, \alpha \in I$ *je* $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ *vlastní,*

(iii) $\exists g \in L^1(X, \mu)$ *splňující* $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq g(x), \forall x \in X, \forall \alpha \in I,$

(iv) $\exists \alpha_0 \in I$ *takové, že* $F(\alpha_0) = \int_X f(x, \alpha_0)\, d\mu(x) \in \mathbb{R}$.

Pak $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\, d\mu \in \mathbb{R}$ *pro všechna* $\alpha \in I$, F *je diferencovatelná na* I *a*

$$F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha} f(x, \alpha)\, d\mu(x), \alpha \in I.$$

Poznámka. 1. Předpoklad "$\forall x$"lze nahradit "pro s.v. x".

2. Předpoklad (iv) je nutný:

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dx.$$

Předpoklady (i)-(iii) splněny, ale integrál není definovaný.

Důkaz.

1. $F(\alpha) \overset{?}{\in} \mathbb{R}$.

   Nechť $\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0$.

$$|f(x,\alpha)| \leq |f(x,\alpha_0)| + |f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)| \tag{1}$$

   Funkce $\alpha \mapsto f(x,\alpha)$ má vlastní derivaci na $[\alpha_0, \alpha]$ nebo $[\alpha, \alpha_0]$ a tedy existuje $\xi \in (\alpha_0, \alpha)$ nebo (α, α_0), že:

$$|f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)| = \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\xi) \cdot (\alpha - \alpha_0) \right| \overset{(iii)}{\leq} g(x) \cdot |\alpha - \alpha_0|.$$

   Platí $f(x,\alpha_0) \in L^1(X,\mu)$ (jako funkce x), $g(x) \cdot |\alpha - \alpha_0| \in L^1(X,\mu)$. Dle (1): $f(x,\alpha_0) \in L^1(X,\mu) \Rightarrow F(\alpha) \in \mathbb{R}$.

2. diferencovatelnost $F(\alpha)$

   Dle Heineho věty stačí dokázat:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(\alpha_k - F(\alpha))}{\alpha_k - \alpha} = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\, d\mu(x)$$

   pro každou posloupnost $\{\alpha_k\} \to \alpha, \alpha_k \neq \alpha$. Označme:

$$f_k = \frac{f(x,\alpha_k) - f(x,\alpha)}{\alpha_k - \alpha}, x \in X, k \in \mathbb{N}.$$

   Dle (i) jsou f_k měřitelné, dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\exists \xi_k$ mezi α, α_k, že:

$$|f_k(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\xi) \right| \leq g(x), x \in X.$$

   Dle Lebesguea:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(\alpha_k) - F(\alpha)}{\alpha_k - \alpha} = \lim_{k\to\infty} \int_X \frac{f(x,\alpha_k) - f(x,\alpha)}{\alpha_k - \alpha}\, d\mu(x)$$

$$= \int_X \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, d\mu(x) \overset{Heine}{=} \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\, d\mu(x).$$

   Speciálně, F je diferencovatelná na I.

□

Příklad.

3 Vícerozměrná integrace

3.1 Fubiniova věta v $\mathbb{R}^n$

Definice. Nechť X a Y jsou množiny a f je funkce na $X \times Y$. Definujeme pro $x \in X$ funkci

$$f_x(y) = f(x, y), y \in Y,$$

a pro $y \in Y$ definujeme

$$f^y(x) = f(x, y), x \in X.$$

Poznámka (značení). Pro $n \in \mathbb{N}$ budeme značit $L^1(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n)$.

Věta 3.1 (Fubiniova věta v $\mathcal{R}^n$). *Nechť $p, q \in \mathbb{N}, f \in L^1(R^{p+q})$, nebo f je lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^{p+q}$ a $f \geq 0$. Potom pro $\mathcal{L}_p$-s.v. $x \in \mathbb{R}^p$ existuje (pro $f \geq 0$ může být ∞):*

$$\varphi(x) = \int_{\mathcal{R}^q} f_x \, d\mathcal{L}_q = \int_{\mathcal{R}^q} f(x, y) \, d\mathcal{L}_q(y)$$

a pro $\mathcal{L}_q$-s.v. $y \in Y$ existuje

$$\psi(y) = \int_{\mathcal{R}^p} f^y \, d\mathcal{L}_p = \int_{\mathcal{R}^p} f^y \, d\mathcal{L}_p(x),$$

a platí:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \, d\mathcal{L}_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi \, d\mathcal{L}_p = \int_{\mathbb{R}^q} \psi \, d\mathcal{L}_q.$$

3.2 Dynkinovy systémy

Definice. Nechť Z je množina, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(Z)$. Řekneme, že $\mathcal{D}$ je **Dynkinovým systémem**, pokud:

(i) $Z \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow Z \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_i \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní, pak $\bigcup_{j=0}^{\infty} D_i \in \mathcal{D}$.

Poznámka.

1. Každá σ-algebra je Dynkinův systém, ne naopak. Např:

2. $$Z = \{1, 2, \ldots, 2024\}, \mathcal{D} = \{D \in Z : D \text{ má sudý počet prvků.}\}$$

   D je dynkinův systém, ale ne σ-algebra

3. Nechť $A, B \in \mathcal{D}$ a $B \subset A$, pak $A \setminus B \in \mathcal{D}$. Pro obecné množiny to ale neplatí (zvolme $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ v Dynkinově systému z předchozího bodu).

Věta 3.2 (vztah σ-algebry a Dynkinova systému)**.** *Nechť $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. Pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra právě tehdy, když $\mathcal{D}$ je uzavřená vzhledem k průnikům.*

Důkaz.
($\Rightarrow$) σ-algebra je uzavřená na průniky.
($\Leftarrow$) Ověříme vlastnosti (i) - (iii) σ-algebry. (i),(ii) - zdarma
(iii): $A, B \in \mathcal{D}$. Pak $A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D}$ (z poznámky).

Dále $A \cup B = (A \setminus B) \cup B \in \mathcal{D}$, neboť $A \setminus B \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}$ a jsou disjunktní. Nechť nyní $D_j \in \mathcal{D}, j \in \mathbb{N}$. Položme $\tilde{A}_j = A_1 \cup \ldots \cup A_j$. Pak $\tilde{A}_j \in \mathcal{D}$. Tedy:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j \setminus \tilde{A}_{j-1}, \text{ kde } \tilde{A}_j \neq \emptyset.$$

$\tilde{A}_j \setminus \tilde{A}_{j-1} \in \mathcal{D}$, disjunktní sjednocení $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}$. □

Poznámka. Nechť Z je množina a $S \subset \mathcal{P}(Z)$. Potom existuje nejmenší Dynkinův systém obsahující S, značíme ho $\delta(S)$. Platí:

$$\delta(S) = \bigcap \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(Z) : \mathcal{D} \text{ je Dynkinův systém}, S \subset \mathcal{D}\}.$$

Zřejmě též $\delta(S) \subset \sigma(S)$.

Věta 3.3 (o nejmenším Dynkinově systému)**.** *Nechť Z je množina a $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$ je systém množin uzavřených vzhledem k průniku. Pak $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Vždy platí $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. Dle Věty 3.2 stačí dokázat, že $\delta(\mathcal{S})$ je uzavřený na průnik.

Položme $\mathcal{D} = \{D \in \delta(\mathcal{S}) : D \cap S \in \delta(\mathcal{S}) \text{ pro } S \in \mathcal{S}\}$. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ je dynkinův systém, pak $\mathcal{D} = \delta(\mathcal{S})$ (neboť $\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \subset \delta(\mathcal{S})$).

(i) $Z \in \mathcal{D}$

(ii) Nechť $D \in \mathcal{D}, S \in \mathcal{S}$, pak $(Z \setminus D) \cap S = S \setminus \underbrace{(S \cap D)}_{\in \delta(\mathcal{S})} \in \delta(\mathcal{S}) \Rightarrow Z \setminus D \in \mathcal{D}$.

(iii) Nechť $D_i \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní, $j \in \mathbb{N}, S \in \mathcal{S}$. Pak:

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j\right) \cap S = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(D_j \cap S)}_{\in \delta(\mathcal{S}) \text{ - po 2 disj.}} \in \delta(\mathcal{S}) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \in \delta(\mathcal{S})$$

Tedy máme, že $\mathcal{D} = \delta(\mathcal{S})$. Nyní ukážeme, že $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{S})$.

Položme $\mathcal{E} = \{E \in \delta(\mathcal{S}) : E \cap D \in \delta(\mathcal{S}) \text{ pro každou } D \in \delta(\mathcal{S})\}$. Jelikož $\mathcal{D} = \delta(\mathcal{S})$, platí $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Podobně jako výše lze ukázat, že $\mathcal{E}$ je dynkinův systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{E} \subset \delta(\mathcal{S})$.

Tedy: $\mathcal{E} = \delta(\mathcal{S}) \Rightarrow \delta(\mathcal{S})$ je uzavřen vzhledem k průniku. □

Definice. Míra μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ se nazývá **σ-konečná**, jestliže existuje $S_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(S_k) < \infty$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $S_k \nearrow X$.

Věta 3.4 (o jednoznačnosti míry)**.** *Nechť Z je množina, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$ je systém množin uzavřených vzhledem k průniku, $S_k \in \mathcal{S}$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $S_k \nearrow Z$. Nechť μ_1, μ_2 jsou míry na $\sigma(\mathcal{S})$ takové, že $\mu_1(S) = \mu_2(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$ a $\mu_1(S_k) < \infty$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. potom $\mu_1 = \mu_2$ na $\sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Položme $\mathcal{D}_k = \{E \in \sigma(\mathcal{S}) : \mu_1(S_k \cap E) = \mu_2(S_k \cap E)\}, k \in \mathbb{N}$. Ověříme, že $\mathcal{D}_k$ je dynkinův systém.

(i) $\mu_1(S_k \cap Z) = \mu_1(S_k) = \mu_2(S_k) = \mu_2(S_k \cap Z) \Rightarrow Z \in \mathcal{D}_k$.

(ii) Nechť $E \in \mathcal{D}_k$. pak:

$$\mu_1(S_k \cap (Z \setminus E)) = \mu_1(S_k \setminus (S_k \cap E)) = \mu_1(S_k) - \mu_1(S_k \cap E)$$

$$= \mu_2(S_k) - \mu_2(S_k \cap E) = \mu_2(S_k \setminus (S_k \cap E)) = \mu_2(S_k \cap (Z \setminus E)) \Rightarrow Z \setminus E \in \mathcal{D}_k.$$

(iii) Nechť $E_j \in \mathcal{D}_k$ jsou po dvou disjunktní, $j \in \mathbb{N}$. Pak:

$$\mu_1\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \cap S_k\right) = \mu_1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(E_j \cap S_k)}_{disj.}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(E_j \cap S_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(E_j \cap S_k) = \mu_2\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap S_k)\right) = \mu_2\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \cap S_k\right)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}_k.$$

Jelikož $\mathcal{S}$ je uzavřený vzhledem k průniku, pak pro $E \in \mathcal{S}$ platí $E \cap S_k \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu_1(E \cap S_k) = \mu_2(E \cap S_k)$. Tedy $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_k$. Pak $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_k$. Dle Věty 3.3 $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.

Nechť $E \in \sigma(\mathcal{S})$. Pak $\mu_1(S_k \cap E) = \mu_2(S_k \cap E), k \in \mathbb{N}$. Navíc, $S_k \nearrow Z$, tedy $S_k \cap E_k \nearrow E$. Ze spojitosti míry $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. $\square$

Důsledek. Je-li μ míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ taková, že $\mu(I) =$ délka (I) pro každý omezený interval, pak nutně $\mu = \mathcal{L}_1$.

$$Z = \mathbb{R},\ \mathcal{S} = \{Z \subset \mathbb{R}, Z \text{ je omezený interval }\},\ S_k = (-k, k),\ k \in \mathbb{N},$$

$\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Leftarrow$ každá otevřená množina v $\mathbb{R}$ je sjednocením otevřených intervalů.

Poznámka (vztah Lebesgueova, Riemannova a Newtonova integrálu)*.* s

(i) Nechť f je Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, pak f je Lebesgueovsky integrovatelná na $[a, b]$ a tyto integrály se rovnají.

(ii) Nechť f je spojitá na (a, b). Pak $(N) \int_a^b f\, dx$ konverguje absolutně právě tehdy $\int_{(a,b)} f\, d\mathcal{L}_1$ konverguje. V tomto případě se tyto integrály rovnají.

3.3 Součin měr a Fubiniova věta

Definice. Nechť $(X, \mathcal{S}), (Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Řekneme, že $M \subset X \times Y$ je **obdélník**, pokud existují $A \subset X$ a $B \subset Y$ takové, že $M = A \times B$.

Pokud $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}$, pak M nazveme **měřitelný obdélník**.

Definujeme **součinovou σ-algebru** $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ jako nejmenší σ-algebru obsahující každý měřitelný obdélník.

Definice. Nechť $E \subset X \times Y, x \in X, y \in Y$. Potom definujeme **řezy**:

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\},$$
$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Věta 3.5 (o měřitelnosti řezu)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}), (Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Nechť $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}, x \in X, y \in Y$. Pak $E_x \in \mathcal{T}$, $E^y \in \mathcal{S}$.*

Důkaz. Položme $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} :$ pro všechna $x \in X$ platí $E_x \in \mathcal{T}\}$.

Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra a obsahuje měřitelné obdélníky. Pak $\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ (nejmenší σ-algebra obsahující měřitelné obdélníky) a $\mathcal{A}$ je σ-algebra obsahující obdélníky $\Rightarrow A = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

Nechť $E = A \times B,\ A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}$. Pak:

$$E_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \Rightarrow E_x \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ je σ-algebra:

(i) $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{T}$ pro $x \in X \Rightarrow X \times Y \in \mathcal{A}$,

(ii) Nechť $E \in \mathcal{A}$, pak:

$$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{T} \text{ pro } x \in X \Rightarrow X \times Y \setminus E \in \mathcal{A},$$

(iii) Nechť $E_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, pak:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(E_k)_x}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T} \text{ pro } x \in X \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ je σ-algebra.

E^y podobně. □

Věta 3.6 (o měřitelnosti míry řezu)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu), (Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou, $E \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Potom $x \mapsto \nu(E_x)$, $x \in X$ je měřitelná funkce na $(X, \mathcal{S})$ a $y \mapsto \mu(E^y)$, $y \in Y$ je měřitelná na $(Y, \mathcal{T})$.*

Důkaz. Dokážeme pro funkci $x \mapsto \nu(E_x)$.

Nechť $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, označme $s_E(x) = \nu(E_x), x \in X$. Předpokládejme nejprve, že $\nu(Y) < \infty$. $\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} : s_E$ je měřitelná$\}$. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém obsahující měřitelné obdélníky.

Nechť $E = A \times B,\ A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}$. Pak

$$s_E(x) = \begin{cases} \nu(B) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \Rightarrow s_E(x) = \nu(B) \cdot \chi_A(x).$$

Nyní ukážeme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém:

(i) $s_{X \times Y}(x) = \nu(Y)$, to je konstatní funkce, tedy je měřitelná $\Rightarrow X \times Y \in \mathcal{D}$,

(ii) $E \in \mathcal{D}$, pak $s_{X \times Y \setminus E}(x) = \nu(Y \setminus E_x) \overset{\nu(Y)<\infty}{=} \nu(Y) - \nu(E_x) =$ konstantní $-$ měřitelná $\Rightarrow$ měřitelná $\Rightarrow X \times Y \setminus E \in \mathcal{D}$,

(iii) $E_k \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní. Pak:

$$s_{\bigcup E_k}(x) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)_x = \sum_{k=1}^{\infty} s_{E_k}(x),$$

jedná se o limitu částečných součtů měřitelných funkcí $\Rightarrow$ měřitelná $\Rightarrow$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{D}$.

Ukázali jsme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém.

Jelikož systém měřitelných obdélníků je uzavřený vzhledem k průniku, pak:

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \sigma(\text{ měřitelných obdélníků }) = \delta(\text{ měřitelných obdélníků }) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}.$$

Tedy $\mathcal{D} = \mathcal{S} \times \mathcal{T} \Rightarrow s_E$ je měřitelná pro $E \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

Nyní nechť $\nu(Y) = \infty$. Pak existují $Y_k \subset Y$ takové, že $\nu(Y_k) < \infty$ a $Y_k \nearrow Y$. Označme $\nu_k(B) = \nu(B \cap Y_k),\ B \in \mathcal{T}$. Pak $\nu_k(Y) = \nu(Y_k) < \infty$. Z předchozího $s_E^k = \nu(B \cap Y_k)$ je měřitelná pro $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Jelikož $E_x \cap Y_k \nearrow E_x$, pak

$$s_E(x) = \nu(E_x) = \lim_{k \to \infty} \nu(E_x \cap Y_k) = \lim_{k \to \infty} s_E^k(x)$$

je měřitelná, neboť jde o limitu měřitelných funkcí. □

Věta 3.7 (existence a jednoznačnost součinové míry)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{S}, \mu), (Y, \mathcal{T}, \nu)$ *jsou prostory se* σ*-konečnou mírou. Potom existuje právě jedna míra* $\mu \times \nu$ *na* $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ *taková, že* $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ *pro každou* $A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}$.

Je-li $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$*, pak*

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^Y)\, d\nu(y).$$

Důkaz. Pro $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ položme $\pi_1(Q) = \int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x)$.

1. Existence.

   Funkce $x \mapsto \nu(Q_x)$ je nezáporná, měřitelná a tedy $\pi_1(Q)$ je dobře definováno. Ukážeme, že π_1 je σ-konečná míra.

   Zřejmě $\pi_1(\emptyset) = \int 0 = 0$, tedy π_1 není identicky rovna nekonečno.

Nechť $Q_k \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}, k \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak:

$$\pi_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) = \int_X \nu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right)_x\right) d\mu(x) = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \nu((Q_k)_x)$$

$$\stackrel{Levi}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \nu((Q_k)_x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_1(Q_k)$$

$\Rightarrow \pi_1$ je míra.

Nechť $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}$, pak:

$$\pi_1(A \times B) = \int_X \nu((A \times B)_x)\, d\mu(x) = \int_X \chi_A(x)\nu(B)\, d\mu(x)$$

$$= \nu(B) \int_X \chi_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

2. Jednoznačnost.

   Jelikož μ, ν jsou σ-konečné, pak existují $X_k \nearrow X$, $Y_k \nearrow Y$ takové, že $\mu(X_k) < \infty$ a $\nu(Y_k) < \infty$. Pak $X_k \times Y_k \nearrow X \times Y$ a

   $$\pi_1(X_k \times Y_k) = \nu(X_k) \cdot \mu(Y_k) < \infty \Rightarrow \pi_1 \text{ je } \sigma\text{-konečná míra.}$$

   Podobně lze tyto vlastnosti dokázat pro π_2 (druhý vzoreček).

   Jednoznačnost plyne z Věty 3.4, neboť systém měřitelných obdélníků je uzavřený vzhledem k průniku.

$\square$

Lemma 3.8 (měřitelnost řezu funkce). *Nechť $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ jsou měřitelné prostory, f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-měřitelná. Potom pro každé $x \in X$ je $f_x : y \mapsto f(x, y)$ $\mathcal{T}$-měřitelná a podobně pro každé $y \in Y$ je f^y $\mathcal{S}$-měřitelná na X.*

Důkaz. Zafixujeme $x \in X$, $U \in \mathbb{R}$ otevřená. Chceme ukázat, že $f_x^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Jelikož f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelná, pak $f^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) \in U\} \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

Dle Věty 3.5 je $(f^{-1}(U))_x \in \mathcal{T}$. Dále $(f^{-1}(U))_x = \{y \in Y : f(x, y) \in U\} = f_x^{-1}(U) \Rightarrow f_x^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. $\square$

Věta 3.9 (Fubiniova věta). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou a nechť f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-měřitelná funkce na $X \times Y$. Předpokládejme, že $0 \leq f \leq \infty$ nebo $f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$. Potom pro μ-s.v. $x \in X$ existuje $\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu$, pro ν-s.v. $y \in Y$ existuje $\psi(y) = \int_X f^y\, d\mu$ a platí*

$$\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu.$$

Důkaz. Dokážeme jen variantu s funkcí φ.

Postup důkazu:

1. platnost pro $\chi_A,\ A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$
2. platnost pro s jednoduchou, měřitelnou a $s_k \nearrow f \Rightarrow \varphi_{s_k} \nearrow \varphi$
3. platnost pro $f \geq 0$ měřitelnou
4. platnost pro $f \in L^1$

Nechť $f \geq 0$, pak dle Lemma 3.8 je f_x $\mathcal{T}$-měřitelná a nezáporná, a tedy $\varphi(x)$ je dobře definovaná pro $x \in X$.

1. Nechť $A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T},\ f = \chi_A$, pak:

$$\int_{X\times Y} \chi_A \, d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(A) \overset{3.7}{=} \int_X \nu(A_x)\, d\nu(x)$$

$$= \int_X \int_Y \chi_A(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_X \varphi \, d\mu$$

2. Nechť $f \geq s \geq 0$ je jednoduchá měřitelná, $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$, kde $\alpha_i \geq 0$, A_i po dvou disjunktní. Pak

$$\int_{X\times Y} s\, d(\mu\times\nu) = \sum_{j=1}^k \alpha_i \int_{X\times Y} \chi_{A_i}\, d(\mu\times\nu) \overset{3.7}{=} \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_X \nu((A_i)_x)\, d\mu$$

$$= \int_X \sum_{i=1}^k \alpha_i \nu((A_i)_x)\, d\mu = \int_X \int_Y s\, d\nu\, s\mu = \int_X \varphi\, d\mu.$$

3. Nechť $f \geq 0$ měřitelná. Pak existují $s_k \geq 0$ jednoduché měřitelné takové, že $s_k \nearrow f$. Dle Leviho věty:

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) \overset{Levi}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} s_k\, d(\mu\times\nu).$$

Nechť $x \in X$. Dle Leviho věty:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{s_k}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_Y (s_k)_x\, d\nu \overset{Levi}{=} \int_Y \lim_{k\to\infty} (s_k)_x\, d\nu = \underbrace{\int_Y f_x\, d\nu}_{\varphi(x)}$$

Tedy:

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} s_k\, d(\mu\times\nu) = \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k(x)\, d\mu$$

$$\overset{Levi}{=} \int_X \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)\, d\mu(x) = \int_X \varphi\, d\mu.$$

4. Nechť $f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$. Pak $f = f^+ - f^-$ a f^+, f^- jsou nezáporné, měřitelné - dle předchozího:

$$\int_{X \times Y} f^+ \, d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi^+(x) \, d\mu < \infty \Rightarrow \varphi^+ < \infty \ \mu\text{-s.v.}$$

   Podobně $\varphi^- < \infty$ ν-s.v. Pak $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ je definovaná μ-s.v. Vzorec plyne odečtením rovností.

□

Poznámka. Je-li $\varphi^*(x) = \int_Y |f_x| \, d\nu$ a $\int_X \varphi^* \, d\mu < \infty$, nebo $\psi^*(y) = \int_X |f^y| \, d\mu$ a $\int_Y \psi^* \, d\nu < \infty$ pak $f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$. (stačí použít Fubiniovu větu na funkci $|f| \geq 0$).

$$\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi^* \, d\mu =< \infty$$

Poznámka (značení). Pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\mathcal{B}^n$ systém všech borelovských množin v $\mathcal{R}^n$, $\mathcal{B}_0^n$ systém všech lebegueovsky měřitelných množin.

Věta 3.10 (o součinu borelovských množin v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, pak*

$$\mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q = \mathcal{B}^{p+q} \subset \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q \subset \mathcal{B}_0^{p+q}$$

a $\mathcal{B}_0^{p+q}$ je zúplněním σ-algebry $\mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q$ vzhledem k $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$.

Poznámka. Z předchozí věty plyne, že $\mathcal{L}_{p+q}$ je zúplněním $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$. Z použití této informace lye V3.1 dokázat z V 3.9 a 3.10

3.4 Věta o substituci

Připomeneme (věta o s pro Newtonův integrál)

Poznámka (tvrzení z lineární algebry). Nechť M je matice typu $m \times n$. Potom existují ortonormální matice A, B a diagonální matice C takové, že $M = ACB$.

Důsledek. Nechť M je regulární matice typu $m \times n$ a φ je lineární zobrazení dané vztahem $\varphi(x) = Mx, x \in \mathbb{R}^n$. Pak pro každou otevřenou množinu O platí:

$$\mathcal{L}_n(\varphi(O)) = |det(M)| \mathcal{L}_n(O).$$

Definice. Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1. Definujeme **Jakobiho matici zobrazení** φ jako

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

a **jakobián** tohoto zobrazení jako $J_\varphi(x) = det(D\varphi(X)), x \in V$.

Definice. Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1. Řekneme, že φ je **difeomorfismus**, pokud φ je prosté a platí $J_\varphi(x) \neq 0$ pro všechna $x \in V$. (φ je regulární).

Věta 3.11 (věta o substituci)**.** *Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus. Nechť $M \subset \varphi(V)$ je lebesgueovsky měřitelná, $f : M \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak:*

$$\int_M f \, d\mathcal{L}_n = \int_{\varphi^{-1}(M)} f \circ \varphi |J_\varphi| \, d\mathcal{L}_n,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

bez důkazu

Příklad (zobecněné polární souřadnice)**.** Nechť $a, b > 0, V = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$. Dále $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ je dáno následujícím vztahem:

$$\varphi(r, \alpha) = (ar \cos \alpha, ar \sin \alpha), (r, \alpha) \in V.$$

$\varphi \in C^1(V)$, φ je prosté - cvičení. Spočítáme jakobián: $J_\varphi(r, \alpha) = abr \neq 0$, tedy φ je difeomorfismus.

$\varphi(V) = \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ - množina míry 0.

$\Rightarrow R \subset \mathbb{R}^2$ leb. měřitelná, f měřitelná na E, pak

$$\int_E f(x, y)$$

Příklad (zobecněné válcové souřadnice)**.** Nechť $a, b > 0, V = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}, r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$. $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ je dáno vztahem:

$$\varphi(r, \alpha, z) = (ar \cos \alpha, br \sin \alpha, z), \ (r, \alpha, z) \in V.$$

Pak φ je difeomorfismus, $J_\varphi(r, \alpha, z) = abr$.

$$\varphi(V) = \mathbb{R}^3 \setminus \underbrace{((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R})}_{\text{míry } 0}$$

Tedy je-li $E \subset \mathbb{R}^3$ lebesgueovsky měřitelná, f měřitelná na E, pak:

$$\int_E f(x, y, z) \, d\mathcal{L}_3(x, y, z) = \int_{\varphi^{-1}(E) \cap V} abr \cdot f(ar \cos \alpha, br \sin \alpha, z) \, d\mathcal{L}_3(r, \alpha, z),$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Příklad (zobecněné sférické souřadnice)**.** Nechť $a, b, c > 0$, $V = \{(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi), \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ a $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ je dáno vztahem:

$$\varphi(r, \alpha, \beta) = (ar \cos \alpha \cos \beta, br \sin \alpha \cos \beta, cr \sin \beta),$$

$(r, \alpha, \beta) \in V$.

Lze ukázat, že φ je difeomorfismus (prostota - cvičení ;), $J_\varphi(r, \alpha, \beta) = abcr^2 \cos\beta \neq 0$ pro $(r, \alpha, \beta) \in V$.

Je-li $E \subset \mathbb{R}^3$ lebesgueovsky měřitelná na E, pak

$$\int_E f(x, y, z)\, d\mathcal{L}_3(x, y, z) =$$

$$= \int_{\varphi^{-1} \cap V} abcr^2 \cos\beta f(ar\cos\alpha\cos\beta, br\sin\alpha\cos\beta, cr\sin\beta)\, d\mathcal{L}_3(r, \alpha, \beta).$$

4 Rozklad měr, distribuční funkce, různé druhy konvergence

4.1 Prostory L^p a různé druhy konvergence

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p < \infty$. Pak definujeme prostor $L^p(X, \mu)$ jako:

$$L^p(X, \mu) = \{f : X \to [-\infty, \infty] : f \text{ je měřitelná a } \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

kde

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Poznámka.

(i) ∞^p interpretujeme jako ∞.

(ii) Je-li $f \in L^p$, pak f je konečná μ-s.v. (to platí i pro $p = \infty$).

Definice. Nechť $g : X \to [0, \infty]$ je měřitelná. **Esenciální supremum** g definujeme jako

$$\operatorname{ess\,sup} g = \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : g(x) > \alpha\}) = 0\}.$$

Prostor $\mathbf{L}^\infty$ definujeme jako:

$$L^\infty(X, \mu) = \{f : X \to [-\infty, \infty] : \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty\}.$$

Tvrzení (Čebyševova nerovnost)**.** *Nechť $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(X, \mu)$, $c > 0$. Pak:*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}\right) \leq \frac{\|f\|_{L^p}^p}{c^p}.$$

Důkaz.

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) = \int_{\{x \in X : |f(x)| \geq c\}} 1 \, d\mu \leq \int_{\{x \in X : |f(x)| \geq c\}} \left(\frac{|f(x)|}{c}\right)^p d\mu$$

$$\leq \frac{1}{c^p} \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = \frac{\|f\|_{L^p}^p}{c^p}.$$

□

Definice. Nechť $X, \mathcal{A}, \mu$ je prostor s mírou, $f, f_k : X \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce. Řekneme, že f_k **konvergují podle míry** μ k f, značíme $f_k \xrightarrow{\mu} f$, pokud pro každé $\delta > 0$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\right) = 0$$

Věta 4.1 (vztah konvergence v L^p a konvergence v míře). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p < \infty$, $f_k, f : X \to \mathbb{R}$, funkce z $L^p(X, \mu)$. Pokud $f_k \to f$ v $L^p(X, \mu)$ (tj. $\|f_k - f\|_{L^p} \xrightarrow{k\to\infty} 0$), pak $f_k \xrightarrow{\mu} f$.*

Důkaz. Nechť $\delta > 0$, pak dle Čebyševa:

$$\mu\left(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}\right) \leq \frac{\|f_k - f\|_{L^p}^p}{\delta^p} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

tj. $f_k \xrightarrow{\mu} f$. □

Věta 4.2 (vztah konvergence s.v. a konvergence v míře). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mu(X) < \infty$ a nechť $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné.*

(i) Nechť $f_k \to f$ μ-s.v., pak $f_k \xrightarrow{\mu} f$.

(ii) Nechť $f_k \xrightarrow{\mu} f$, pak existuje vybraná podposloupnost f_{k_j}, která konverguje k f μ-s.v.

Důkaz.

(i) Dle předpokladu existuje $N \in \mathcal{A}$, splňující $\mu(N) = 0$ takové, že $f_k(x) \to f(x)$ pro všchna $x \in X \setminus N$. Nechť $\delta > 0$. Označme

$$A_n = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \delta \text{ pro všechna } k \geq n\}.$$

Zřejmě $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Nechť $x \in X \setminus N$, pak existuje $n \in \mathbb{N}\, \forall k \geq n : |f_k(x) - f(x)| < \delta$, tedy $x \in A_n$. Tedy $X \setminus N \subset \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n}_{Y}$. Máme $A_n \nearrow Y$, pak $X \setminus N \subset Y \subset X$ $\Rightarrow \mu(Y) = \mu(X) < \infty$, neboť $\mu(N) = 0$.

Ze spojitosti míry:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) > \mu(Y) - \varepsilon.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \mu(X \setminus A_n) = \underbrace{\mu(X)}_{\mu(Y)} - \mu(A_{n_0}) < \varepsilon$, tedy $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall k \geq n :$

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

tedy $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(ii) Dle předpokladu:

$$\forall j \in \mathbb{N}\, \exists k_j \in \mathbb{N} : \mu\left(\left\{x \in X : |f_{k_j}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^j}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^j}.$$

Tuto množinu označme A_j. Dále nechť $k_1 < k_2 < \ldots$. Označme:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Ukážeme, že $f_{k_j}(x) \to f(x)$ pro $x \in X \setminus A$.

$$X \setminus A = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=n}^{\infty} X \setminus A_j\right).$$

Tedy je-li $x \in X \setminus A$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in \bigcap_{j=n}^{\infty} X \setminus A_j \Rightarrow$ $x \in X \setminus A_j$ pro $j \geq n \Rightarrow \left|f_{k_j}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{2^j}$ pro $j \geq n$

$$\Rightarrow \lim_{j \to \infty} f_{k_j}(x) = f(x) \text{ pro } x \in X \setminus A.$$

□

Příklad.

1. klouzající hrbol. Nechť f_k jsou jako na obrázku:

   Pak $f_k \to 0$ v L^p, $1 \leq p < \infty$, $f_k \to 0$ v míře, ale $f_k \nrightarrow 0$ s.v.

2. $$f_k = \frac{1}{kx},\ x \in (0,1).$$

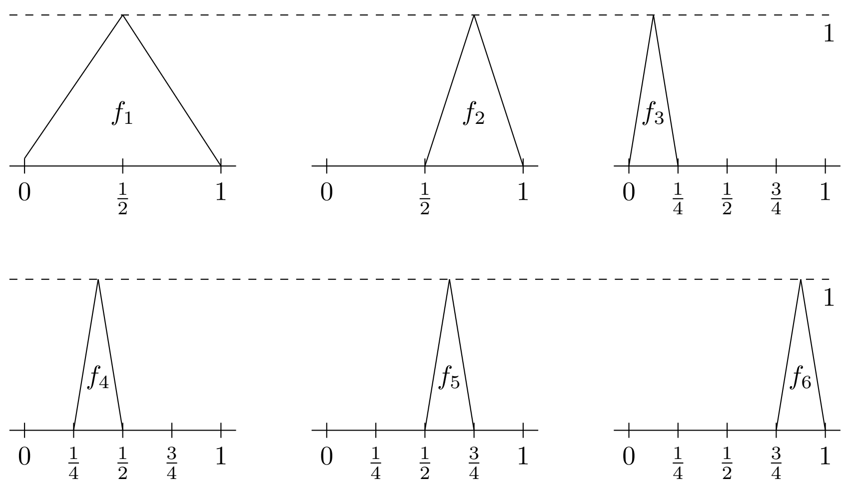
   $f_k(z) \to 0$ pro $x \in (0,1)$, $f_k \to 0$ v míře, ale $f_k \nrightarrow 0$ v L^p, neboť $f_k \notin L^p, 1 \leq p \leq \infty$.

4.2 Radonova-Nikodýmova věta

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že ν je **absolutně spojitá** vzhledem k μ, píšeme $\nu \ll \mu$, pokud pro každou $A \in \mathcal{A}$ platí: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

Řekneme, že ν je **singulární** vzhledem k μ, píšeme $\nu \perp \mu$, pokud existuje $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Příklad.



Obrázek 3: Klouzající hrbol

1. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f \geq 0$ měřitelná na X. Pak $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$ je míra na $(X, \mathcal{A})$, která je absolutně spojitá vzhledem k μ. Ukážeme, že se jedná o míru: $\nu(\emptyset) = 0$, tedy ν není identicky rovna nekonečno. Dále mějme $A_k \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní. Pak:
$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \int_X f\chi_{\cup A_k} \, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{A_k} \, d\mu \overset{Levi}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f\chi_{A_k} \, d\mu$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$$
Nyní ukážeme absolutní spojitost. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu = 0 = \nu(A)$.

2. Nechť $x \in \mathbb{R}$, pak $\delta_x \perp \mathcal{L}_1$, kde δ_x je Diracova míra, neboť $\delta_x(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ a $\mathcal{L}_1(\{x\}) = 0$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$. Řekneme, že μ je **znaménková míra**, pokud:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) μ nabývá nejvýše jedné z hodnot $\{-\infty, \infty\}$,

(iii) jsou-li $A_k \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak platí $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Věta 4.3 (Hahnův rozklad)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Potom existuje $P \in \mathcal{A}$ taková, že pro každou $A \in \mathcal{A}$ platí*
$$\mu(A \cap P) \geq 0$$

a

$$\mu\,(A \cap (X \setminus P)) \leq 0.$$

Důkaz. Bez důkazu. $\square$

Věta 4.4 (Radonova-Nikodýmova)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A})$ *je měřitelný prostor,* μ, ν *jsou konečné míry na* $(X, \mathcal{A})$*. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\nu \ll \mu$*,*

(ii) existuje $f \in L^1((X, \mathcal{A}))$ *taková, že* $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ *pro všechna* $A \in \mathcal{A}$*.*

Důkaz.

1. (ii) $\Rightarrow$ (i): viz příklad.

2. (i) $\Rightarrow$ (ii): Položme

$$\mathcal{M} = \{g \geq 0 \text{ měřitelná na } X : \forall A \in \mathcal{A} \text{ platí } \int_A g\,d\mu \leq \nu(A)\}.$$

Zjevně je $\mathcal{M}$ neprázdná, neboť $g \equiv 0 \in \mathcal{M}$.

Je-li $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$, pak $\max\{g_1, g_2\} \in \mathcal{M}$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, položme $A_1 = \{x \in A : g_1(x) \geq g_2(x)\}$. Pak

$$\int_A \max\{g_1, g_2\}\,d\mu = \int_{A_1} g_1\,d\mu + \int_{A \setminus A_1} g_2\,d\mu \leq \nu(A_1) + \nu(A \setminus A_1) = \nu(A).$$

Existuje posloupnost $\{g_k\} \subset \mathcal{M}$ taková, že $\int_X g_k\,d\mu \xrightarrow{\mu} \sup\left\{\int_X g\,d\mu : g \in \mathcal{M}\right\}$. Položme $f_k = \max\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$, pak $f_k \in \mathcal{M}$, $f_k \geq g_k$ a tedy:

$$\int_X f_k\,d\mu \xrightarrow{k\to\infty} \sup\left\{\int_X g\,d\mu : g \in \mathcal{M}\right\}.$$

Dále $0 \leq f_k \leq f_{k+1}$ je monotónní posloupnost (vybírám max ze zvětšující se množiny) a tedy existuje $f = \lim_{k\to\infty} f_k$. Z Leviho věty:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f_k\,d\mu = \sup\left\{\int_X g\,d\mu : g \in \mathcal{M}\right\}.$$

$f \in \mathcal{M}$, neboť pro $A \in \mathcal{A}$:

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_A f_k\,d\mu}_{\leq \nu(A)} \leq \nu(A).$$

Položme

$$\lambda_0(A) = \nu(A) - \int_A f\,d\mu.$$

Pak λ_0 je (nezáporná) míra. Chceme ukázat, že $\lambda_0(A) = 0$ pro $A \in \mathcal{A}$ - sporem.

Pro spor předpokládejme, že $\lambda_0(X) > \varepsilon\mu(X)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Platí, že $\lambda_0 - \varepsilon\mu$ je znaménková míra. Nalezneme $P \in \mathcal{A}$ z Hahnova rozkladu, tj. $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$(\lambda_0 - \varepsilon\mu)(A \cap P) \geq 0 \text{ a } (\lambda_0 - \varepsilon\mu)\,(A \cap (X \setminus P)) \leq 0.$$

Ukážeme, že $\mu(P) > 0$. Opět sporem. Tentokrát pro spor předpokládejme, že $\mu(P) = 0$. Z $\nu \ll \mu$ plyne $\nu(P) = 0 \Rightarrow \lambda_0(P) = 0$. Pak ale

$$0 < \lambda_0 - \varepsilon\mu(X) = \underbrace{(\lambda_0 - \varepsilon\mu)(P)}_{=0} + \underbrace{(\lambda_0 - \varepsilon\mu)(X \setminus P)}_{\leq 0} \leq 0,$$

spor - tedy $\mu(P)$ je kladné.

Z Hahnova rozkladu $\lambda_0(A \cap P) \geq \varepsilon\mu(A \cap P), A \in \mathcal{A}$.

Ukážeme, že $f + \varepsilon\chi_P \in \mathcal{M}$:

$$\int_A (f + \varepsilon\chi_P)\, d\mu = \varepsilon\mu(A \cap P) + \int_A f\, d\mu \leq \lambda_0(A \cap P) + \int_A f\, d\mu$$

$$\leq \lambda_0(A) + \int_A f\, d\mu = \nu(A).$$

Ale

$$\int_X (f + \varepsilon\chi_P)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \underbrace{\varepsilon\mu(P)}_{\geq 0} > \int_X f\, d\mu,$$

spor, jelikož f je supremum $\mathcal{M}$.

Tedu $\nu(A) = \int_A f\, d\mu,\ A \in \mathcal{A}$.

$\square$

Věta 4.5 (Lebesgueův rozklad)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že ν je σ-konečná. Potom existuje jednoznačný rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ takový, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$.*

Důkaz.

1. existence rozkladu. Předpokládejme, že $\underline{\nu(X) < \infty}$. Označme $\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{A} : \mu(E) = 0\}$. Pak existují $B_j \in \mathcal{M}$ takové, že $\nu(B_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{M}\}$.

   Označme $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, pak $B \in \mathcal{M}$, $\nu(B) = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{M}\}$. Pro $A \in \mathcal{A}$ položme $\nu_s(A) = \nu(A \cap B)$ a $\nu_a(A) = \nu(A \cap (X \setminus B)) = \nu(A \setminus B)$.

   - $\underline{\nu_s \perp \mu}$: $\mu(B) = 0$, $\nu_s(X \setminus B) = \nu_s((X \setminus B) \cap B) = \nu_s(\emptyset) = 0$.

- $\underline{\nu_a \ll \mu}$: Nechť $\mu(A) = 0$. Chceme $\nu_a(A) = 0$. Pro spor předpokládejme, že existuje $C \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(C) = 0$, $\nu_a(C) > 0$. Víme $\nu_a(C) = \nu(C \setminus B)$. Pak $B \cup C \in \mathcal{M}$, ale

$$\nu(B \cup C) = \nu(C \setminus B) + \nu(B) > \nu(B),$$

  spor. Tedy $\nu_a(C) = 0$.

Nyní nechť $\underline{\nu(X) = \infty}$. Pak existují X_j takové. že $X_j \nearrow X$, $\nu(X_j) < \infty$. Položme $Y_k = X_k \setminus X_{k-1}, k \geq 2, Y_1 = X_1$. Pak Y_k jsou po dvou disjunktní. $\nu^k(A) = \nu(A \cap Y_k)$ je konečná míra - můžeme na ni použít předchozí část důkazu. Nalezneme rozklad $\nu^k = \nu_s^k + \nu_a^k$. Pak

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k, \text{ hledaný rozklad je } \nu_a = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_a^k \text{ a } \nu_s = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_s^k.$$

2. jednoznačnost rozkladu. Nechť $\nu = \nu_s + \nu_a = \nu_s' + \nu_a'$ jsou takové, že existují $B, B' \in \mathcal{A}$ že $\mu(B) = 0, \nu_s(X \setminus B) = 0, \mu(B') = 0, \nu_s(X \setminus B') = 0$.

   Nechť $A \in \mathcal{A}$. Označme $C = A \cap (B \cup B')$, $D = A \setminus (B \cup B')$. Pak $A = C \cup D$. Pak $\mu(C) \leq \mu(B) + \mu(B') = 0 \Rightarrow \nu_a(C) = \nu_a'(C) = 0$. Pak $\nu(C) = \underbrace{\nu_a(C)}_{=0} + \nu_s(C) = \underbrace{\nu_a'(C)}_{=0} + \nu_s'(C) \Rightarrow \nu_s(C) = \nu_s'(C)$.

   Navíc $\nu_s(X \setminus B) = \nu_s'(X \setminus B') = 0$. $D \subset X \setminus (B \cup B') \Rightarrow \nu_s(D) = \nu_s'(D) = 0$. Proto:

$$\nu(D) = \underbrace{\nu_s(D)}_{=0} + \nu_a(D) = \underbrace{\nu_s'(D)}_{=0} + \nu_a'(D) \Rightarrow \nu_a(D) = \nu_a'(D).$$

   Dohromady $\nu_s(A) = \nu_s'(A)$, $\nu_a(A) = \nu_a'(A)$.

□

4.3 Distribuční funkce

Definice. Řekneme, že $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **distribuční funkce**, je-li neklesající, zprava spojitá, $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} = 0$ a $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} = 1$.

Příklad. 1. $F(x) = \mathbb{P}(\text{výsledek hodu kostkou} \leq x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}.$$

2.
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Definice. Řekneme, že μ j **borelovská míra** na $\mathbb{R}^n$, je-li to míra na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Věta 4.6 (existence distribuční funkce)**.** *Nechť μ je borelovská pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}$. Definujeme:*

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Potom F je distribuční funkce.

Důkaz.

1. F je neklesající

   Nechť $x < y$. Pak $F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$.

2. F je zprava spojitá

   Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}$ splňující $x_n \searrow x$. Pak $(-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x]$. Dle spojitosti míry máme

   $$F(x) = \mu((-\infty, x]) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, x_n]) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

3. $F(\infty) = 1$

   F je neklesající a tedy $F(\infty)$ existuje. Platí $(-\infty, n] \nearrow \mathbb{R}$ a tedy ze spojitosti míry

   $$\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, n]) = \mu(\mathbb{R}) = 1.$$

   Z Heineho věty je $F(\infty) = \lim_{n\to\infty} F(n) = 1$

4. $F(-\infty) = 0$

   Z monotonie F existuje $F(-\infty)$.

   $$\lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, -n]) = \mu(\emptyset) = 0.$$

   Z Heineho věty $F(-\infty) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = 0$.

□

Věta 4.7 (charakterizace distribuční funkce)**.** *Nechť F je distribuční funkce. Potom existuje právě jedna borelovská míra μ na $\mathbb{R}$ splňující $F(x) = \mu((-\infty, x])$ pro $x \in \mathbb{R}$.*

Důkaz.

1. jednoznačnost

   Mějme dvě takové míry, μ_1, μ_2. Nechť $(a,b] \in \mathbb{R}$, pak

   $$\mu_1((a,b]) = \mu_1((-\infty,a]) - \mu_1((-\infty,b]) = \mu_2((-\infty,a]) - \mu_2((-\infty,b]) = \mu_2((a,b]).$$

   Označme $\mathcal{S} = \{(a,b], a,b \in \mathbb{R}\}$. Pak $\mathcal{S}$ je uzavřený vzhledem k průnikům. Dále μ_1, μ_2 jsou konečné. Z věty o jednoznačnosti míry platí $\mu_1 = \mu_2$ na $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. existence

   Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme následující zobrazení:

   $$\Phi(x) = \begin{cases} F(x) & \text{je-li } F \text{ spojitá v } x \\ [F(x_-), F(x_+)] & \text{jinak} \end{cases}.$$

   Dále pro $E \subset \mathbb{R}$ definujeme $\Phi(E) = \bigcup_{x\in E} \Phi(x)$. Ukážeme, že $\Phi(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pro všechna $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Označme $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R} : \Phi(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra a obsahuje intervaly.

   Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, pak $\Phi(I)$ je interval a tedy $\Phi(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tedy $\mathcal{A}$ obsahuje intervaly.

   Nyní ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra:

   (i) $\Phi(\mathbb{R}) \in \{(0,1), (0,1], [0,1), [0,1]\}$. Všechny tyto možnosti patří do $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

   (ii) Nechť $E \in \mathcal{A}$, pak

   $$\Phi(\mathbb{R} \setminus E) = (\Phi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{E}) \cup S_1),$$

   kde $S_1 \subset S := \{y \in [0,1] : F^{-1}(y) = \text{ má více než jeden bod}\}$.

   Tvrdíme, že S je spočetná. Je-li $y \in S$, pak existuje neprázdný otevřený interval (a_y, b_y) takový, že $F(x) = y$ pro $x \in (a_y, b_y)$. Dále $y_1 \neq y_2 \Rightarrow (a_{y_1}, b_{y_1}) \cap (a_{y_2}, b_{y_2}) = \emptyset$. Nechť $q_y \in (a_y, b_y) \cap \mathbb{Q}$, pak $y \mapsto q_y$ je prosté zobrazení $S \to \mathbb{Q}$. Tedy S je spočetná. Speciálně S_1 je spočetná a tedy borelovská.

   Dále $\Phi(\mathbb{R}) \setminus \Phi(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \Phi(R \setminus E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow R \setminus E \in \mathcal{A}$.

   (iii) Nechť $E_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N}$, pak

   $$\Phi(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\Phi(E_j)}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

   tedy $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.

Ukázali jsme, že $\Phi(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pro $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definujme $\mu(E) = \mathcal{L}_1(\Phi(E))$ pro $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

μ je míra: $\mu(\emptyset) = 0$, tedy μ není identicky rovna ∞. Dále nechť $E_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jsou po dvou disjunktní, pak pro $j \neq k$ platí:

$$\Phi(E_j) \cap \Phi(E_k) \subset S,\ \mathcal{L}_1(S) = 0 = \mathcal{L}_1(\Phi(E_j) \cap \Phi(E_k)).$$

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \mathcal{L}_1(\Phi(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)) =$$

$$= \mathcal{L}_1(\Phi(E_1)) + \mathcal{L}_1 \underbrace{(\Phi(E_2) \setminus \Phi(E_1))}_{\text{liší se od } E_2 \text{ o mn. míry 0}} + \mathcal{L}_1(\Phi(E_3) \setminus (\Phi(E_2) \cup \Phi(E_3)))\ldots =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}_1(\Phi(E_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

μ je pravděpodobnostní: $\mu(\mathbb{R}) \stackrel{?}{=} 1$.

$\Phi(\mathbb{R}) \in \{(0,1), (0,1], [0,1), [0,1]\} \Rightarrow \mu(\mathbb{R}) = 1$.

Nakonec chceme : $F(x) = \mu((-\infty, x])$:

Nechť $x \in \mathbb{R}$, pak $\Phi((-\infty, x]) \in \{(0, F(x)], [0, F(x)]\} \Rightarrow \mu((-\infty, x]) = \mathcal{L}_1(\Phi((-\infty, x])) = F(x)$.

$\square$