

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

2. 7. 2026

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(x) = \exp(x^3 - 3x^2)$, kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci e^x .
 - (a) [3 b.] Má funkce f limity v $+\infty$ a $-\infty$? Pokud ano, čemu se rovnají?
 - (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž funkce f nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
 - (c) [4 b.] Spočítejte Taylorův polynom funkce f řádu 2 v bodě 1.
2.
 - (a) [3 b.] Uvažujme nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde (a_n) je posloupnost reálných čísel. Napište, jak je definována *posloupnost částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a jak je definován *součet* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
 - (b) [4 b.] Nechť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Dokažte, že pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, tak je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$ konvergentní.
 - (c) [3 b.] Rozhodněte, zda je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ konvergentní.
3.
 - (a) [3 b.] Definujte, co to znamená, že funkce f je *spojitá v bodě* A , a co znamená, že funkce f je *spojitá na intervalu* I .
 - (b) [3 b.] Zformulujte Bolzanovu větu (o nulových bodech funkce). Nemusíte ji dokazovat.
 - (c) [4 b.] Nechť $I = [0, +\infty)$ a nechť $f: I \rightarrow I$ je spojitá bijekce z I na I (tedy jinými slovy, funkce f je spojitá na I a pro každé $y \in I$ existuje právě jedno $x \in I$ splňující $f(x) = y$). Dokažte, že $f(0) = 0$ a že funkce f je rostoucí na I .
4.
 - (a) [3 b.] Uveďte příklad funkce $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[-1, 1]$, ale není newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-1, 1)$. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má váš příklad hledané vlastnosti.
 - (b) [3 b.] Zformulujte pravidlo pro výpočet primitivní funkce pomocí metody per partes. Nemusíte ho dokazovat.
 - (c) [4 b.] Nechť $q > 1$ je reálná konstanta. Označme $O(q)$ obsah následující oblasti:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \wedge x^q \leq y \leq x^{1/q}\}.$$

Spočítejte $O(q)$. Čemu se rovná $\lim_{q \rightarrow +\infty} O(q)$?