1. přednáška

Úročení a úrokové míry

Základní pojmy

Úrok = poplatek za zapůjčení peněz (na n období)

Věřitel	Dlužník	Základ (jistina) K_0	Splatná částka K_n
investor	banka	vklad	zúročený vklad
banka	investor	úvěr (půjčka)	zúročený úvěr (jednorázově splatný)

Zřejmě: vklad = úvěr poskytnutý investorem bance

Jednoduché úročení: $K_n = K_0(1+in)$ $\quad$ i… úroková míra pro 1 období

Diskont: $K_0 = \frac{K_n}{1+in} \overset{ozn.}{=} K_n(1-dn)$ $\quad$ d… diskontní míra pro 1 období

Př: Půjčka s úrokem a s diskontem

Půjčka s úrokem: Polhůtný úrok: $n=1$, $i=0{,}1$

Půjčíme si	K_0	1 000
Vrátíme	$K_n = K_0(1+in)$	1 100

Splatná částka K_n je odvozena od výše půjčky K_0

Míra zisku pro věřitele: $\mu_u = \frac{K_n - K_0}{K_0} = in$

Půjčka s diskontem: Předlhůtný úrok: $n=1$, $i=0{,}1$

Půjčíme si	$K_0 = K_n(1-dn)$	900
Vrátíme	K_n	1 000

Výše půjčky K_0 je odvozena od splatné částky K_n

Míra zisku pro věřitele: $\mu_D = \frac{K_n - K_0}{K_0} = \frac{dn}{1-dn}$

(Takto se chová např. stát při prodeji bezkupónových dluhopisů nebo banka při prodeji depozitních směnek - prodají pod nominální hodnotu, k datu splacení vyplatí nominální hodnotu)

Pro $i=d$ (a $1-dn>0$) je $\mu_u < \mu_D$ $\Rightarrow$ pro věřitele je výhodnější půjčka s diskontem (při poskytnutí půjčky inkasuje předl. úrok)

Dále máme z definice jednoduchého úročení a diskontu: $\frac{1}{1+in} = 1-dn$

Odkud: $dn = \frac{in}{1+in}$, $in = \frac{dn}{1-dn}$ … to zaručí $\mu_u = \mu_D$

diskontovaný polhůtný úrok z 1 $= in(1-dn) = dn$ = předlhůtný úrok z 1

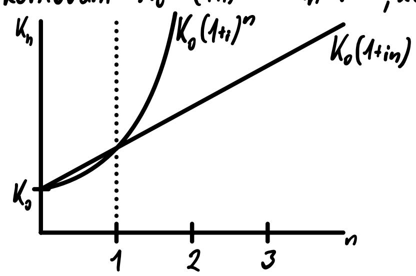
Pro $n=1$ rok: $d = \frac{i}{1+i}$, $i = \frac{d}{1-d}$ … vztah mezi roční úrokovou a roční diskontní mírou

$K_0=1 \Rightarrow K_1=1+i$; i... zhodnocení 1 za 1 rok

$K_1=1 \Rightarrow K_0=1-d$; d... kolik investovat, aby se za 1 rok zhodnotilo na 1 Tohle mi připadá jako blbost...

Složené úročení: $K_n=K_0(1+i)^n$ -rozdíl oproti jednoduchému úročení: připsaný úrok se taky úročí

Diskontování: $K_0=\frac{K_n}{(1+i)^n} \overset{ozn.}{=} K_n \cdot v^n$, kde $v=\frac{1}{1+i}=1-d$ ... diskontní jednotka



Z grafu vidíme: $n<1$... větší splatnou částku K_n dá jednoduché úročení

$n>1$... větší splatnou částku K_n dá složené úročení

Zřejmě: úročit lze i přes neceločíselný počet období n

Podíváme se na situaci, kdy úročíme p-krát do roka

Polhůtné úročení

- uložili jsme částku $K_0=1$ na 1 rok, vyzvedneme $K_1=1+i$
- na konci každé p-tiny roku se připíše úrok $\frac{i(p)}{p}$
- připsaný úrok se dále úročí složeně s roční úrokovou mírou i

Celkový příjem z úroku na konci roku = budoucí hodnota finančního toku s platbami $\frac{i(p)}{p}$:

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{i(p)}{p}(1+i)^{\frac{k}{p}} = \frac{i(p)}{p} \cdot \frac{(1+i)-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = \frac{i(p)}{p} \frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = i$$

$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{i(p)}{p}(1+i)^{\frac{k}{p}}$ - kdybychom všechny polhůtné úroky $\frac{i(p)}{p}$ vypláceli na konci roku, vypláceli bychom je úročené mírou i

i - kdybychom ??? připočetli jednorázový úrok na konci roku, byl by roven úrokové míře i; $K_1=K_0(1+i)=1+i$

$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{i(p)}{p}(1+i)^{\frac{k}{p}}$; i - chceme, aby oba způsoby přinesly stejný úrokový příjem a tedy i stejnou splatnou částku

Vztah mezi efektivní a nominální úrokovou mírou: $\left(1+\frac{i(p)}{p}\right)^p=1+i$

i ... efektivní úroková míra (roční)

p ... frekvence úročení

$i(p)$ ... roční nominální úroková míra

$\frac{i(p)}{p}$ ... nominální úroková míra pro p-tinu roku

Předlhůtné úročení

- uložili jsme částku $K_0=1$ na 1 rok
- na začátku každé p-tiny roku se připíše úrok $\frac{d(p)}{p}$
- připsaný úrok se dále úročí složeně s roční úrokovou mírou i

Celkový příjem z úroků na konci roku:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{d(p)}{p}(1+i)^{\frac{k}{p}} = d(1+i) \quad (=i)$$

$\sum_{k=1}^{p} \frac{d(p)}{p}(1+i)^{\frac{k}{p}}$ - úroky připsané každou p-tinu roku
$d(1+i)$ - jednorázový úrok připsaný na začátku roku
} chceme, aby oba způsoby přinesly stejný úrokový příjem

Diskontovaný úrokový příjem k začátku roku = současná hodnota finančního toku s platbami $\frac{d(p)}{p}$:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{d(p)}{p} v^{\frac{p-k}{p}} = \frac{d(p)}{p} \sum_{k=0}^{p-1} (1-d)^{\frac{k}{p}} = \frac{d(p)}{p} \cdot \frac{1-(1-d)}{1-(1-d)^{\frac{1}{p}}} = d$$

Vztah mezi efektivní a nominální diskontní mírou: $\left(1-\frac{d(p)}{p}\right)^p = 1-d$

d ... efektivní diskontní míra (roční)

$d(p)$ ... roční nominální diskontní míra

$\frac{d(p)}{p}$ ... nominální diskontní míra pro p-tinu roku

Na základě vztahů mezi efektivní a nominální mírou a $d = \frac{i}{1+i}$ lze ukázat, že analogický vztah platí pro nominální míry:

$$1-d = \left(1-\frac{d(p)}{p}\right)^p = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\left(1+\frac{i(p)}{p}\right)^p} \Rightarrow 1-\frac{d(p)}{p} = \frac{1}{1+\frac{i(p)}{p}} \Rightarrow \frac{d(p)}{p} = \frac{\frac{i(p)}{p}}{1+\frac{i(p)}{p}}, \quad \frac{i(p)}{p} = \frac{\frac{d(p)}{p}}{1-\frac{d(p)}{p}}$$

2. přednáška

Uvažujme nyní $p \to \infty$:

$$\lim_{p\to\infty} i(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}{\frac{1}{p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+i)^x-1}{x} = \frac{d}{dy}(1+i)^y\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}\exp(y\log(1+i))\Big|_{y=0} = (1+i)^y \log(1+i)\Big|_{y=0} = \log(1+i) \overset{\text{ozn.}}{=} \delta$$ ... intenzita úroku

Spojité úročení: $K_t = K_0 \cdot e^{\delta t}$

Zřejmě $1+i = e^{\delta}$; $v = e^{-\delta}$

Lze ukázat: při konstantní $i(p)$ je $(1+i)$ rostoucí funkcí p $\Rightarrow$ pro věřitele je výhodnější častější připisování úroků.

Úrokové míry závislé na čase

Doposud jsme uvažovali připisování úroku každou p-tinu roku, t.j. v intervalech délky $\frac{1}{p}$, $p = 1, 2, \dots$

Nyní uvažujeme časový interval obecné délky h, čas měříme v letech.

V čase t investujeme částku 1, v čase $t+h$ máme $1 + h \cdot i_h(t)$, kde $i_h(t)$ ... roční nominální úroková míra závislá na čase

$h \cdot i_h(t)$ ... nominální úroková míra pro časový interval $\langle t, t+h\rangle$ = připsaný úrok v čase $t+h$ k 1 v čase t

Speciální případy: $h=1$, $i_h(t) = i$: $h \cdot i_h(t) = i$ ... efektivní úroková míra

$h = \frac{1}{p}$, $i_h(t) = i(p)$: $h \cdot i_h(t) = \frac{i(p)}{p}$ ... nominální úroková míra pro p-tinu roku

I nyní můžeme zvyšovat frekvenci úročení: $\lim_{h\to 0^+} i_h(t) = \delta(t)$ ... intenzita úroku závislá na čase

Ve finanční matematice se častěji než s úrokovými měrami pracuje s intenzitami úroku, protože mají některé lepší vlastnosti, např. je lze považovat za normálně rozdělené náhodné veličiny.

Akumulace kapitálu

Chceme-li vyjádřit zhodnocenou částku nikoli v součtovém tvaru, ale v součinovém tvaru, používáme akumulační faktor.

Označíme: $1+h\cdot i_h(t)=A(t,t+h)$

Obecně: V čase t_1 investujeme částku C_1, v čase $t_2>t_1$ máme $C_2=C_1\cdot A(t_1,t_2)$, kde $A(t_1,t_2)$... akumulační faktor pro $\langle t_1,t_2\rangle$.

Značíme: $A(t,t)=1$

Princip konzistence: $t_0\le t_1\le t_2$: $A(t_0,t_2)=A(t_0,t_1)\cdot A(t_1,t_2)$

Indukcí: $t_0\le t_1\le\dots\le t_{n-1}\le t_n$: $A(t_0,t_n)=\prod_{j=1}^{n}A(t_{j-1},t_j)$

Pozn.: V praxi vzhledem k daním a různým správním nákladům nebývá princip konzistence přesně dodržen.

Zřejmě platí $A(t,t+h)=1+h\cdot i_h(t)\Rightarrow i_h(t)=\frac{A(t,t+h)-1}{h}\Rightarrow\delta(t)=\lim_{h\to0^+}\frac{A(t,t+h)-1}{h}$

Věta 1: Nechť $\delta(t)$ a $A(t_0,t)$ jsou spojité funkce času $t\ge t_0$, nechť platí princip konzistence. Pak pro $t_0\le t_1\le t_2$ je $A(t_1,t_2)=\exp\left(\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)\,ds\right)$.

Důkaz: $\delta(t)=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{A(t_0,t)}\cdot\frac{A(t_0,t)A(t,t+h)-A(t_0,t)}{h}=\frac{1}{A(t_0,t)}\cdot\lim_{h\to0^+}\frac{A(t_0,t+h)-A(t_0,t)}{h}=\left|F(t)=A(t_0,t)\right|=\frac{1}{F(t)}\cdot\lim_{h\to0^+}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\frac{F'(t)}{F(t)}=(\log F(t))'$

Tato diferenciální rovnice má řešení $F(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\delta(s)ds\right)+c$ a z principu konzistence dostáváme

$A(t_1,t_2)=\frac{A(t_0,t_2)}{A(t_0,t_1)}=\frac{F(t_2)}{F(t_1)}=\exp\left(\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds\right)$

Specielně: $\delta(s)=\delta$: $A(t_1,t_2)=e^{\delta(t_2-t_1)}=(1+i)^{t_2-t_1}$ ... složené úročení

Diskontování

V čase 0 investujeme částku C, v čase t máme 1

Zřejmě: $1=C\cdot A(0,t)$

Ozn.: $C=\frac{1}{A(0,t)}=v(t)$ ... diskontní faktor závislý na čase

Dle věty 1: $v(t)=\exp\left(-\int_0^t\delta(s)\,ds\right)$

Specielně: $\delta(s)=\delta$: $v(t)=e^{-\delta t}=v^t$ ... diskont při složeném úročení

Obecně uvažujme: V čase t_1 investujeme C_1, v čase t_2 máme C_2

Zřejme: $C_2=C_1\cdot A(t_1,t_2)$ a s využitím principu konzistence dostáváme $C_2=C_1\cdot\frac{A(0,t_2)}{A(0,t_1)}$

$C_1=C_2\cdot\frac{A(0,t_1)}{A(0,t_2)}=C_2\cdot\frac{v(t_2)}{v(t_1)}=C_2\cdot\exp\left(-\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds\right)$

Specielně: $\delta(s)=\delta$: $C_1=C_2e^{-\delta(t_2-t_1)}=C_2\cdot v^{t_2-t_1}$

Volba intenzity úroku

1, $\delta(s)=\delta$, jako složené úročení

2, $\delta(s)$ jako deterministická funkce času s

3, $\delta(s)$ jako posloupnost pro $s=1,2,\dots$

4, $\delta(s)$ jako náhodný proces

Př: Intenzita času jako deterministická funkce (Stoodleyův vzorec)

V pojišťovnictví se používá diskontní faktor $v(t)=\frac{1}{1+r}v_1^t+\frac{1}{1+r}v_2^t$ ... vážený průměr 2 konstantních diskontních faktorů

$v_1=e^{-\delta_1}$, $\delta_1=p+s$, $v_2=e^{-\delta_2}$, $\delta_2=p$

Ten se dostane z intenzity úroku $\delta(t)=p+\frac{s}{1+re^{st}}$

Parametry r,s,p volíme tak, aby funkce $\delta(t)$ byla dostatečně hladká

Odvození: $v(t)=\exp\left(-\int_0^t\delta(u)du\right)=\exp\left(-\int_0^t p+\frac{s}{1+re^{su}}du\right)=\exp\left(-\int_0^t p+s-\frac{sre^{su}}{1+re^{su}}du\right)=\left|\begin{matrix}F(u)=1+re^{su}\\F'(u)=sre^{su}\end{matrix}\right|=\exp\left(-\int_0^t p+s\,du+\int_0^t\frac{F'(u)}{F(u)}du\right)=$

$=\exp\left(-(p+s)[u]_0^t+[\log(1+re^{su})]_0^t\right)=e^{-(p+s)t}\cdot\exp\left(\log\frac{1+re^{st}}{1+r}\right)=\frac{1}{1+r}e^{-(p+s)t}+\frac{r}{1+r}e^{-pt}$

3. přednáška

Př: Intenzita úroku jako náhodný proces (Proces AR(1)) Není ke zkoušce

$\delta(t)=b\,\delta(t-1)+e(t)$

$e(t)$... náhodná chyba, modeluje se pravděpodobnostními metodami

b ... parametr

Př: Intenzita úroku pomocí míry zisku (deterministická nebo náhodná)

P_t... cena finančního instrumentu (akcie, měna,...) v čase $t>0$

$R_t=\frac{P_t-P_{t-1}}{P_{t-1}}$ ... míra zisku pro časový interval $(t-1,t\rangle$

Zřejmě: $P_t=P_{t-1}(1+R_t)\Rightarrow R_t$ lze považovat za forwardovou úrokovou míru pro období $(t-1,t\rangle$

Logaritmická míra zisku (logaritmický výnos): $r_t=\log(1+R_t)=\log\frac{P_t}{P_{t-1}}=\log P_t-\log P_{t-1}$

Zřejmě $1+R_t=e^{r_t}\Rightarrow r_t$ lze považovat za intenzitu úroku pro období $(t-1,t\rangle$

Transformací $\log P_t-\log P_{t-1}=r_t$ se stabilizuje chování časových řad.

Řady cen nepravidelně kolísají, řady log. výrazů jsou stacionární (stabilní), lze je lépe matematicky modelovat.

Finanční toky a důchody

Současná a budoucí hodnota

Diskrétní finanční tok

Platby $C_{t_0},C_{t_1},\dots,C_{t_n}$ v časech $0\le t_0<t_1<\dots<t_n<\infty$, často $t_j=j$, $j=0,1,\dots,n$

Zřejmě $C_{t_j}>0$... příjem, $C_{t_j}<0$... výdej

Současná hodnota:

hodnota finančního toku v čase 0, není-li řečeno jinak $\Rightarrow$ je to součet plateb diskontovaných do času 0

$PV=\sum_{j=0}^{n}C_{t_j}v(t_j)$, kde $v(t_j)=\exp\left(-\int_0^{t_j}\delta(s)ds\right)$

Pro $\delta(s)=\delta$ máme $PV=\sum_{j=0}^{n} C_{t_j} v^{t_j}$, $v=\frac{1}{1+i}=e^{-\delta}=1-d$

Pozn.: Platí $v(t)=\frac{1}{A(0,t)}$, $A(0,t)=1+t\cdot i_t(0)$, označíme-li nominální úrokovou míru $t\cdot i_t(0)=i(t)$, máme $v(t)=\frac{1}{1+i(t)}$

Volba úrokové míry pro diskontování

i = běžná míra zhodnocení kapitálu (např.: úroková míra bankovních úvěrů pro podnikatele, úroková míra představující výnos státních dluhopisů,...).

i = technická úroková míra v pojišťovnictví.

Interpretace současné hodnoty

PV = částka, kterou musí mít v čase 0 k dispozici např. pojišťovna, aby v čase t_j mohla vyplácet částky C_{t_j}.

PV = spravedlivá cena dluhopisu, který přinese majiteli v čase t_j příjmy C_{t_j}.

PV = výše půjčky, která bude splácena v časech t_j splátkami C_{t_j}.

Budoucí hodnota:

Hodnota finančního toku na konci sledovaného časového horizontu $\Rightarrow$ je to součet plateb úročených do budoucího času $T\geq t_n$

$FV=\sum_{j=0}^{n} C_{t_j} A(t_j,T)$, $A(t_j,T)=\exp\left(\int_{t_j}^{T}\delta(s)ds\right)$

Pro $\delta(s)=\delta$ máme $FV=\sum_{j=0}^{n} C_{t_j}(1+i)^{T-t_j}$, $1+i=e^{\delta}$

Interpretace budoucí hodnoty

FV je částka naspořená v čase T z vkladů C_{t_j} v časech t_j.

Pozn.: Lze počítat hodnotu finančního toku k libovolnému času $t_0<t<t_n$.

$t<t_j \Rightarrow$ platbu C_{t_j} diskontujeme do času t.

$t>t_j \Rightarrow$ platbu C_{t_j} úročíme do času t.

Spojitý finanční tok

Nepřetržitý tok plateb s intenzitou $\rho(t)$ v časovém intervalu $\langle 0,T\rangle$

Zřejmě: $\rho_p(t)>0$... intenzita příjmu, $\rho_v(t)<0$... intenzita výdajů, $\rho(t)=\rho_p(t)+\rho_v(t)$

Často $\rho(t)=\rho$

Interpretace intenzity plateb:

$0\leq t_1<t_2\leq T$: souhrnná hodnota plateb za časový interval $(t_1,t_2\rangle$ je $\int_{t_1}^{t_2}\rho(s)\,ds$.

Označíme-li: $S(t)=\int_0^t \rho(s)ds$, lze psát $\rho(t)=S'(t)$.

Pozn.: Spojité připisování úroků na účet je spojitý finanční tok, kde $\rho(t)=\delta(t)$, resp. $\rho=\delta$ při konstantních sazbách.

Současná hodnota (v čase 0): $PV=\int_0^T \rho(t)v(t)dt$, $v(t)=v^t$ při konstantních sazbách

Budoucí hodnota (v čase T): $FV=\int_0^T \rho(t)\cdot A(t,T)\,dt$, $A(t,T)=(1+i)^{T-t}$ při konstantních sazbách

Pozn.: Někdy má finanční tok diskrétní i spojitou složku.

Důchody

Důchod (anuita) je speciální případ finančního toku: $C_{t_j}=C\ \forall j$, tzn. platby stejné výše, stejného znaménka v pravidelných intervalech

Může být: polhůtný ... platby na konci časových intervalů v časech $1,\dots,n$

předlhůtný ... platby na začátku časových intervalů v časech $0,\dots,n-1$

Polhůtný důchod s ročními platbami

Platby C po dobu n let, roční úroková míra i, $v=\frac{1}{1+i}$

Současná hodnota: $PV=C\cdot\sum_{t=1}^{n} v^t = Cv\cdot\frac{1-v^n}{1-v}=C\,\frac{1-v^n}{i}\overset{\text{ozn.}}{=}C\,a_{\overline{n}|}$, $a_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{i}$ ... současná hodnota jednotkového polhůtného důchodu

Budoucí hodnota: $FV=C\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t=C\,\frac{(1+i)^n-1}{i}\overset{\text{ozn.}}{=}C\,s_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$ ... budoucí hodnota jednotkového polhůtného důchodu

Předlhůtný důchod s ročními platbami

Platby C po dobu n let, roční úroková míra i

Současná hodnota: $PV=C\cdot\sum_{t=0}^{n-1} v^t = C\cdot\frac{1-v^n}{1-v}\overset{\text{ozn.}}{=}C\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{d}$ ... současná hodnota jednotkového předlhůtného důchodu

Budoucí hodnota: $FV=C\cdot\sum_{t=1}^{n}(1+i)^t=C\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)\overset{\text{ozn.}}{=}C\cdot\ddot{s}_{\overline{n}|}$, $\ddot{s}_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{d}$ ... budoucí hodnota jednotkového předlhůtného důchodu

Lze ukázat, že platí: vztahy mezi současnou a budoucí hodnotou: $s_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}(1+i)^n$, $\ddot{s}_{\overline{n}|}=\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n$

vztahy mezi polhůtným a předlhůtným důchodem: $\ddot{a}_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}(1+i)$, $\ddot{s}_{\overline{n}|}=s_{\overline{n}|}(1+i)$

Pozn.: Současné a budoucí hodnoty polhůtného důchodu mají ve jmenovateli úrokovou míru i.

Současné a budoucí hodnoty předlhůtného důchodu mají ve jmenovateli diskontní míru d.

U dalších typů důchodu budeme až na vyjímky zapisovat pouze současné hodnoty polhatného důchodu

4. přednáška

Odložený důchod

První platba odsunuta o m období (let).

$PV=C\cdot\sum_{t=m+1}^{n+m} v^t = v^m\cdot C\cdot\frac{1-v^n}{i}=v^m\,C\,a_{\overline{n}|}$

Budoucí hodnota (v čase $m+n$) je stejná jako budoucí hodnota neodloženého důchodu (v čase n). $\left(FV=C\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t\right)$

Aplikace: PV je částka, kterou nyní musí mít např. pojišťovna, aby od času $m+1$ mohla začít vyplácet částky C.

Přerušený důchod

Nekončí v posledním platebním období, ale platby jsou ještě m období (let) úročeny.

Současná hodnota je stejná, jako u nepřerušeného důchodu.

$$FV = C\cdot\sum_{t=m}^{m+n-1}(1+i)^t = (1+i)^m\cdot C\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = (1+i)^m\cdot C\cdot s_{\overline{n|}}$$

Aplikace: FV je naspořená částka, kterou si klient ihned nevyzvedne, ale nechá ji m období v bance.

Věčný důchod

Posloupnost plateb není ukončena, to znamená $n \rightarrow \infty$.

$$PV = C\cdot\sum_{t=1}^{\infty} v^t = C\cdot\frac{v}{1-v} = C\cdot\frac{1}{i}$$

Budoucí hodnota není definována.

Aplikace: PV je vklad na dobu neurčitou, který přináší neomezenou posloupnost úrokových plateb $PVi = C$.

Např.: Věčný dluhopis - přináší majiteli časově neomezenou posloupnost kupónových plateb.

Důchod s víceletou periodou plateb

Platby C jedenkrát za k let polhůtně úročíme po dobu $n = k\cdot l$ let, roční úroková míra i.

$$PV = C\cdot\sum_{t=1}^{l} v^{k\cdot t} = C\cdot v^k\,\frac{1-v^n}{1-v^k} = C\cdot\frac{1-v^n}{(1+i)^k-1} = C\,\frac{\frac{1-v^n}{i}}{\frac{(1+i)^k-1}{i}} = C\cdot\frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}$$

Někdy se počítá dvoukrokově:

1, Systém plateb C se nahradí posloupností ročních plateb X takových, že: $C = X\sum_{t=0}^{k-1}(1+i)^t = X\,\frac{(1+i)^k-1}{i} = X\,s_{\overline{k|}}$

2, Určí se současná hodnota důchodu s ročními polhůtnými platbami X: $PV = X\cdot\sum_{t=1}^{n} v^t = X\,\frac{1-v^n}{i} = X\cdot a_{\overline{n|}} = C\,\frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}$

Důchod s úročením a platbami v průběhu roku

Platby C p-krát ročně polhůtné po dobu n let, roční efektivní úroková míra i, roční nominální úroková míra $i(p)$.

$$PV = C\cdot\sum_{t=1}^{np}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{t}{p}} = C\cdot\sum_{t=1}^{np}\left(\frac{1}{1+\frac{i(p)}{p}}\right)^{t}$$

, označíme-li $v = \frac{1}{1+i}$, máme po úpravě $PV = C\cdot v^{\frac{1}{p}}\,\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{p}}} = C_p\,\frac{1-v^n}{i(p)} = C\cdot\frac{1-v^n}{\frac{i(p)}{p}}$.

roční úroková míra; čas v letech; úroková míra pro p-tinu roku; čas v p-tinách roku

Důchod s rozdílnou frekvencí plateb a úročení

Polhůtné platby C r-krát do roka po dobu n let, úročení p-krát do roka.

$$PV = C\cdot\sum_{t=1}^{nr}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{t}{r}} = C\cdot\sum_{t=1}^{nr}\left(\frac{1}{1+\frac{i(p)}{p}}\right)^{\frac{tp}{r}}$$

Konkrétně např.: $r = 12,\ p = 2:\ (1+i)^{-\frac{t}{12}} = \left(1+\frac{i(2)}{2}\right)^{-\frac{t}{6}}$

$r = 2,\ p = 12:\ (1+i)^{-\frac{t}{2}} = \left(1+\frac{i(12)}{12}\right)^{-6t}$

Důchod s necelým počtem platebních období

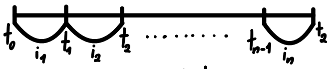
Platby C po dobu $n^* = k\cdot\frac{1}{p} + z$ let, kde $0 < z < \frac{1}{p}$, polhůtné, každou p-tinu roku.

V čase n^* se vyplácí neúplná platba $C^* = C\cdot pz$ ve výši odpovídající necelému platebnímu období. $(pz \in (0,1))$

$$PV = C\cdot\sum_{t=1}^{k} v^{\frac{t}{p}} + C^*\cdot v^{n^*} = C\cdot v^{\frac{1}{p}}\,\frac{1-v^{\frac{k}{p}}}{1-v^{\frac{1}{p}}}\cdot C^*\cdot v^{n^*} = C_p\cdot\frac{1-v^{\frac{k}{p}}}{i(p)} + C_{pz}v^{n^*},\quad v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\left(1+\frac{i(p)}{p}\right)^p}$$

Finanční tok s proměnnou splátkou, dobou plateb a úrokovou mírou

Platba $C_{t_1}, C_{t_2}, \dots, C_{t_n}$, v časech $t_1<t_2<\dots<t_n$. V období $(t_{j-1}, t_j]$ platí úroková míra i_j; $j=1,\dots,n$, $t_0=0$



$$PV = C_{t_1}\left(\frac{1}{1+i_1}\right)^{t_1-t_0} + C_{t_2}\left(\frac{1}{1+i_2}\right)^{t_2-t_1}\left(\frac{1}{1+i_1}\right)^{t_1-t_0} + \dots + C_{t_n}\left(\frac{1}{1+i_n}\right)^{t_n-t_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{1+i_1}\right)^{t_1-t_0} = \sum_{j=1}^{n} C_{t_j}\prod_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1+i_k}\right)^{t_k-t_{k-1}}$$

Důchod s úrokovou intenzitou závislou na čase

Platby C p-krát ročně polhůtně po dobu n let, intenzita úroku $\delta(t)$.

$$PV = C\sum_{t=1}^{np}\exp\left(-\int_0^{\frac{t}{p}}\delta(s)ds\right), \quad \delta(t)=\delta: PV = C\cdot\sum_{t=1}^{np} e^{-\delta\frac{t}{p}}$$

Finanční tok s proměnnou splátkou, dobou plateb a s intenzitou úroku závislou na čase

Platby $C_{t_1}, C_{t_2}, \dots, C_{t_n}$, v čase $0<t_1<t_2<\dots<t_n$, intenzita úroku $\delta(t)$.

$$PV = \sum_{j=1}^{n} C_{t_j}\exp\left(-\int_0^{t_j}\delta(s)\,ds\right)$$

5. přednáška

Umořování dluhu

Umořování dluhu (splacení půjčky) je speciální případ důchodu.

Ozn.: D_0 ... počáteční stav dluhu (výše půjčky)

n ... počet období splacení

i_t ... úroková míra v období t, $t=1,\dots,n$

C_t ... splátka v čase t, $t=1,\dots,n$

D_t ... stav dluhu v čase t po uhrazení C_t

Pak lze sestavit umořovací plán:

Čas	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0				D_0
1	C_1	$D_0 i_1$	$u_1=C_1-D_0 i_1$	$D_1=D_0-u_1=D_0(1+i_1)-C_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	C_n	$D_{n-1} i_n$	$u_n=C_n-D_{n-1} i_n$	$D_n=D_{n-1}-u_n=D_{n-1}(1+i_n)-C_n$

Zřejmě: Úrok = Stav dluhu minulé období · úroková míra

Úmor = Splátka − úrok

Stav dluhu = Stav dluhu minulé období − úmor = Stav dluhu minulé období zúročený − splátka

Požadujeme: $D_n = D_{n-1}-u_n = D_{n-2}-u_{n-1}-u_n = \dots = D_0-\sum_{t=1}^{n} u_t = 0$

to znamená: $D_0=\sum_{t=1}^{n} u_t$ ... počáteční stav dluhu = součet úmorů

Lze psát: $D_t = D_{t-1}(1+i_t) - C_t = (D_{t-2}(1+i_{t-1}) - C_{t-1})(1+i_t) - C_t = \dots \stackrel{1}{=} D_0 \cdot \prod_{k=1}^{t}(1+i_k) - \sum_{j=1}^{t-1} C_j \cdot \prod_{r=j+1}^{t}(1+i_r) - C_t$

... retrospektivní vyjádření stavu dluhu v čase t pomocí počátečního stavu D_0 a již uhrazených splátek $C_1, \dots, C_t$

Zřejmě: D_t = zúročený počáteční stav - zúročené splátky

Požadujeme: $D_n = 0$

Odtud: $D_0 \prod_{k=1}^{n}(1+i_k) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j \prod_{r=j+1}^{n}(1+i_r) + C_n$

$D_0 \stackrel{2}{=} \sum_{j=1}^{n} C_j \prod_{r=1}^{j} \frac{1}{1+i_r}$ ... počáteční stav dluhu = současná hodnota splátek

Po dosazení 2, do 1, máme:

$$D_t = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot \prod_{r=1}^{j} \frac{1}{1+i_r} \cdot \prod_{k=1}^{t}(1+i_k) - \sum_{j=1}^{t-1} C_j \prod_{r=j+1}^{t}(1+i_r) - C_t = \sum_{j=1}^{t-1} C_j \prod_{r=j+1}^{t}(1+i_r) + C_t + \sum_{j=t+1}^{n} C_j \prod_{r=t+1}^{j} \frac{1}{1+i_r} - \sum_{j=1}^{t-1} C_j \prod_{r=j+1}^{t}(1+i_r) - C_t = \sum_{j=t+1}^{n} C_j \cdot \prod_{r=t+1}^{j} \frac{1}{1+i_r}$$

... prospektivní vyjádření stavu dluhu v čase t pomocí současné hodnoty dosud neuhrazených splátek $C_{t+1}, \dots, C_n$.

Zřejmě: D_t = současná hodnota budoucích splátek

Dluh s konstantní úrokovou mírou j a splátkou C

$j = i$ ... roční splátky

$j = \frac{i(p)}{p}$ ... splátky a úročení p-krát do roka

Retro: $D_t = D_0(1+j)^t - C \sum_{k=0}^{t-1}(1+j)^k = D_0(1+j)^t - C\frac{(1+j)^t - 1}{j}$

Počáteční stav: $D_0 = C \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+j}\right)^k = C \frac{1 - \left(\frac{1}{1+j}\right)^n}{j}$

Pro: $D_t = C \sum_{k=1}^{n-t} \left(\frac{1}{1+j}\right)^k = C \frac{1 - \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n-t}}{j}$

Dále máme: Úrok v čase t: $D_{t-1}\, j = C\left(1 - \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n-t+1}\right)$ ... s rostoucím t klesá D_{t-1}

Úmor v čase t: $C - D_{t-1}\, j$ ... s rostoucím t roste

Počáteční stav: $D_0 = \sum_{t=1}^{n} u_t = nC - j \sum_{t=1}^{n} D_{t-1}$ ... celkový úmor

V čase t (po t obdobích splácení), $t = 1, \dots, n$, ($D_n = 0$): Celkové splátky: tC

Celkový úmor: $D_0 - D_t$

Celkový úrok: $tC - (D_0 - D_t) = j \sum_{k=1}^{t} D_{k-1}$

Příklad: Dlužník měl splácet půjčku 50 000 měsíčními polhůtnými splátkami po dobu 20 let. Banka používá půlroční úročení s roční nominální úrokovou mírou 12,5%. Po 60 splátce se dlužník rozhodl splatit jednorázově 10 000 a zbytek dluhu mu byl povolen splácet půlročně polhůtně po dobu 10 let a 2 měsíce. Jaká byla výše splátek?

1. režim splácení ... naplánování na 20 let, měsíční platby půlroční úročení

$D_0 = 50\,000$, $n = 20$ let $= 240$ měsíců, $i_{(2)} = 0{,}125$, splátky C_1

Ozn.: $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\left(1+\frac{i_{(2)}}{2}\right)^2} = 0{,}885\,813\,148$

$$D_0 = C_1 \sum_{k=1}^{240} v^{\frac{k}{12}} = C_1 \sum_{k=1}^{240} \frac{1}{\left(1+\frac{i_{(2)}}{2}\right)^{\frac{k}{6}}} = C_1 \cdot 89{,}757\ 918\ 5 \Rightarrow C_1 = 557{,}053\ 916\ 684$$

2. režim splácení ... 10 let a 2 měsíce, půlroční platby i úročení

Prospektivně: $D_{60} = C_1 \cdot \sum_{k=1}^{180} v^{\frac{k}{12}} = C_1 \cdot 82{,}495\ 638\ 2 = 45\ 954{,}518\ 32$

Retrospektivně: $D_{60} = D_0 (1+i)^5 - C_1 \sum_{k=0}^{59} (1+i)^{\frac{k}{12}} = 45\ 954{,}519\ 44$

$$\frac{(1+i)^5-1}{i} = \frac{\left(1+\frac{i_p}{p}\right)^{10}-1}{\frac{i_p}{p}}$$

Stav dluhu po uhrazení jednorázové splátky 10 000 je $D_0^* = 35\ 954{,}518\ 32$.

D_0^* bude splácen 10 let a 2 měsíce, to znamená $20 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ roku $= n^*$.

$k = 20$, $p = 2$, $z = \frac{1}{6} \Rightarrow pz = \frac{1}{3}$ ... 2 měsíce $= \frac{1}{3}$ půlroku

$$D_0^* = C_2 \sum_{t=1}^{20} v^{\frac{t}{2}} + C_2\, pz \cdot v^{10\frac{1}{6}} = C_2 \cdot 11{,}337\ 888\ 72 \Rightarrow C_2 = 317{,}182\ 855$$

Poslední neúplná splátka je $C_2 \cdot \frac{1}{3} = 1057{,}060\ 952$

6. přednáška

Hodnocení investičních projektů

Vnitřní míra výnosnosti

Investiční projekt je reprezentován naplánovanou posloupností příjmů a výdajů, to znamená diskrétním, případně spojitým finančním tokem.

Plánujeme platby $C_{t_0}, C_{t_1}, \dots, C_{t_n}$ v časech $0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_n$ let

Na současnou hodnotu lze nahlížet jako na funkci roční úrokové míry i (omezíme se na konstantní i):

Diskrétní finanční tok: $NPV(i) = \sum_{j=0}^{n} C_{t_j} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{t_j}$ ... čistá současná hodnota.

Spojitý finanční tok s intenzitou plateb $\rho(t)$, $t \in [0,T]$: $NPV(i) = \int_0^T \rho(t) \left(\frac{1}{1+i}\right)^t dt$.

Výnosová rovnice: $NPV(i) = 0$

interpretace: diskontované příjmy = diskontované výdaje

řešíme vzhledem k neznámé i

Vnitřní míra výnosnosti: (IRR) (vnitřní výnosové procento)

kořen $i_0 > -1$ výnosové rovnice

aby $(1+i_0) > 0$ a bylo definováno $\delta_0 = \log(1+i_0)$

Výnosová rovnice nemusí mít žádný reálný kořen $i_0 > -1$, může mít jeden nebo více takových.

Věta 2: Pro diskrétní finanční tok, v němž se realizují prvně výdaje a pak příjmy, nebo prvně příjmy a pak výdaje, má výnosová rovnice právě jeden reálný kořen $i_0 > -1$.

Důkaz: Uvažujme finanční tok, v němž jsou: výdaje: $-C_{t_0},\dots,-C_{t_l}$ v časech $0\le t_1<\dots<t_l$

příjmy: $C_{t_{l+1}},\dots,C_{t_n}$ v časech $t_l<t_{l+1}<\dots<t_n$.

Vzhledem k tomu, že $1+i=e^{\delta}$ lze výnosovou rovnici psát ve tvaru

$$NPV(\delta)=-\sum_{j=0}^{l}C_{t_j}e^{-\delta t_j}+\sum_{j=l+1}^{n}C_{t_j}e^{-\delta t_j}=0 \quad /\cdot e^{\delta t_l}$$

$$\underbrace{NPV(\delta)e^{\delta t_l}}_{g(\delta)}=\underbrace{-\sum_{j=0}^{l}C_{t_j}e^{\delta(t_l-t_j)}}_{g_1(\delta)}+\underbrace{\sum_{j=l+1}^{n}C_{t_j}e^{-\delta(t_j-t_l)}}_{g_2(\delta)}$$ ... klesající (neboť $g_1'(\delta)<0,\ g_2'(\delta)<0$)

$$\lim_{\delta\to\infty} g(\delta)=0+\infty=\infty$$

$$\lim_{\delta\to-\infty} g(\delta)=-\infty+0=-\infty$$

Tedy $g(\delta)=0$ pro právě 1 $\delta_0 \Rightarrow NPV(\delta)=0$ pro právě 1 δ_0 a položíme $i_0=e^{\delta_0}-1>-1$ ⊠

Věta 3: Uvažujme finanční tok s platbami $C_{t_0},\dots,C_{t_n}$ v časech $0\le t_0<\dots<t_n$ a označme $s_k=\sum_{j=0}^{k}C_{t_j}$, $k=0,1,\dots,n$.

Nechť $s_0\neq 0$, $s_n\neq 0$ a nechť po vyloučení nulových členů mění posloupnost $s_0,\dots,s_n$ znaménko právě jednou.

Pak má výnosová rovnice právě jeden kořen $i_0>0$.

Důkaz: Podobně jako u Věty 2. ⊠

Poznámky: 1, $C_{t_0},C_{t_1},\dots,C_{t_n}$ mohou být různě pomíchané příjmy a výdaje.

2, Věta neříká nic o existenci kořenů $-1<i_0<0$.

3, Předpoklady věty splňuje např. finanční tok, v němž jsou prvně výdaje, pak příjmy a souhrnná hodnota příjmů je větší než souhrnná hodnota výdajů.

$$\left.\begin{aligned} s_l&=-\sum_{j=0}^{l}C_{t_j}<0\\ s_n&=-\sum_{j=0}^{l}C_{t_j}+\sum_{j=l+1}^{n}C_{t_j}>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow ??\ 1\le k\le n:\ s_j<0,\ j<k,\ s_k<0,\ s_{k+1}>0,\ s_j>0,\ j>k+1$$ What?

4, Dříve se výnosová rovnice řešila pomocí numerických metod (metoda ?????, ?????? metoda). Dnes jsou tyto postupy implementovány v různých produktech (Excel, Mathematica)

Posouzení výhodnosti investičního projektu

Investiční projekt = naplánovaná posloupnost nebo spojitý tok příjmů a výdajů

Idea: na výdaje si půjčíme, příjmy využijeme na splacení půjčky

Příklad: Investiční projekt:

čas	platba
1	-5
2	x

Jaký příjem x splatí půjčku na výdaj s úrokovou mírou i po jednom období?

Čas	Příjem	Výdaj	Stav účtu	Stav dluhu
0			$5v$	$5v$
1		5	$5v(1+i)-5=0$	$5v(1+i)=5$
2	$x=5(1+i)$			$5(1+i)-x=0$

Předpokládali jsme, že úročení na účtu je stejné jako úročení dluhu.

Zřejmě: $x=5(1+i)\ /\cdot v^2$

$xv^2-5v=0$, kde $v=\frac{1}{1+i}$

$NPV(i)=0$ ... výnosová rovnice ... diskontované příjmy = diskontované výdaje

Kdy bude projekt pro investora výhodný?

Když příjmy splatí půjčky na výdaje a ještě něco zbyde.

V našem případě: $x>5(1+i)$

Ekvivalentně: $NPV(i)>0$ ... diskontované příjmy > diskontované výdaje.

Investiční projekt považujeme za výhodný při hodnotící úrokové míře i, když $NPV(i)>0$

Hodnotící úroková míra = běžná míra zhodnocení kapitálu

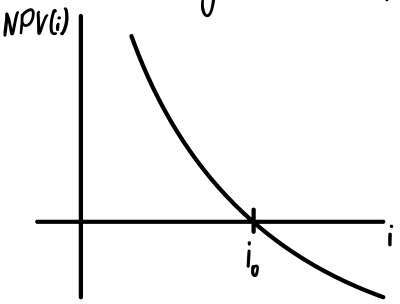
Způsob volby (viz též současná hodnota):

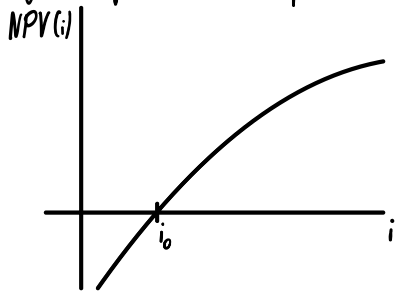
1, úroková míra, za kterou si podnikatel běžně může vypůjčit peníze

2, tzv. bezriziková úroková míra (představovaná ??? např. výnosem ze státních dluhopisů) někdy navýšená o přirážky za riziko investice, za nižší likviditu investice

3, technická úroková míra v pojišťovnách

Je-li $NPV(i)$ ryze monotónní, lze výhodnost investičního projektu posoudit též pomocí vnitřní míry výnosnosti i_0 (IRR).





$NPV(i)>0$ pro $i<i_0$, je-li $NPV(i)$ klesající

$NPV(i)>0$ pro $i>i_0$, je-li $NPV(i)$ rostoucí

Projekt typu 1: prvně výdaje, pak příjmy

Je-li t_1 čas posledního výdaje, je funkce $NPV(i)\,(1+i)^{t_1}$ klesající (viz důkaz Věty 2)

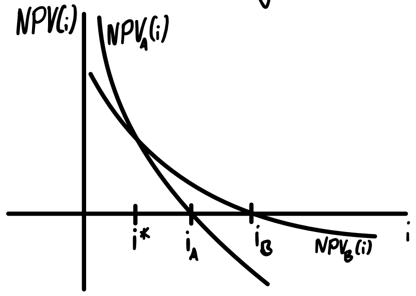
Většinou je klesající i $NPV(i)$, ale pozor! Obecně $NPV(i)(1+i)^{t_1}$ klesající $\not\Rightarrow NPV(i)$ klesající, i když obě funkce mají stejný kořen i_0.

Projekt typu 2: prvně příjmy, pak výdaje má zřejmě většinou rostoucí $NPV(i)$

Porovnávání výhodnosti dvou investičních projektů

Projekt A je výhodnější než projekt B při hodnotící úrokové míře i, když $NPV_A(i)>NPV_B(i)$

Pozor!: Nelze argumentovat vnitřními mírami výnosnosti $i_A>i_B$!



$0<i<i^*$: oba projekty ziskové, A výhodnější

$i=i^*$: oba projekty stejně výhodné

$i^*<i<i_A$: oba projekty ziskové, B výhodnější

$i_A\le i<i_B$: pouze projekt B ziskový

$i_B\le i$: oba projekty ztrátové

Příklad: Těžební společnost plánuje těžbu uhlí v určité lokalitě. Za získání povolení k těžbě musí nyní zaplatit 1 000 000. Těžba je naplánována na 10 let. Po tuto dobu se předpokládají spojité výdaje spojené s těžbou, s konstantní intenzitou, ve výši 200 000 ročně. Podle plánu se ročně vytěží 10 000 tun uhlí, prodejní cena za 1 tunu je C. Příjmy z prodeje uhlí jsou spojité, s konstantní intenzitou (ve výši 10 000 C ročně). Po 10 letech bude třeba vydat 300 000 na rekultivaci zničené krajiny. Při jaké minimální ceně C je projekt ziskový, je-li běžná míra zhodnocení kapitálu 11% ročně?

$C_0=-1\,000\,000,\ C_{10}=-300\,000$

Spojité výdaje: $\int_t^{t+1}\rho_v\,du=-200\,000 \Rightarrow \rho_v=-200\,000$ $\Rightarrow$ Celková intenzita plateb: $\rho=\rho_v+\rho_p=10\,000\,(C-20)$

Spojité příjmy: $\int_t^{t+1}\rho_p\,du=10\,000\ C \Rightarrow \rho_p=10\,000\,C$

Výnosová rovnice = podmínka rovnováhy diskontovaných příjmů a výdajů: $NPV(i)=0,\ i=0{,}11,\ v=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1{,}11}$

$$0=C_0+C_{10}v^{10}+\rho\int_0^{10}v^t\,dt=C_0+C_{10}v^{10}+\rho\left[v^t\cdot\frac{1}{\log v}\right]_0^{10}=C_0+C_{10}v^{10}+\frac{\rho}{\log v}\left(v^{10}-1\right)\Rightarrow C=37{,}81\doteq 38$$

$NPV(C)$ je rostoucí funkcí C, neboť $NPV'(C)=10\,000\,\frac{v^{10}-1}{\log v}>0$

Pro $C>37{,}81$ je $NPV(i)>0$ a tedy projekt je ziskový.

Předpokládejme nyní, že na úrok 11% si lze půjčit peníze a zároveň s úrokem 11% lze investovat.

Pak lze uvažovat následujícím způsobem:

$t=0$: $C_0=-1\,000\,000$ … na počáteční výdaj si v čase 0 vypůjčíme.

$\rho(t)=10\,000C-200\,000,\ t\in(0,T)$ … spojité příjmy v časovém intervalu $(0,T)$ splácí půjčku s úrokem 11%.

$\rho(t) = 10\,000\,C - 200\,000$, $t \in (T, 10)$ ... spojité příjmy v časovém intervalu $(T, 10)$ investujeme se zhodnocením 11%.

$t = 10: C_{10} = -300\,000$ ... závěrečný výdaj uhradíme z investic.

Tedy máme: v čase 0: $(1): -C_0 = \rho \cdot \int_0^T v^t\,dt$ ... současná hodnota

v čase 10: $(2): -C_{10} = \rho \cdot \int_T^{10} (1+i)^{10-t}\,dt$ ... budoucí hodnota $/ \cdot v^{10}$

v čase 0: $(2'): -C_{10} v^{10} = \rho \cdot \int_T^{10} v^t\,dt$

v čase 0: $(1)+(2'): -C_0 - C_{10} v^{10} = \rho \cdot \int_0^{10} v^t\,dt$ ... výnosová rovnice

Pozn.: Lze zjistit i dobu splácení půjčky... řešíme soustavy 2 rovnic o neznámých C, T:

$(1): -C_0 = \rho \int_0^T v^t\,dt = \rho \cdot \frac{1}{\log v}\left(v^T - 1\right) \Rightarrow \rho = \frac{-C_0 \log v}{v^T - 1}$ (3)

$(2): -C_{10} = \rho \int_T^{10} v^{10-t} = \rho \frac{v^{-10}}{\log v}\left(v^{10} - v^T\right) \Rightarrow -C_{10} = \frac{C_0 \log v}{1 - v^T} \cdot \frac{\left(1 - v^{T-10}\right)}{\log v}$

$$-C_{10}\left(1 - v^T\right) = C_0\left(1 - v^{T-10}\right)$$

$$v^T\left(C_{10} + C_0 v^{-10}\right) = C_{10} + C_0$$

$$v^T = \frac{C_{10} + C_0}{C_{10} + C_0 v^{-10}}$$

$$T = \frac{1}{\log v} \log \frac{C_{10} + C_0}{C_{10} + C_0 v^{-10}} = 8{,}448 \text{ let}$$

$(3): \rho = \frac{C_0 \log v}{1 - v^T} = \frac{C_0\left(C_{10} + C_0 v^{-10}\right)}{C_0 v^{-10} - C_0} \log v = \frac{C_{10} + C_0 v^{-10}}{v^{-10} - 1} \log v = \frac{C_0 v^{10} + C_0}{1 - v^{10}}$ ... výsledek, který se dostane řešením výnosové rovnice

Uvedený předpoklad o stejné úrokové míře při půjčce a investování je ovšem ?????. Ve skutečnosti bývá úrok při půjčce vyšší než úrok při investování.

Předpokládejme tedy: $i_1 = 0{,}12\%$ ... úroková míra pro půjčku ; $v_1 = \frac{1}{1+i_1} = \frac{1}{1{,}12}$

$i_2 = 0{,}1\%$ ... úroková míra pro investování ; $v_2 = \frac{1}{1+i_2} = \frac{1}{1{,}1}$

Dostáváme soustavu rovnic o neznámých C, T: $(1)\ -C_0 = (10\,000\,C - 200\,000) \cdot \int_0^T v_1^t\,dt = \rho \frac{v_1^T - 1}{\log v_1}$

$(2)\ -C_{10} = (10\,000\,C - 200\,000) \cdot \int_T^{10} (1+i_2)^{10-t}\,dt$

$(2')\ -C_{10} v_2^{10} = (10\,000\,C - 200\,000) \cdot \int_T^{10} v^t\,dt = \rho \frac{v_2^{10} - v_2^T}{\log v_2}$

Lze ji řešit použitím vhodného softwaru a dostaneme: $T = 8{,}481$ let, $C = 38{,}35$

Přímé řešení: $(1)\ -C_0 = \rho \frac{1}{\log v_1}\left(v_1^T - 1\right) \Rightarrow \rho = \frac{-C_0 \log v_1}{v_1^T - 1}$

$(2)\ -C_{10} = \rho \frac{v_2^{-10}}{\log v_2}\left(v_2^{10} - v_2^T\right) = \frac{C_0 \log v_1}{1 - v_1^T} \cdot \frac{v_2^{-10}}{\log v_2}\left(v_2^{10} - v_2^T\right)$

$$C_{10}\left(v_1^T - 1\right) = C_0\left(1 - v_2^{T-10}\right) \frac{\log v_1}{\log v_2}$$

$$C_{10} v_1^T + C_0 \frac{\log v_1}{\log v_2} v_2^{T-10} = C_{10} + C_0 \frac{\log v_1}{\log v_2}$$

Řešíme vzhledem k T numericky nebo použitím softwaru.

Cena C je větší než v předešlém případě, neboť splácení půjčky má vyšší úrok a trvá delší dobu.

Uvažujme nyní následující modifikaci:

Společnost splácí půjčku na počáteční výdaj 1 000 000 jednorázově po 10 letech. V průběhu 10 let pouze spojitě splácí úroky z půjčky, s konstantní intenzitou.

Máme: $C_0 = -1\,000\,000$, $C_{10} = -300\,000$

Spojité výdaje: $\varrho_r = -200\,000$

Spojité příjmy: $\varrho_p = 10\,000\,C$

Spojité splácení úroku: sazba je dána intenzitou úroku $\delta_1 = \log(1+i_1) = \log 1{,}12$,

intenzita plateb je $\varrho_u = -1\,000\,000\,\delta_1 \doteq -113\,329$.

V analogii s diskontním splácením úroku, roční úrok by byl $1\,000\,000\,i$.

Celková intenzita plateb: $\varrho = \varrho_r + \varrho_t + \varrho_u \doteq -313\,329 + 10\,000\,C$

Tedy: $C_0 = -1\,000\,000$ ... na počáteční výdaje v čase 0 si půjčíme

$\varrho(t) = 10\,000\,C - 313\,329,\ t \in (0,10)$ ... spojité příjmy v časovém intervalu $(0,10\rangle$ použijeme na hrazení úroků z půjčky a investování

$C_{10} = -300\,000$ ... závěrečný výdaj hradíme z investic

Výnosová rovnice: $-C_0 - C_{10} = \varrho \cdot \int_0^{10} (1+i_2)^{10-t}\,dt = \varrho \cdot \frac{v_2^{-10}}{\log v_2}\left(v_2^{10} - 1\right)$

$$\varrho = \frac{C_0 + C_{10}}{v_2^{-10} - 1} \cdot \log v_2$$

$$C = 39{,}107$$

Cena C je vyšší než v předchozích případech, neboť při jednorázovém splácení půjčky uhradíme větší částku na úrocích.

7. přednáška

Vliv inflace na výnosovou rovnici

Obecně: i_{inf} - roční míra inflace, budeme předpokládat, že je konstantní po celou dobu realizace finančního toku

Výpočet: $i_{inf} = \frac{\overline{CPI_k} - \overline{CPI_{k-1}}}{\overline{CPI_{k-1}}}$

$\overline{CPI_k}$ ... průměrná hodnota indexu spotřelských cen v roce k (průměrujeme přes měsíce)

$\overline{CPI_k} = \overline{CPI_{k-1}}(1+i_{inf})$ ... obdoba složeného úročení

Obecněji: $CPI_{t_2} = CPI_{t_1}(1+i_{inf})^{t_2-t_1}$, t_i ... čas v letech

CPI_t ... hodnota indexu spotřebitelských cen v čase t.

Inflace zvyšuje platby, což modelujeme následovně:

C_t ... platba v čase t (plánovaná v čase 0)

$C_t(1+i_{inf})^t$ ... platba zvýšená inflací

ϱ_t ... intenzita plateb (plánována v čase 0)

$\varrho_t(1+i_{inf})^t$ ... intenzita plateb zvýšena inflací

Současná hodnota: $NPV(i) = \sum_{j=0}^{n} C_{t_j} \left(\frac{1+i_{inf}}{1+i}\right)^{t_j} \overset{ozn.}{=} \sum_{j=0}^{n} C_{t_j} \left(\frac{1}{1+i_{real}}\right)^{t_j}$

$NPV(i) = \int_0^T \varrho(t) \left(\frac{1+i_{inf}}{1+i}\right)^t dt \overset{ozn.}{=} \int_0^T \varrho(t) \left(\frac{1}{1+i_{real}}\right)^t dt$

Máme $\frac{1+i_{inf}}{1+i} = \frac{1}{1+i_{real}} \Rightarrow 1+i = (1+i_{inf})(1+i_{real})$ ... $1+i$ ... deklarované zhodnocení částky 1

$1+i_{inf}$ ... částka 1 zvýšena inflací

$1+i_{real}$ ... skutečné zhodnocení částky 1

i ... deklarovaná (nominální) úroková míra (roční)

i_{real} ... reálná úroková míra (roční)

Dále: $1+i_{real} = \frac{1+i}{1+i_{inf}} < 1+i$ pro $i_{inf} > 0 \Rightarrow i_{real} = \frac{i-i_{inf}}{1+i_{inf}} \Rightarrow$ reálné zhodnocení 1 za jeden rok je menší než deklarované zhodnocení

může být $i_{real} < 0$

Příklad: Nevypověditelný dluhopis (konzola) byl zakoupen za nominální hodnotu 1000 a na konci každého roku přináší kupónovou platbu 100

a, Určete vnitřní míru výnosnosti z investice do dluhopisu

$NPV(i) = -1000 + 100 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^t = -1000 + 100 \frac{v}{1-v} = -1000 + \frac{100}{i} \Rightarrow i_0 = 0{,}1$

Máme $NPV'(i) = \frac{-100}{i^2} < 0 \Rightarrow NPV(i)$ je klesající $\Rightarrow$ investice do dluhopisu je výhodná pro $i < i_0 = 0{,}1$.

tzn. příjmy z kuponových plateb splatí půjčku na počáteční výdaj úroční sazbou $i < 10\%$ v konečném čase, neboť

$NPV(i) > 0 \Leftrightarrow 100 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^t > 1000$, a tedy ?? ex. $T : \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+i}\right)^t \leq 1000$

$100 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^t$ ... současná hodnota splátek

1000 ... výše půjčky

b, Investor si půjčil 1000 na zakoupení dluhopisu s roční úrokovou mírou 8%. Za jak dlouho bude půjčka splacena kuponovými platbami.

$1000 = 100 \cdot \sum_{t=1}^{T} v^t = 100 \frac{1-v^T}{i}$, $i = 0{,}08$, $v = \frac{1}{1{,}08}$

$10i = 1 - v^T$

$T \log v = \log(1-10i) \Rightarrow T = \frac{\log(1-0{,}8)}{\log\left(\frac{1}{1{,}08}\right)} = \frac{\log 0{,}2}{-\log 1{,}08} = 20{,}912$ let

Zřejme T jako řešení uvedené rovnice ex. $\Leftrightarrow$ ex. $\log(1-10i) \Leftrightarrow 1>10i \Leftrightarrow i<0{,}1$.

V praxi (viz Důchod s necelým počtem platebních období): 20 splátek ve výši 100 + poslední neúplná splátka $100 \cdot 0{,}912$.

Pak: $100 \cdot \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^t + 91{,}2 \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^{20{,}912} = 1\,000{,}055$

Při 21 splátkách výše 100: $100 \cdot \sum_{t=1}^{21} \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^t = 1\,001{,}68$

c, Investor si může vypůjčit 1000 pouze s roční úrokovou mírou 15%. Při jaké roční míře inflace, o kterou emitent bude navyšovat kuponové platby, splatí půjčku v konečném čase?

Zřejmě: pro $i \geq 0{,}1$ není půjčka splatitelná kuponovými platbami 100 v konečném čase.

Uvažujme $100 \cdot (1+i_{inf})^t$ ... kuponová platba v čase t navýšená inflací

$$NPV(i) = -1000 + 100 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+i_{inf}}{1+i}\right)^t = -1000 + 100 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i_{real}}\right)^t$$

Při řešení vzhledem k neznámé i_{real} je kořen $i_{real,0} = 0{,}1$ a $NPV(i) > 0$ pro $i_{real} < i_{real,0} = 0{,}1$.

Při deklarované úrokové míře $i = 0{,}15$, tedy požadujeme: $i_{real} = \frac{i - i_{inf}}{1+i_{inf}} = \frac{0{,}15 - i_{inf}}{1+i_{inf}} < 0{,}1 \Rightarrow 0{,}15 - i_{inf} < 0{,}1 + 0{,}1\, i_{inf} \Rightarrow 0{,}05 < 1{,}1\, i_{inf}$

$$i_{inf} > \frac{0{,}05}{1{,}1} = 0{,}0\overline{45}$$

Vidíme: při inflaci se původně nevýhodný projekt může stát výhodný.

Jiné typy vnitřní míry výnosnosti

V případě, že výnosová rovnice nemá kořen $i_0 > -1$ nebo má takových kořenů více, modifikujeme ji a kořenem je

Modifikovaná vnitřní míra výnosnosti

Ozn.: k ... hodnotící úroková míra (roční, známá)

$T \geq t_n$ ... časový okamžik v budoucnosti

$C_{t_0}, C_{t_1}, \dots, C_{t_n}$ ... platby v časech $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$

Modifikovaná výnosová rovnice: $\sum_{j: C_{t_j} < 0} -C_{t_j} \left(\frac{1}{1+k}\right)^{t_j} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^T \sum_{j: C_{t_j} > 0} C_{t_j} (1+k)^{T-t_j}$

Kořen $i_{0,M}$ existuje a je jednoznačně určen, nazývá se Modifikovaná vnitřní míra výnosnosti (MIRR):

$$i_{0,M} = \left(\frac{\sum_{j: C_{t_j} > 0} C_{t_j} (1+k)^{T-t_j}}{\sum_{j: C_{t_j} < 0} C_{t_j} (1+k)^{-t_j}} \right)^{-\frac{1}{T}} - 1 > -1 \quad ; \quad i_{0,M} > 0$$

8. přednáška 20.11.2024

Posouzení investičního projektu pomocí MIRR

Chceme: $NPV(k) = \sum_{j: C_{t_j} < 0} C_{t_j} \left(\frac{1}{1+k}\right)^{t_j} + \sum_{j: C_{t_j} > 0} C_{t_j} \left(\frac{1}{1+k}\right)^T (1+k)^{T-t_j} > 0$

Máme: $NPV_M(k) = \sum_{j: C_{t_j} < 0} C_{t_j} \left(\frac{1}{1+k}\right)^{t_j} + \sum_{j: C_{t_j} > 0} C_{t_j} \left(\frac{1}{1+i_{0,M}}\right)^T (1+k)^{T-t_j} > 0$

Odtud: $\left(\frac{1}{1+k}\right)^T > \left(\frac{1}{1+i_{0,M}}\right)^T \Leftrightarrow i_{0,M} > k$

Investiční projekt považujeme za výhodný při úrokové míře k, když $i_{0,M} > k$.

Obecnější pojetí MIRR

k_v … úroková míra pro financování výdajů (pro půjčku na výdaje)

k_p … úroková míra pro investování příjmů (pro zhodnocení příjmů)

Výnosová rovnice má pak tvar $\sum_{j: C_{t_j}<0} -C_{t_j}\left(\frac{1}{1+k_v}\right)^{t_j} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^T \sum_{j: C_{t_j}>0} C_{t_j}(1+k_p)^{T-t_j}$

Kořen $i_{0M,vp} > -1$ je modifikovaná vnitřní míra v obecnějším pojetí.

Zřejmě platí: $i_{0M,vp} > k_p \Rightarrow$ investiční projekt je výhodný při reinvestiční úrokové míře k_p.

Časově vážená míra výnosnosti

Užití: když se úroková míra reprezentující výnos mění v čase.

Označme: i_j … úroková míra platná v časových intervalech $(t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, zpravidla $t_0 = 0$.

Výnosová rovnice: $(1+i)^{t_n - t_0} = (1+i_1)^{t_1 - t_0} \cdot (1+i_2)^{t_2 - t_1} \cdot \ldots \cdot (1+i_n)^{t_n - t_{n-1}}$, t. zn. $(1+i)^{t_n - t_0} = \prod_{j=1}^{n} (1+i_j)^{t_j - t_{j-1}}$

Kořen i_{0C} uvedené rovnice vždy existuje, nazývá se časově vážená vnitřní míra výnosnosti

Speciálně: $t_j = j$, $j = 0, \dots, n$

Pak: $1+i = \left(\prod_{j=1}^{n} (1+i_j)\right)^{\frac{1}{n}}$ … geometrický průměr úrokovacích faktorů $1+i_1, \dots, 1+i_n$.

Kořen výnosové rovnice má v obecném případě tvar: $i_{0C} = \left(\prod_{j=1}^{n} (1+i_j)^{t_j - t_{j-1}}\right)^{\frac{1}{t_n - t_0}} - 1 > -1$, $i_{0C} > 0$

Příklad: Uvažujeme fond, který realizuje v časech t_j platby C_{t_j} (příjmy, výdaje).

Označme: F_{t_j} … stav fondu v čase t_j po realizaci platby C_{t_j}

Máme: $F_{t_j} = F_{t_{j-1}} (1+i_j)^{t_j - t_{j-1}} + C_{t_j}$

Odtud: $(1+i_j)^{t_j - t_{j-1}} = \frac{F_{t_j} - C_{t_j}}{F_{t_{j-1}}}$

Pozn.: Ve výnosové rovnici má i charakter spotové úrokové míry pro časový interval $(t_0, t_n]$ a $i_1, \dots, i_n$ mají charakter forwardových úrokových měr pro časové intervaly $(t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$

Spotová úroková míra i_{0C} se určí ze známých forwardových měr $i_1, \dots, i_n$.

Někdy je tomu naopak - u dluhopisů se určují spotové úrokové míry z výnosových křivek a forwardové úrokové míry ze spotových.

Oceňování obligací

Spravedlivá cena

Obligace (dluhopisy) jsou jedním z nejdůležitejších typů cenných papírů. Modelování jejich ceny a výnosu patří k základním aplikacím teorie úrokování a současné hodnoty.

Obligace představuje závazek emitenta vůči majiteli CP.

Základní dělení:

Obligace s nulovým kuponem (bezkuponová obligace)

Zpravidla k datu emise prodávány s diskontem (t.zn. emitent jejich prodejem získá půjčku s diskontem, např. prodá za 900, po uplynutí doby splatnosti vyplácí majiteli nominální hodnotu 1000.)

Nepřináší majiteli úrokové platby.

Obligace kupónové

Pro emitenta představují úročený úvěr, úroky = kuponové platby jsou spláceny periodicky, jistina (výše půjčky) je splacena jednorázově po uplynutí doby splatnosti.

Obligace jsou obchodovatelné, je tedy třeba ????? určovat jejich cenu k různým časovým okamžikům mezi datem emise a datem splatnosti.

Základní parametry obligací

n ... doba splatnosti (v letech, obvykle $n \geq 1$ celé),

N ... nominální hodnota (definuje obligaci),

R ... umořovací hodnota (často $R = N$) ... v čase n vyplatí emitent majiteli,

r ... kupónová sazba (roční nominální úroková míra),

p ... počet kupónových plateb do roku (frekvence kuponových plateb),

$C = \frac{Nr}{p}$ ... kuponová platba ... úrok z úvěru výše N splácený polhůtně p-krát ročně s nominální úrokovou mírou $\frac{r}{p}$,

P_t ... spravedlivá cena k času t,

$P^* = \frac{P_0}{N}$ ... cena za jednotku nominální hodnoty,

$y = \frac{C}{P_0}$ ... běžný výnos (úroková míra vztahující se ke ?????? kuponovému období),

i ... výnos do splatnosti ... vnitřní míra výnosnosti z investice do obligace (efektivní úroková míra).

Pozn.: Kuponové platby mohou být zdaněny sazbou τ, pak vyplácí emitent majiteli $C(1-\tau)$; $0 < \tau < 1$ (v ČR $\tau = 15\%$).

Technicky může být zdaněn i úmor R, případně $R - P_0$, t.zn. zisk při splacení obligace.

Nadále budeme předpokládat:

$p = 1$ ... roční kuponové platby,

$\tau = 0$ ... bez daně,

$R = N$ ... v čase n vyplacena nominální hodnota.

Spravedlivá cena k datu emise (vnitřní hodnota obligace)

$$P_0 = rN\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{1+i}\right)^t + N\left(\frac{1}{1+i}\right)^n \quad ⊛$$

P_0... současná hodnota kuponových plateb + současná hodnota závěrečné výplaty nominální hodnoty.

Je to cena počítaná pomocí finanční matematiky.

Tržní cena je stanovena burzou cenných papírů na základě nabídky a poptávky.

Spravedlivá cena se počítá i k časům $0<t<n$. Je-li v čase t:

spravedlivá cena > tržní cena $\Rightarrow$ obligace je na trhu podhodnocena, vyplatí se ji koupit (investorovi)

spravedlivá cena < tržní cena $\Rightarrow$ obligace je na trhu nadhodnocena, vyplatí se ji prodat (majiteli)

Výnos do splatnosti

i_0 je řešením rovnice ⊛ vzhledem k neznámé i.

Rovnice ⊛ má tedy dvojí použití:

1, určení ceny při konkrétním požadovaném výnosu do splatnosti,

2, určení výnosu do splatnosti při známé ceně.

Věta 4: Vztah mezi kuponovou a výnosem do splatnosti. Pro obligace s ročními kuponovými platbami a závěrečnou výplatou nominální hodnoty platí při kladném výnosu do splatnosti i:

$$P_0 = N \Leftrightarrow r = i$$
$$P_0 < N \Leftrightarrow r < i$$
$$P_0 > N \Leftrightarrow r > i$$

Důkaz: Z rovnice ⊛ dostáváme $\frac{P_0}{N} = \frac{r}{i}(1-v^n) + v^n$, kde $v = \frac{1}{1+i}$.

$$\frac{P_0}{N} - 1 = \left(\frac{r}{i} - 1\right)(1-v^n), \quad (1-v^n) > 0 \text{ pro } i > 0$$

$\boxtimes$

Věta 5: Vztah mezi běžným výnosem a výnosem do splatnosti. Pro obligaci s ročními kuponovými platbami a závěrečnou výplatou nominální hodnoty platí při kladném výnosu do splatnosti i:

$$P_0 = N \Leftrightarrow y = i$$
$$P_0 < N \Leftrightarrow y < i$$
$$P_0 > N \Leftrightarrow y > i$$

Důkaz: $P_0 = N \Leftrightarrow P^* = \frac{P_0}{N} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{rN}{P_0} = \frac{r}{P^*} = r \overset{V4}{\Leftrightarrow} y = i$

$$P_0 < N \Leftrightarrow P^* < 1: P^* = \frac{P_0}{N} = \frac{r}{i}(1-v^n) + v^n > \frac{r}{i}(1-v^n) + P^* v^n$$

$$P^*(1-v^n) > \frac{r}{i}(1-v^n), \quad (1-v^n) > 0 \text{ pro } i > 0$$

$$i > \frac{r}{P^*} = y$$

Pro $P_0 > N$ analogicky

$\boxtimes$

9. přednáška

27.11.2024

Zkusíme nyní omezit výnos do splatnosti z obou stran.

Pro $P_0<N$ je $N-P_0$ zisk, který realizuje majitel obligace s ročními kuponovými platbami při vyplacení nominální hodnoty N.

Výhodnější by pro něj bylo dostávat tento zisk ve splátkách spolu s kuponovými platbami (a hned jej investovat) $\Rightarrow$ v tom případě by rovnice pro spravedlivou cenu měla tvar $P_0=\sum_{t=1}^{n}\left(rN+\frac{N-P_0}{n}\right)v^t+P_0v^n$, $v=\frac{1}{1+i}$

$$P_0=\left(rN+\frac{N-P_0}{n}\right)\frac{1-v^n}{i}+P_0v^n \quad /\cdot\frac{1}{N}$$

$$P^*=\left(r+\frac{1-P^*}{n}\right)\frac{1-v^n}{i}+P^*v^n \quad /\cdot\frac{1}{1-v^n}\ ;\ 1-v^n>0 \text{ pro } i>0$$

$$P^*=\frac{1}{i}\left(r+\frac{1-P^*}{n}\right)$$

Kořen: $i_s=\frac{1}{P^*}\left(r+\frac{1-P^*}{n}\right)>\frac{r}{P^*}=y$, $\frac{1-P^*}{n}>0$.

Zřejmě: výnos i_s je větší než výnos do splatnosti i_0 při výplatě celé nominální hodnoty N v čase n let.

Z věty 5 a provedených úprav dostáváme pro $P_0<N$: $y=\frac{r}{P^*}<i_0<\frac{1}{P^*}\left(r+\frac{1-P^*}{n}\right)=i_s$.

Pro $P_0>N$ je $N-P_0$ ztráta, kterou realizuje majitel obligace s ročními kuponovými platbami při vyplacené nominální hodnotě N.

Méně výhodné by pro něj bylo ???? tuto ztrátu ve splátkách srážkou z kuponových plateb. Stejnými úpravami jako v předešlém případě dostaneme $i_s=\frac{1}{P^*}\left(r+\frac{1-P^*}{n}\right)<\frac{r}{P^*}=y$, $\frac{1-P^*}{n}<0$.

Zřejmě: výnos i_s je menší než výnos do splatnosti i_0 při výplatě celé nominální hodnoty N v čase n let.

Dostáváme tedy z Věty 5 a provedených úvah pro $P_0>N$: $i_s=\frac{1}{P^*}\left(r+\frac{1-P^*}{n}\right)<i_0<\frac{r}{P^*}=y$.

Dále se podíváme, jak cena k datu emise závisí na ????? parametrech obligace.

Věta 6: Pro obligace s ročními kupónovými platbami a závěrečnou výplatou nominální hodnoty platí při kladném výnosu do splatnosti i:
1, P_0 je rostoucí funkce kuponové sazby r,
2, P_0 je klesající funkce výnosu do splatnosti i,
3, P_0 je $\begin{cases}\text{rostoucí funkce doby splatnosti } n \text{ pro } P_0>N,\\ \text{klesající funkce doby splatnosti } n \text{ pro } P_0<N.\end{cases}$

Důkaz: derivováním

1, $\frac{\partial P_0}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(rN\frac{1-v^n}{i}+Nv^n\right)=N\frac{1-v^n}{i}>0$ pro $i>-1$.

2, $\frac{\partial P_0}{\partial i}=\frac{\partial}{\partial i}\left(rN\sum_{i=1}^{n}(1+i)^{-t}+N(1+i)^{-n}\right)=rN\sum_{t=1}^{n}(-t)(1+i)^{-t-1}-nN(1+i)^{-n-1}<0$ pro $i>-1$.

3, $\frac{\partial P_0}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{rN}{i}+Nv^n\left(1-\frac{r}{i}\right)\right)=N\left(1-\frac{r}{i}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\exp(n\log v)\right)=N\left(1-\frac{r}{i}\right)v^n\log v$, $\log v<0$ pro $i>0$

$$N\left(1-\frac{r}{i}\right)v^n\log v\begin{cases}>0 \text{ pro } 1-\frac{r}{i}<0 \Leftrightarrow r>i \Leftrightarrow P_0>N\\ <0 \text{ pro } 1-\frac{r}{i}>0 \Leftrightarrow r<i \Leftrightarrow P_0<N\end{cases}$$ s využitím Věty 4.

$\boxtimes$

Pozn.: Pro $P_0 = N \Leftrightarrow r = i$ je $P_0 = rN\frac{1-v^n}{r} + Nv^n = N$.

Obligace s volitelným datem splatnosti

U tzv. vypověditelných obligací má emitent právo vyplatit umořovací hodnotu před uplynutím doby splatnost obligace, a to zpravidla: kdykoliv po určitém datu,

kdykoliv pře určitým datem.

kdykoliv mezi 2 určitými daty,

většinou v čase nějaké kuponové platby.

Obligace nemá pevně danou dobu splatnosti $\Rightarrow$ majitel nemůže spočítat výnos do splatnosti, může pouze provést posouzení vlivu doby splatnosti na výnos do doby splatnosti.

Posouzení doby splatnosti na výnos do doby splatnosti

Uvažujme obligaci s ročními kupónovými platbami, která byla zakoupena k datu emise za cenu P_0.

K vyplacení nominální hodnoty může dojít kdykoliv mezi 2 daty kupónových plateb, t.zn.:

minimální doba splatnosti je n_1, maximální doba splatnosti je n_2.

Pro $P_0 < N$ je dle posledně uvedené Věty 6 P_0 klesající funkce n, P_0 klesající funkce i.

$n \in [n_1, n_2): P_0 = P_0(n_2, i) = P_0(n, i_0) < P_0(n, i) \Leftrightarrow i_0 > i$.

Tedy: k dosažení vyššího výnosu i_0 při stejné cenně je třeba kratší doby splatnosti $n < n_2$.

Neboli majitel si určí minimální výnos do doby splatnosti z rovnice $\circledast$ pro dobu splatnosti n_2.

Pro $P > N$ je dle posledně uvedené Věty 6 P_0 rostoucí funkce n, P_0 klesající funkce i.

$n \in (n_1, n_2]: P_0 = P_0(n_1, i) = P_0(n, i_0) < P_0(n, i) \Leftrightarrow i_0 > i$.

Tedy: k dosažení vyššího výnosu i_0 je třeba delší doby splatnosti $n > n_1$.

Neboli: majitel si určí minimální výnos do splatnosti z rovnice $\circledast$ pro dobu splatnosti n_1.

Spravedlivá cena k datu emise při kuponových platbách p-krát do roka; $R = N$

$P_0 = \frac{Nr}{p}\sum_{t=1}^{np} v^{\frac{t}{p}} + Nv^n = N\frac{r}{p}v^{\frac{1}{p}}\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{p}}} + Nv^n = N\frac{r}{p}\frac{1-v^n}{\frac{i(p)}{p}} + Nv^n \Rightarrow P_0 = Nr\frac{1-v^n}{i(p)} + Nv^n$, kde $v = \frac{1}{1+i} = \left(\frac{1}{1+\frac{i(p)}{p}}\right)^p$

Stejně jako v důkazech Vět 4 a 5 lze odvodit: $P_0 = N \Leftrightarrow r = i(p)$

$P_0 < N \Leftrightarrow r < i(p)$

$P_0 > N \Leftrightarrow r > i(p)$

$P_0 = N \Leftrightarrow \frac{r}{p^*} = i(p) \Leftrightarrow \frac{Nr}{P_0 p} = \frac{i(p)}{p} \Leftrightarrow y = \frac{C}{P_0} = \frac{i(p)}{p}$

$P_0 < N \Leftrightarrow \frac{r}{p^*} = i(p) \Leftrightarrow \frac{Nr}{P_0 p} < \frac{i(p)}{p} \Leftrightarrow y = \frac{C}{P_0} < \frac{i(p)}{p}$ (Analogicky pro $P_0 > N$)

Spravedlivá cena k obecnému datu D

Uvažujme roční kuponové platby a $R=N$. Nechť do uplynutí doby splatnosti chybí n^* let, $n^* = [n^*]+\{n^*\}$ $([n^*]=n-k)$.

Zřejmě: $D=k-\{n^*\}=n-n^*$

$k=n-[n^*]$ ... čas nejbližší kuponové platby

$P_D=\left(rN\sum_{t=0}^{[n^*]} v^t + N v^{[n^*]}\right) v^{\{n^*\}}$ $\circledast\circledast$, kde $\left(rN\sum_{t=0}^{[n^*]} v^t + N v^{[n^*]}\right)=P_k$.

Pozn.: Indexování obligace

Někdy se kuponové platby ????? s ohledem na vývoj určitého indexu (burzovní index, CPE,...)

Ozn. při ročních kupónových platbách:

$A_0 \leq 0$ ... časová báze ... okamžik, k němuž se stanoví základní hodnota indexu I, např.: $I(t_0)=1000$.

0 ... datum emise obligace

Rovnice $\circledast$ pak má tvar $P_0=rN\sum_{t=1}^{n}\frac{I(t_0,t)}{I(t_0)}v^t+Nv^n$

Kdyby I byl index spotřebitelských cen (CPI), lze psát $CPI(t_0,t)=CPI(t_0)(1+i_{inf})^t$ a tedy $\frac{CPI(t_0,t)}{CPI(t_0)}=(1+i_{inf})^t$. Pak $rN\frac{CPI(t_0,t)}{CPI(t_0)}=rN(1+i_{inf})^t$ ... kuponová platba v čase t navýšená o inflaci.

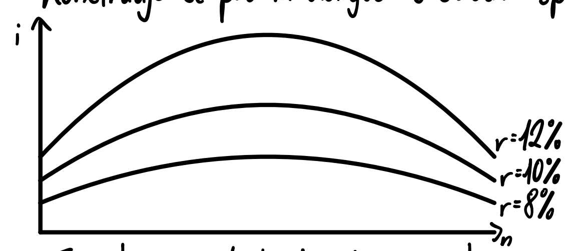
10. přednáška

4.12.2024

Pozn.: Výnosová křivka

Modeluje závislost výnosu do splatnosti na době splatnosti obligace.

Konstruuje se pro m obligací s dobami splatnosti $n_1,\dots,n_m$ s výnosy do splatnosti $i_1,\dots,i_m$, ale se stejnou kuponovou sazbou r.



Pro dvojice $(n_1,i_1),\dots,(n_m,i_m)$ sestrojíme bodový graf.

Body prokládáme křivku (metodou ???? regresní analýzy, interpolace, exterpolace,...)

Typický průběh křivky: největší výnos při střední době splatnosti.

Lze to vysvětlit tím, že na trhu jsou preferovány obligace s krátkou dobou splatnosti (ze strany kupujících - např. bank, pojišťoven,...) a obligace s dlouhou dobou splatnosti (ze strany emitentů). Takové obligace mají vyšší ceny a tedy dle Věty 6 nižší výnos do splatnosti.

Čistá a hrubá cena

Změní-li obligace majitele v čase $k-1<D\leq k$ mezi daty 2 kuponových plateb, je problém, kdo má dostat kuponovou platbu v čase k, zda prodávající, nebo kupující.

Zpravidla: kuponovou platbu v čase k inkasuje kupující, prodávající je kompenzován přirážkou k ceně.

Rovnici lze psát ve tvaru $P_D = rNv^{\{n^*\}} + rN\sum_{t=1}^{[n^*]} v^{t+\{n^*\}} + Nv^{n^*}$, $AI < rN$, $\hat{P}_D = rN\sum_{t=1}^{[n^*]} v^{t+\{n^*\}} + Nv^{n^*}$.

P_D ... hrubá cena obligace k datu D,

AI ... alikvotní úrok,

hodnota kuponové platby z času k v čase D,

odškodnění prodávajícího za to, že nedostane kuponovou platbu v čase k,

$\hat{P}_D$ ... čistá cena obligace k datu D.

V praxi se hrubá cena počítá jako $P_D = \hat{P}_D + AI$, kde: $\hat{P}_D$ ... čistá cena = kótovaná cena ... tvoří ji burza CP,

AI ... alikvotní úrok = poměrná část kupónové platby.

Prodej před datem ex-kupón v čase $D_1 \leq E_x$:

kupónovou platba v čase k obdrží kupující

cena je navýšeno o alikvotní úrok $AI = C(D_1 - k + 1) > 0$, což je poměrná část kupónové platby, která náleží prodávajícímu.

Prodej po datu ex-kupón v čase $D_2 > E_x$:

kupónovou platba v čase k obdrží prodávající

cena je snížena o alikvotní úrok $AI = C(D_2 - k) < 0$, což je poměrná část kupónové platby, která náleží kupujícímu.

Datum ex-kupón se volí blízko k času k z důvodu, že v časovém intervalu $(E_x, k]$ by se již administrativně nemuselo podařit emitentovi najít nového majitele obligace a poslat mu kuponovou platbu.

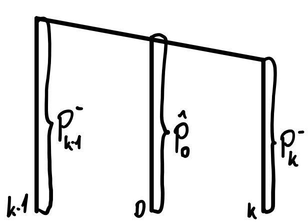
Pozn.: Kótovací cena se například dá určit lineární interpolací ze spravedlivých cen k datům kupónových plateb těsně před prodejem a těsně po prodeji obligace.

$P_{k-1}^- = rN\sum_{t=1}^{n-k+1} v^t + Nv^{n-k+1}$ ... cena k času $k-1$ bez zahrnutí kupónové platby v čase $k-1$,

$P_k^- = rN\sum_{t=1}^{n-k} v^t + Nv^{n-k}$ ... cena k času k bez zahrnutí kupónové platby v čase k.

Zřejmě: $P_{k-1}^- - P_k^- = rNv^{n-k+1} + Nv^{n-k+1} - Nv^{n-k} = Nv^{n-k}(rv + v - 1) > 0 \iff v(r+1) > 1 \iff r + 1 > 1 + i \iff r > i$, $Nv^{n-k} > 0$ pro $i > 0$.

Tedy: $\left.\begin{array}{l} P_{k-1}^- = P_k^- \iff r = i \iff P_0 = N \\ P_{k-1}^- < P_k^- \iff r < i \iff P_0 < N \\ P_{k-1}^- > P_k^- \iff r > i \iff P_0 > N \end{array}\right\}$ dle Věty 4.



$\frac{P_{k-1}^- - P_k^-}{1} = \frac{\hat{P}_0 - P_k^-}{k - D} \Rightarrow \hat{P}_0 = P_k^- + (P_{k-1}^- - P_k^-)(k - D)$

Pro $D = n - n^*$, $k = n - [n^*]$ máme $\hat{P}_0 = P_k^- + \{n^*\}(P_{k-1}^- - P_k^-)$

Střední doba splatnosti a teorie imunizace

Durace a konvexita

V této kapitole se dozvíme, jak se může investor chránit proti změnám úrokových sazeb. Nejprve zavedeme charakteristiky finančních toků, s nimiž imunizace pracuje.

Uvažujme finanční tok s platbami $C_{t_0}, C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}$ v časech $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Střední doba splatnosti (Durace)

Je váženým průměrem dob splatnosti $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

$$D(i) = \frac{\sum_{j=0}^{n} t_j C_{t_j} v^{t_j}}{\sum_{j=0}^{n} C_{t_j} v^{t_j}} \; ; \; v = \frac{1}{1+i}$$

Váhy jsou $\frac{C_{t_j}(1+i)^{-t_j}}{NPV(i)}$, jejich součet je zřejmě 1. Durace je definována pro $NPV(i) \neq 0$.

Máme: $NPV(i) = \sum_{j=0}^{n} C_{t_j} (1+i)^{-t_j}$

$NPV'(i) = -\sum_{j=0}^{n} t_j C_{t_j} (1+i)^{-t_j - 1}$.

Tedy: $D(i) = -(1+i)\frac{NPV'(i)}{NPV(i)}$.

Konvexita

$$C(i) = \frac{\sum_{j=0}^{n} t_j (t_j+1) C_{t_j} v^{t_j}}{\sum_{j=0}^{n} C_{t_j} v^{t_j}} \; ; \; v = \frac{1}{1+i}$$

Konvexita je definovaná pro $NPV(i) \neq 0$.

Máme: $NPV''(i) = \sum_{j=0}^{n} t_j (t_j+1) C_{t_j} (1+i)^{-t_j-2}$.

Tedy: $C(i) = \frac{(1+i)^2 NPV''(i)}{NPV(i)}$

Použití durace a konvexity:

modelování změn současné hodnoty při malých změnách úrokových sazeb.

Uvažujme změnu $i \rightarrow i + \Delta i$, $\Delta i \approx 0$ a zapišme Taylorův rozvoj pro relativní změnu současné hodnoty.

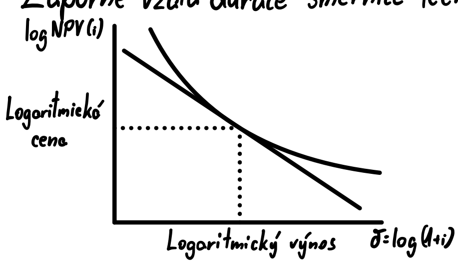
$$\frac{NPV(i+\Delta i) - NPV(i)}{NPV(i)} = \frac{NPV'(i)}{NPV(i)}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{NPV''(i)}{NPV(i)}(\Delta i)^2 + \cdots \approx -\frac{1}{1+i} D(i) \cdot \Delta i + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}\right)^2 C(i) \cdot (\Delta i)^2$$

Při aplikaci spojitého úročení pracujeme s intenzitou úroku δ a máme: $NPV(\delta) = \sum_{j=0}^{n} C_{t_j} e^{-\delta t_j}$

$NPV'(\delta) = -\sum_{j=0}^{n} t_j C_{t_j} e^{-\delta t_j}$

$D(\delta) = -\frac{NPV'(\delta)}{NPV(\delta)} = -(\log NPV(\delta))'$

Záporně vzatá durace směrnice tečny ke křivce závislosti $\log NPV(\delta)$ na $\delta = \log(1+i)$



$\log NPV(\delta)$ = logaritmus ceny (např. spravedlivá cena obligace)

$\log(1+i)$ = logaritmus výnosu (např. výnos do splatnosti obligace)

Uvažujme změnu $\delta_0 \to \delta_1 = \delta_0 + \Delta\delta$; $\Delta\delta \approx 0$.

Relativní změna současné hodnoty je $\frac{NPV(\delta_1)-NPV(\delta_0)}{NPV(\delta_0)} = \frac{NPV(\delta_1)-NPV(\delta_0)}{\delta_1-\delta_0}\cdot\frac{\delta_1-\delta_0}{NPV(\delta_0)} \approx \frac{NPV'(\delta_0)}{NPV(\delta_0)}(\delta_1-\delta_0) = -D(\delta_0)(\delta_1-\delta_0)$

Tedy: durace a konvexita měří citlivost současné hodnoty na malé změny úrokových sazeb. Lze je proto považovat za míry úrokového rizika.

Pozn.: duraci a konvexitu lze definovat i pro spojitý finanční tok případně pro finanční tok se spojitou a diskrétní složkou.

V kombinovaném případě máme: $NPV(i) = \sum_{j=0}^{n} C_{t_j} v^{t_j} + \int_0^T \varrho(t) v^t \, dt$; $v = \frac{1}{1+i}$

$$D(i) = \frac{\sum_{j=0}^{n} t_j C_{t_j} v^{t_j} + \int_0^T t\,\varrho(t) v^t \, dt}{NPV(i)}$$

$$C(i) = \frac{\sum_{j=0}^{n} t_j(t_j+1) C_{t_j} v^{t_j} + \int_0^T t(t+1)\varrho(t) v^t \, dt}{NPV(i)}$$

V teorii imunizace se počítá durace případně konvexita posloupnosti plateb se stejným znaménkem.

Podívejme se na vlastnosti durace v takovém případě.

11. přednáška

11.12.2024

Věta 7: Pro nezáporné platby $C_{t_0}, C_{t_1}, \dots, C_{t_n}$ platí:
1. $D = t_k \Leftrightarrow C_{t_j} = 0$ pro $j \neq k$ a $C_{t_j} \neq 0$ pro $j = k$,
2. $0 \leq D \leq t_n = \max_j t_j$,
3. D je klesající funkcí úrokové sazby.

Důkaz: Plyne přímo z definice durace. $\boxtimes$

Charakteristiky příjmu z obligací

Uvažujme obligaci s následujícími parametry:
- N ... nominální hodnota,
- n ... doba splatnosti v letech,
- $C = rN$ ... roční polhůtné kupónové platby $(p=1)$,
- $R = N$ ... závěrečná výplata = umořovací hodnota.

Podíváme se na $NPV(i), D(i), C(i)$ příjmů majitele obligace.

Současná hodnota:

$NPV(i) = rN \sum_{t=0}^{n} (1+i)^{-t} + N(1+i)^{-n} = P_0$ ... spravedlivá cena k datu emise.

$P_0 = rN \frac{1-v^n}{i} + Nv^n$

$\lim_{n\to\infty} NPV(i) = rN \sum_{t=1}^{\infty} v^t = rN \frac{v}{1-v} = \frac{rN}{i}$ ... spravedlivá cena k datu emise pro věčnou obligaci.

Zřejmě: $i = \frac{rN}{P_0}$, i ... výnos do splatnosti, $\frac{rN}{P_0}$ ... běžný výnos (v případě věčné obligace).

$rN = iP_0$, rN... kupónová platba, $P_0 i$... úročená výše úvěru pro emitenta.

Durace: $D(i) = \frac{1}{NPV(i)}\left(rN\sum_{t=1}^{n} t(1+i)^{-t} + N_n(1+i)^{-n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} D_n(i) = \frac{rN\sum_{t=1}^{\infty} t(1+i)^{-t}}{rN\sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{-t}} = \frac{-(1+i)\left(\frac{1}{i}\right)'}{\frac{1}{i}} = \frac{(1+i)\frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i}} = \frac{1+i}{i} = \frac{1}{d} = \frac{1}{1-v}$$ ... durace pro věčnou obligaci.

Konvexita: $C(i) = \frac{1}{NPV(i)}\left(rN\sum_{t=1}^{n} t(t+1)(1+i)^{-t} + N_n(n+1)(1+i)^{-n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} C_n(i) = \frac{rN\sum_{t=1}^{\infty} t(t+1)(1+i)^{-t}}{rN\sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{-t}} = \frac{(1+i)^2\left(\frac{1}{i}\right)''}{\frac{1}{i}} = \frac{(1+i)^2\, 2\left(\frac{1}{i}\right)^3}{\frac{1}{i}} = \frac{2(1+i)^2}{i^2} = \frac{2}{d^2} = \frac{2}{(1-v)^2}$$ ... konvexita pro věčnou obligaci.

Durace a Imunizace

Nyní se podíváme na další interpretaci durace, a to v případě finančního toku se stejnými znaménky (např. příjmy z obligace).

Uvažujme platby $C_{t_0} > 0, C_{t_1} > 0, \dots, C_{t_n} > 0$ v časech $0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

Označme: i_0... hodnotící roční míra

Změny: $i_1 < i_0$

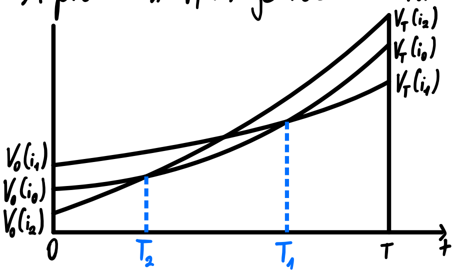
$i_2 > i_0$

$V_0(i) = NPV(i) = \sum_{j=0}^{n} C_{t_j}(1+i)^{-t_j}$ ... hodnota v čase 0.

$V_t(i) = NPV(i)\cdot(1+i)^t = \sum_{j=0}^{n} C_{t_j}(1+i)^{t-t_j}$ ... hodnota v čase t.

Zřejmě: $V_0(i)$ je klesající funkce proměnné i $(V_0'(i) < 0)$, $i > -1$

A pro $T \ge t_n$: $V_T(i)$ je rostoucí funkce proměnné i $(V_T'(i) > 0)$



Existují časy T_1, T_2 takové, že $V_{T_1}(i_0) = V_{T_1}(i_1)$ a $V_{T_2}(i_0) = V_{T_2}(i_2)$

t.zn.: $V_{t_k}(i_0) = V_{t_k}(i_k)$, $k \in \{1, 2\}$

Odtud: $V_0(i_0)(1+i_0)^{T_k} = V_0(i_k)(1+i_k)^{T_k} \Rightarrow \left(\frac{1+i_0}{1+i_k}\right)^{T_k} = \frac{V_0(i_k)}{V_0(i_0)}$

$$T_k = \frac{-(\log V_0(i_k) - \log V_0(i_0))}{\log(1+i_k) - \log(1+i_0)} > 0 \quad \left(-\log V_0(i_k) + \log V_0(i_0) \lessgtr \begin{smallmatrix} >0 \text{ pro } i_k > i_0 \\ <0 \text{ pro } i_k < i_0 \end{smallmatrix},\ \log(1+i_k) - \log(1+i_0) \lessgtr \begin{smallmatrix} >0 \text{ pro } i_k > i_0 \\ <0 \text{ pro } i_k < i_0 \end{smallmatrix}\right).$$

$$T_k = -\frac{\log NPV(i_k) - \log NPV(i_0)}{\log(1+i_k) - \log(1+i_0)} = -\frac{\log NPV(\delta_k) - \log NPV(\delta_0)}{\delta_k - \delta_0}$$

$$\lim_{\delta_k \to \delta_0} T_k = -(\log NPV(\delta))'\Big|_{\delta=\delta_0} = -\frac{NPV'(\delta_0)}{NPV(\delta_0)} = D(\delta_0) \overset{\text{ozn.}}{=} D_0.$$

Podíváme se na hodnotu finančního toku v čase D_0 při úrokové intenzitě δ.

$V_{D_0}(\delta) = NPV(\delta)e^{\delta D_0}$

$V_{D_0}'(\delta) = NPV'(\delta)e^{\delta D_0} + NPV(\delta)D_0 e^{\delta D_0} = e^{\delta D_0}\left(NPV'(\delta) + NPV(\delta)(-1)\frac{NPV'(\delta_0)}{NPV(\delta_0)}\right) = 0$ pro $\delta = \delta_0 \Rightarrow$ v bodě δ_0 má V_{D_0} lok. extrém.

$V_{D_0}''(\delta) = NPV''(\delta)e^{\delta D_0} + NPV' D_0 e^{\delta D_0} + NPV'(\delta)D_0 e^{\delta D_0} + NPV(\delta)D_0^2 e^{\delta D_0} = e^{\delta D_0}\left(NPV''(\delta) + 2NPV'(\delta)D_0 + NPV(\delta)D_0^2\right) =$

$= e^{\delta D_0}\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} C_{t_j}e^{-\delta t_j}t_j^2 - 2\sum_{j=0}^{n} C_{t_j}e^{-\delta t_j}t_j\cdot D_0 + \sum_{j=0}^{n} C_{t_j}e^{-\delta t_j}D_0^2\right) = e^{\delta D_0}\cdot\sum_{j=0}^{n} C_{t_j}e^{-\delta t_j}(t_j - D_0)^2 > 0 \Rightarrow$ v bodě δ_0 má $V_{D_0}(\delta)$ lok. minimum

Tedy: $V_{D_0}(i_0) < V_{D_0}(i_k)$; $i_k \approx i_0$, $V_{D_0}(i_0)$... hodnota finančního toku v čase D_0 při původní úrokové míře,

$V_{D_0}(i_k)$... hodnota finančního toku v čase D_0 při změněné úrokové míře.

Říkáme, že durace $D_0 = D(\delta_0) = D(i_0)$ je čas, ve kterém je finanční tok očekávaných příjmů imunizován proti malým změnám úrokových sazeb.

Redingtonova teorie imunizace

Pochází od F.M. Redingtona z roku 1952.

Sleduje aktiva a pasiva, neboli budoucí příjmy a výdaje podniku z hlediska zajištění jeho solventnosti při změnách úrokových sazeb, to jest, aby změny úrokových sazeb nepoškodily schopnost podniku splácet závazky.

Označme: Z_t... závazky splatné v čase t,

P_t... příjmy z běžné činnosti v čase t,

$L_t = Z_t - P_t$... čistá pasiva v čase t,

část závazků, která není pokryta příjmy z běžné činnosti,

budoucí výdaje,

A_t... čistá aktiva v čase t,

příjmy z finančních aktiv (investice do cenných papírů),

$A_t + P_t$... celkové příjmy v čase t.

Pokud platí: $A_t = L_t \ \forall t$ (t.zn. $A_t + P_t = Z_t \ \forall t$), má podnik v libovolném čase finanční prostředky na úhradu svých závazků. To je ale nereálné.

Vzhledem k tomu, že podnikatelé si na výdaje půjčují a zhodnocenými příjmy splácejí půjčky, porovnávají se současné hodnoty. $NPV_A(\delta) = \sum_t A_t e^{-\delta t}$, $NPV_L(\delta) = \sum_t L_t e^{-\delta t}$.

Platí-li při úrokové sazbě $\delta_0 = \log(1+i_0)$ $NPV_A(\delta_0) = NPV_L(\delta_0)$, má podnik za předpokladu neměnnosti úrokových sazeb finanční prostředky na pokrytí budoucích závazků (výdajů).

Příklad: $L_0 = 5, L_1 = 11, A_0 = 10, A_1 = ?$.

$$5 + \frac{11}{1+i_0} = 10 + \frac{A_1}{1+i_0} \Rightarrow A_1 = 11 - 5(1+i_0)$$

T.zn. v čase 0 přijmeme 10, uhradíme 5, investujeme 5 s úrokem i_0,

v čase 1 budeme mít $5(1+i_0)$ a ještě jsme potřebovali $11-5(1+i_0)$.

Příklad: $L_0 = 5, L_1 = 1, A_0 = 3, A_1 = ?$

$$5 + 1(1+i_0) = 3 + A_1(1+i_0) \Rightarrow A_1 = 1 + 2(1+i_0)$$

T. zn.: v čase 0 přijme 3, pujčí si 2 s úrokem i_0 a zaplatí 5,
v čase 1 zaplatí 1 a splatí dluh $2(1+i_0)$.

V praxi ovšem nezůstává úroková míra konstantní. Podniky chtějí mít při změnách úrokových sazeb zisk nebo alespoň neutrpěl ztrátu. Jak toho dosáhnout je předmětem teorie imunizace.

Teorie imunizace má význam zejména pro pojišťovny, penzijní fondy a podobné instituce, které jsou zákonem omezeny v možnostech investování, a tedy si musí pečlivě hlídat, zda mají dostatek prostředků na úhradu svých závazků.

V souvislosti s tím se hovoří o řízení aktiv a pasiv podniku.

12. přednáška

18.12.2024

Věta 8: Nechť při aktuální intenzitě úroku $\delta_0 = \log(1+i_0)$ platí: 1, $NPV_A(\delta_0) = NPV_L(\delta_0)$,
2, $NPV_A'(\delta_0) = NPV_L'(\delta_0)$,
3, $NPV_A''(\delta_0) > NPV_A''(\delta_0)$.

Pak má funkce $f(\delta) = NPV_A(\delta) - NPV_L(\delta)$ v bodě δ_0 lokální minimum a $f(\delta_0) = 0$.

Důkaz: 1, $\Leftrightarrow f(\delta_0) = 0$,
2, $\Leftrightarrow f'(\delta_0) = 0 \Rightarrow f(\delta_0)$ má v bodě δ_0 lokální extrém,
3, $\Leftrightarrow f''(\delta_0) > 0 \Rightarrow f(\delta_0)$ je v bodě δ_0 konvexní.
$\Rightarrow f(\delta)$ má v δ_0 lokální minimum.

$\boxtimes$

Z Věty 8 plyne, že existuje okolí bodu δ_0, na kterém $f(\delta) > 0$, t. zn. $NPV_A(\delta) > NPV_L(\delta)$, t. zn. podnik je imunizován proti malým změnám úrokových sazeb.

Pro $\delta \approx \delta_0$ má podnik finanční prostředky na pokrytí svých závazků a ještě něco navíc. Při sazbě δ_0 měl finanční prostředky právě na pokrytí svých závazků (rovnost současných hodnot). Tedy: podnik není poškozen malou změnou úrok. sazeb.

Podmínky 1, 2, 3 z Věty 8 lze psát ve tvaru: 1, $\sum_t A_t e^{-\delta_0 t} = \sum_t L_t e^{-\delta_0 t}$,
2, $\sum_t t A_t e^{-\delta_0 t} = \sum_t t L_t e^{-\delta_0 t}$,
3, $\sum_t t^2 A_t e^{-\delta_0 t} > \sum_t t^2 L_t e^{-\delta_0 t}$, $v_0 = e^{-\delta_0} = \frac{1}{1+i_0}$.

Z 1, a 2, dále dostáváme 2^*, $\dfrac{\sum_t t A_t e^{-\delta_0 t}}{\sum_t A_t e^{-\delta_0 t}} = \dfrac{\sum_t t L_t e^{-\delta_0 t}}{\sum_t L_t e^{-\delta_0 t}}$, t. zn. $D_A(\delta_0) = D_L(\delta_0) = D_0$.

3, lze za platnosti 1, a 2, psát ve tvaru: $\sum_t (t-D_0)^2 A_t e^{-\delta_0 t} + 2D_0 \sum_t t A_t e^{-\delta_0 t} + D_0^2 \sum_t A_t e^{-\delta_0 t} > \sum_t (t-D_0)^2 L_t e^{-\delta_0 t} + 2D_0 \sum_t t L_t e^{-\delta_0 t} - D_0^2 \sum_t L_t e^{-\delta_0 t}$.

Odtud máme: 3^*, $\sum_t (t-D_0)^2 A_t e^{-\delta_0 t} > \sum_t (t-D_0)^2 L_t e^{-\delta_0 t}$

Stavy 1, 2^*, 3^*, lze formulovat ve tvaru: 1, současná hodnota čistých aktiv = současná hodnota čistých pasiv,
2^*, střední doba splatnosti čistých aktiv = střední doba splatnosti čistých pasiv,

3^*, rozptýlenost dob splatnosti čistých aktiv > rozptýlenost dob splatnosti čistých pasiv,

to vše při aktuální intenzitě úroku δ_0.

Podmínky 1, 2, 3, z Věty 8 lze též psát s úrokovou mírou i_0: 1, $NPV_A(i_0) = NPV_L(i_0)$,

2, $NPV_A'(i_0) = NPV_L'(i_0)$,

3, $NPV_A''(i_0) = NPV_L''(i_0)$.

Transformace $\delta_0 = \log(1+i_0)$ je rostoucí funkce v 1, 2, 3, je jedno, zda derivujeme podle δ_0 nebo podle i_0.

Pozor, nelze derivovat podle $v_0 = \frac{1}{1+i_0} = e^{-\delta_0}$.

Vzhledem k tomu, že máme: $D(i_0) = -(1+i_0)\frac{NPV'(i_0)}{NPV(i_0)}$ ... durace,

$C(i_0) = (1+i_0)^2 \frac{NPV''(i_0)}{NPV(i_0)}$ ... konvexita,

lze ekvivalentně psát: 1, $NPV_A(i_0) = NPV_L(i_0)$ ... rovnost současných hodnot

2^*, $D_A(i_0) = D_L(i_0)$ ... rovnost durací

3^{**}, $C_A(i_0) > C_L(i_0)$ ... nerovnost konvexit

Příklad: Životní pojišťovna přijme pojistné 288 na konci 1.-9. roku, na konci 10. roku vyplatí pojistnou částku 10 000.

Aktuální technická úroková míra je $i_0 = 5\%$. Zapište podmínky imunizace proti malým změnám v úrokových sazbách.

Máme: $Z_1 = \dots = Z_9 = 0$, $Z_{10} = 10\,000$, $P_1 = \dots = P_9 = 288$, $P_{10} = 0$.

Tedy: $L_1 = \dots = L_9 = -288$, $L_{10} = 10\,000$.

Ozn.: $\delta_0 = \log(1+i_0) = \log 1{,}05$, $v_0 = e^{-\delta_0} = \frac{1}{1+i_0}$.

1, $NPV_A(\delta_0) = NPV_L(\delta_0) = -288\sum_{t=1}^{9} v_0^t + 10\,000\, v_0^{10} \doteq 4\,092{,}08$.

2, $NPV_A'(\delta_0) = NPV_L'(\delta_0) \quad / \cdot(-1)$

$-NPV_L'(\delta_0) = -288\sum_{t=1}^{9} t v_0^t + 10\,000 \cdot 10 \cdot v_0^{10} \doteq 51\,819{,}75$.

Ozn.: $PV = \sum_{t=1}^{9} t v_0^t = v_0 + 2v_0^2 + \dots + 9v_0^9 \quad / \cdot(1+i_0)$

$(1+i_0)PV = 1 + 2v_0 + 3v_0^2 + \dots + 8v_0^7 + 9v_0^8 \quad / - PV$

$i_0 PV = 1 + v_0 + v_0^2 + \dots + v_0^8 - 9v_0^9 \quad / \cdot \frac{1}{i_0}$

$PV = \frac{1}{i_0}\left(\frac{1-v_0^9}{1-v_0} - 9v_0^9\right) \doteq 33{,}23$

2^*, $D_A(\delta_0) = D_L(\delta_0) = \frac{-NPV_L'(\delta_0)}{NPV_L(\delta_0)} = \frac{51\,819{,}75}{4\,092{,}08} \doteq 12{,}66$ let.

Podmínky 1, 2, a tedy i 2^*, 3^*, lze ekvivalentně psát pro celkové příjmy $A_t + P_t$ na levé straně a závazky Z_t na pravé:

Máme: 1, $NPV_{PA}(\delta_0) = NPV_Z(\delta_0)$,

2^*, $D_{AP}(\delta_0) = D_Z(\delta_0) = 10$ ... jediný závazek v čase 10,

$3^*, \sum_t (t-10)^2 (A_t+P_t) v_0^t > \sum_t (t-10)^2 Z_t v_0^t = (10-10)^2 Z_{10} v_0^{10} = 0$ ... splněno triviálně.

Tedy: při libovolných finančních aktivech se současnou hodnotou příjmů 4 092 a střední dobou splatnosti 12,66 let je daný pojistný produkt imunizován proti malým změnám v úrokových sazbách.

Praktické řešení: zajištění bezkupónovými dluhopisy, které jsou prodány s diskontem odvozeným od $i_0 = 0{,}05$, $v_0 = \frac{1}{1{,}05}$.

V čase 2,66 zakoupí pojišťovna 10-leté bezkuponové dluhopisy za $A_{D_0} v_0^{10} = 4\,092{,}08 \cdot (1+i_0)^{2{,}66} = 4\,659{,}16$

$A_{D_0} v_0^{10}$ ... prodej bezkupónových dluhopisů s diskontem, $4\,092{,}08 \cdot (1+i_0)^{2{,}66}$ ... hodnota finančních aktiv v čase 2,66.

V čase 10 let budou mít příjmy pojišťovny zhodnocené sazbou $i_0 = 5\%$ hodnotu $288 \cdot \sum_{t=1}^{9} (1+i_0)^t = 288 \cdot 1{,}05 \frac{1{,}05^9 - 1}{0{,}05} \doteq 3\,334{,}43$.

Pojišťovna si v čase 10 let půjčí $10\,000 - 3\,334{,}43 = 6\,665{,}57$ s úrokem $i_0 = 5\%$.

V čase $D_0 = 12{,}66$ let bude mít dluh pojišťovny hodnotu $6\,665{,}57 (1+i_0)^{2{,}66} = 7\,589{,}28$.

Pojišťovna jej splatí příjmem z bezkupónových dluhopisů ve výši $A_{D_0} = 4\,659{,}16 \cdot (1+i_0)^{10} = 7\,589{,}28$.

S tím, jak se v čase mění úrokové sazby, je třeba obměňovat portfolio finančních aktiv tak, aby podmínky 1, 2, 3, případně jejich ekvivalenty, byly stále splněny.