Lineární algebra II (pro fyziky)

Matice ortogonálních projekcí

Dalibor Šmíd

MFF UK

Věta (Spektrální rozklad normálního operátoru)

Nechť $\mathbb{A} : V \to V$ *je normální operátor,* $\mathbb{P}_\lambda : V \to V$ *operátor ortogonální projekce na vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu* λ*. Pak* $\mathbb{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \lambda \mathbb{P}_\lambda$*.*

Důkaz.

Nechť $(u_i)_1^n$ je ortonormální báze, vzhledem k níž má $\mathbb{A}$ diagonální matici. Vektor u_i je vlastním vektorem $\mathbb{A}$ s vlastním číslem $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, takže $\mathbb{P}_\lambda u_i = u_i$ a $\mathbb{P}_\mu u_i = 0$, pokud $\mu \neq \lambda$. Pravá i levá strana rovnosti tedy mají na u_i hodnotu λu_i, rovnají se proto na bázi a tudíž i jako operátory. $\square$

V příkladě na konci minulé přednášky jsme zapsali matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

jako součin UDU^T, kde U je ortogonální matice, tedy jako

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Zapíšeme-li $U = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3)$, dá ♣ se to přepsat jako

$$A = 4\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T - 2(\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^T) = 4\mathbb{P}_{\mathbf{u}_1} - 2\mathbb{P}_{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle},$$

což je právě příklad spektrálního rozkladu.

Věta

Vlastní čísla samosdruženého operátoru $\mathbb{A} : V \to V$ jsou reálná.

Důkaz.

Pokud $\mathbb{A}v = \lambda v$, $v \neq 0$ a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$, pak

$$\lambda \|v\|^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, \mathbb{A}v \rangle = \langle \mathbb{A}^* v, v \rangle = \langle \mathbb{A}v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

$\square$

Unitární operátor $\mathbb{U} : V \to V$ je takový, jehož inverzní operátor $\mathbb{U}^{-1}$ je roven jeho operátoru sdruženému $\mathbb{U}^*$. Pak $\forall v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \langle v, \mathbb{U}^* \mathbb{U} w \rangle = \langle \mathbb{U}v, \mathbb{U}w \rangle,$$

neboli $\mathbb{U}$ zachovává skalární součin. Tedy i $\forall v \in V : \|\mathbb{U}v\| = \|v\|$ a pokud je $v \neq 0$ vlastní vektor s vlastním číslem $\lambda \in \mathbb{C}$, musí být $\|v\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, neboli $\lambda = e^{i\phi}$ pro nějaké $\phi \in \mathbb{R}$.

Ve skutečnosti je možné ♣ všechny tyto vlastnosti formulovat jako ekvivalentní charakterizace unitárního operátoru:

Tvrzení

Nechť $(V, \langle , \rangle)$ je unitární prostor a $\mathbb{U} : V \to V$ operátor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

1. $\mathbb{U}$ *je unitární*
2. $\forall v \in V : \|\mathbb{U}v\| = \|v\|$
3. $\forall v, w \in V$, $\langle \mathbb{U}v, \mathbb{U}w \rangle = \langle v, w \rangle$
4. $U := [\mathbb{U}]_B^B$ *je unitární matice pro B ON bázi V.*
5. *Je-li $(v_i)_1^n$ ON báze V, pak je jí i $(\mathbb{U}v_i)_1^n$.*
6. $\mathbb{U}$ *je normální operátor, jehož vlastní čísla leží na jednotkové kružnici.*

Je-li W podprostor unitárního prostoru V a máme-li $(w_1, \dots, w_k)$ jeho ON bázi, umíme spočítat OG projekci P_W jako součet jednotlivých P_{w_i}. Je-li $V = \mathbb{C}^n$ se standardním skalárním součinem a W je zadán jako sloupcový prostor nějaké matice $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$, dá se výsledek přepsat ve formě

$$[P_{\operatorname{Im} A}]_K^K = QQ^+,$$

kde Q je matice z QR-rozkladu matice A. Uměli bychom matici $[P_{\operatorname{Im} A}]_K^K$ nalézt i bez hledání ON báze nebo QR-rozkladu?

Definice

Je-li $(u_1, \dots, u_k)$ posloupnost vektorů unitárního prostoru $(V, \langle , \rangle)$ nad $\mathbb{F}$, pak *Gramovou maticí* této posloupnosti rozumíme matici $G \in \mathbb{F}^{k \times k}$, pro niž $G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$.

- Gramova matice je hermitovská.
- Je-li B ON báze V a $A = ([u_1]^B | \dots | [u_k]^B)$, pak $G = A^+ A$.
- G je regulární, právě když je posloupnost$(u_1, \dots, u_k)$ LN ♣.

Pokud $v \in V$, pak vektor $w = \sum_{i=1}^{k} x_i u_i \in \langle u_1, \ldots, u_k \rangle =: W$ je roven OG projekci $P_W(v)$, právě když $\forall i : u_i \perp v - w$, neboli

$$\langle u_i, v \rangle = x_1 \langle u_i, u_1 \rangle + \ldots + x_k \langle u_i, u_k \rangle$$

To je soustava rovnic $G\mathbf{x} = \mathbf{y} \in \mathbb{F}^k$, kde $y_i := \langle u_i, v \rangle$. Označme $\mathbf{b} = [v]^B \in \mathbb{F}^n$, pak lze tuto soustavu přepsat jako

$$A^+ A\mathbf{x} = A^+ \mathbf{b}$$

To je tzv. *normální soustava* příslušející soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, která v souřadnicích odpovídá hledání $\mathbf{x}$, aby $\sum_{i=1}^{k} x_i u_i = v$. Není-li $v \in W$, tedy nemá-li přeurčená soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení, nalezne její normální soustava aproximativní řešení minimalizující $\| \sum_{i=1}^{k} x_i u_i - v \|$ nebo též $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Má-li A LN sloupce, je $A^+ A$ regulární a $\mathbf{x} = (A^+ A)^{-1} A^+ \mathbf{b}$. Matice P_W je pak vidět z

$$[P_W]_B^B [v]^B = [w]^B = \sum_{i=1}^{k} x_i [u_i]^B = A\mathbf{x} = A(A^+ A)^{-1} A^+ [v]^B$$

Klasický příklad je (lineární) regrese, tj. fitování funkce zadané v n bodech tzv. metodou nejmenších čtverců. Minimalizace výrazu

$$\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|^2$$

vzhledem k $a, b \in \mathbb{R}$ se zadanými $(x_i, y_i), i \in \{1, \ldots, n\}$ vede na aproximativní řešení přeurčené soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

jejíž normální soustava je

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

Tu je možné explicitně vyřešit třeba Cramerovým pravidlem.