1. Funkce více proměnných

1.1. Spojitost funkcí a parciálních derivací, věta o implicitní funkci

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leqslant i \leqslant n$. Pak *parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné* definujeme jako limitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te^i)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{t},\end{aligned}$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Úmluva. V dalším textu bude výrok„parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje *vlastní*.

konec 1. přednášky (30.9.2020)

Věta 1.1 (o nabývání mezihodnot)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a ať jsou dány body $a, b \in I$ takové, že $f(a) < f(b)$. Pak pro libovolné $\zeta \in (f(a), f(b))$ existuje $c \in I$ takové, že $f(c) = \zeta$.*

Věta 1.2 (vztah parciálních derivací a spojitosti)**.** *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě a. Pak f je spojitá v bodě a.*

Poznámka. Existence parciálních derivací nestačí (viz. příklad z přednášky).

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě G vlastní i-tou parciální derivaci a $\mathbf{a} \in G$. Parciální derivaci funkce $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ podle proměnné x_j v bodě $\mathbf{a}$ značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

a nazýváme ji *parciální derivací druhého řádu* funkce f. Je-li $i = j$, pak používáme značení $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(\mathbf{a})$.

Analogicky se definují parciální derivace vyšších řádů.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace až do řádu k. Pak říkáme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^k$ na G. Množinu všech takových funkcí značíme $\mathcal{C}^k(G)$.

Věta 1.3 (o implicitní funkci)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $F : G \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in G$ a nechť platí*

(i) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon))$ a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \qquad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Důkaz. Na přednášce byla dokázána existence $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takového, že pro každé $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Zbytek důkazu byl vynechán. □

konec 2. přednášky (5.10.2020)

konec 3. přednášky (7.10.2020)

1.2. Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in M$ a f je reálná funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D(f)$ a $H(f) \subset \mathbb{R}$). Řekneme, že f nabývá v bodě x

- *maxima* na M, jestliže platí $\forall \mathbf{y} \in M: \ f(\mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x})$,
- *lokálního maxima vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap M: \ f(\mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x})$,
- *ostrého maxima na M*, jestliže platí $\forall \mathbf{y} \in M \backslash \{\mathbf{x}\}: \ f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$,
- *ostrého lokálního maxima vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \mathbf{y} \in (B(\mathbf{x}, \delta) \backslash \{\mathbf{x}\}) \cap M: \ f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$

Analogicky definujeme *minimum* a *ostré minimum na M*, *lokální minimum* a *ostré lokální minimum vzhledem k M*.

Extrémy na otevřené množině

Věta 1.4 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí:*

$$\text{Parciální derivace} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \text{buď neexistuje, nebo je rovna nule.}$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. *Gradientem funkce f v bodě* $\mathbf{a}$ rozumíme vektor

$$\nabla f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Pokud $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, pak bod $\mathbf{a}$ nazýváme *stacionárním bodem* funkce f.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak *Hessova matice* je matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Značíme ji symbolem $\nabla^2 f(\mathbf{a})$.

Věta 1.5. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^2(G)$ a $\mathbf{a} \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:*

(a) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního maxima.

(b) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního minima.

(c) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ani lokálního minima, ani lokálního maxima, tj. $\mathbf{a}$ je sedlový bod funkce f.

Poznámka. Pojem pozitivní/negativní definitnosti byl definován v předmětu Lineární algebra. Připomeňme, že symetrická matice $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ je

- pozitivně definitní, právě když $a > 0$ a $ab > c^2$,
- negativně definitní, právě když $a < 0$ a $ab > c^2$,
- indefinitní, právě když $ab < c^2$.

Věta 1.6 (záměnnost parciálních derivací). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak pro každé $a \in G$ platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$*

Poznámka. Bez předpokladu $f \in \mathcal{C}^2(G)$ Věta 1.6 neplatí (viz. příklad z přednášky).

konec 4. přednášky (12.10.2020)

Extrémy na uzavřené množině - Lagrangeova věta o multiplikátoru

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud je omezená množina $\{\rho(x, 0);\ x \in A\}$.
Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktní*, pokud je uzavřená a omezená.

Věta 1.7 (o nabývání extrémů). *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina, $f : A \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak existují body $c, d \in A$ takové, že*

$$f(c) = \inf\{f(x);\ x \in A\}, \qquad f(d) = \sup\{f(x);\ x \in A\}.$$

konec 5. přednášky (14.10.2020)

Věta 1.8 (Lagrangeova věta o multiplikátoru). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$, $M = \{(x, y) \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $(x_0, y_0) \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(a) $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$,

(b) existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

konec 6. přednášky (19.10.2020)

2. Posloupnosti a řady funkcí

2.1. Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud pro každé $x \in E$ platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Značíme $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ \forall n \geqslant k : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{j=1}^{N} f_j\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje bodově na E k funkci f.

Řekneme, že *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f. Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$.

Fakt 2.1. *Stejnoměrně konvergentní posloupnost (resp. řada) funkcí je bodově konvergentní.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Tvrzení 2.2 (Kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Pro každé $x \in E$ označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ právě když $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Tvrzení 2.3 (Weierstrassovo kritérium, M-test)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině E. Označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x)|$. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na E.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

konec 7. přednášky (21.10.2020)

Tvrzení 2.4 (Zachování spojitosti)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdné podmnožině $E \subset \mathbb{R}$ a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce.*

(i) Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

(ii) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

Tvrzení 2.5 (Prohození limit)**.** *Je–li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada spojitých reálných funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, která stejnoměrně konverguje na (a, b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $\lim_{x\to a^+} f_n(x)$, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a^+} f_n(x) = \lim_{x\to a^+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Tvrzení 2.6 (Záměna sumy a derivace)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ splňující* *(i)* f_n *má vlastní derivaci na* (a, b), $n \in \mathbb{N}$,

(ii) existuje $x_0 \in (a, b)$ *takové, že číselná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *je konvergentní,*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ *na* (a, b).

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ *na* (a, b) *a pro každé* $x \in (a, b)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Tvrzení 2.7 (Záměna sumy a integrálu)**.** *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *splňující*

(i) f_n *má na* (a, b) *konvergentní Newtonův integrál,* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně k funkci* f *na* (a, b).

Pak f *má na* (a, b) *konvergentní Newtonův integrál a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

konec 8. přednášky (26.10.2020)

2.2. Mocninné řady

Definice. *Mocninnou řadou o středu* $a \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$.

Věta 2.8 (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ *je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek* $\varrho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$, $|x - a| < \varrho$, *je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$, $|x - a| > \varrho$, *je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ *splňuje*

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ *rozumíme* ∞ *a výrazem* $\frac{1}{\infty}$ *rozumíme* 0. *Prvek* ϱ *nazýváme* poloměrem konvergence *uvedené řady.*

Věta 2.9. *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezáporných čísel a nechť existuje* $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Potom existuje také* $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a limity se rovnají.*

Věta 2.10 (derivace a integrace mocninné řady)**.** *Nechť* ϱ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$. *Potom poloměr konvergence řad* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - a)^{n+1}$ *je také roven* ϱ. *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *splňující* $|x - a| < \varrho$ *označme* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$. *Potom*

(i) funkce f *má v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - a)^{n+1}$ *je primitivní funkce k* f *na* $(a - \varrho, a + \varrho)$.

Speciálně, dostáváme následující vzorec pro výpočet n*-té derivace funkce* f: $f^{(n)}(a) = n! a_n$, $n \geqslant 0$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přenášce (důkaz toho, že poloměr konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ je roven ϱ byl vynechán). $\square$

konec 9. přednášky (2.11.2020)

Věta 2.11 (Abelova)**.** *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a $\varrho \in (0,\infty)$.*

(a) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a+\varrho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n.$$

(b) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a-\varrho)_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n.$$

konec 10. přednášky (4.11.2020)

3. Teorie míry a integrálu

3.1. Pojem míry, abstraktní Lebesgueův integrál

3.1.1 Základní pojmy

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$. Pak *délkou* intervalu I rozumíme číslo $|b-a|$. Značíme $\ell(I) := |b-a|$. Dále definujeme $\ell(J) := \infty$, pokud J je neomezený interval.

Nechť $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly a $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Pak *objemem* n-rozměrného intervalu Q rozumíme číslo $\ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$. Značíme $\ell^n(Q) := \ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$.

Definice. Nechť X je množina. Systém $\mathcal{A}$ podmnožin X se nazývá *algebra*, pokud

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $E \in \mathcal{A} \implies X \backslash E \in \mathcal{A}$;

(iii) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \implies E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

Pokud navíc $\mathcal{A}$ splňuje

(iv) $E_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$,

pak říkáme, že $\mathcal{A}$ je *σ-algebra*. Je–li $\mathcal{A}$ σ-algebra, dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá *měřitelný prostor* a prvky $\mathcal{A}$ se nazývají *měřitelné množiny.*

Fakt 3.1. *Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Definice. Definujeme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *borelovská σ-albebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny.*

Lemma 3.2. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $B \subset \mathbb{R}^m$ jsou borelovské množiny. Pak $A \times B$ je borelovská množina.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce pouze naznačen. □

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud splňuje

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) jestliže $E_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní, pak

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou.*

Poznámka. Příkladem míry je například tzv. *počítací míra*, která každé množině $A \subset X$ přiřadí počet jejích prvků.

konec 11. přednášky (9.11.2020)

Tvrzení 3.3 (Vlastnosti míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.*

(i) Je-li $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subset B$, je $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Navíc, pokud $\mu(B \backslash A) < \infty$, pak $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \backslash A)$.

(ii) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z $\mathcal{A}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(iii) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost z $\mathcal{A}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

(iv) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost z $\mathcal{A}$ a $\mu(A_1) < \infty$, je $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. $\square$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je *úplná*, pokud každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná.

3.1.2 Konstrukce úplných měr, Lebesgueova míra

Definice. *Vnější míra* na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ splňující

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $A \subset B \implies \nu(A) \leqslant \nu(B)$;
3. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost podmnožin X, pak $\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

Příklad. Definujme funkci $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ předpisem

$$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell^n(Q_j);\ Q_j \text{ jsou } n\text{-rozměrné intervaly },\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A\}.$$

Pak λ^* je vnější míra na $\mathbb{R}^n$, které říkáme *Lebesgueova vnější míra na* $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť ν je vnější míra na množině X. Množinu $M \subset X$ nazveme *ν-měřitelnou (podle Carathéodoryho)*, jestliže pro každou "testovací" množinu $T \subset X$ platí

$$\nu(T) = \nu(T \cap M) + \nu(T \backslash M).$$

Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\nu)$.

Věta 3.4. *Nechť ν je vnější míra na množině X. Pak $\mathfrak{M}(\nu)$ je σ-algebra a funkce $\mathfrak{M}(\nu) \ni A \mapsto \nu(A)$ je úplná míra.*

Definice. Nechť λ^* je Lebesgueova vnější míra na $\mathbb{R}^n$. Funkci $\mathfrak{M}(\lambda^*) \ni A \mapsto \lambda^*(A)$ říkáme *Lebesgueova míra na* $\mathbb{R}^n$ a značíme ji λ^n. Množiny z $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ se nazývají *Lebesgueovsky měřitelné.*

Tvrzení 3.5. *Každá borelovská množina je Lebesgueovsky měřitelná, Lebesgueova míra je úplná a pro každý n-rozměrný interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ platí $\ell^n(Q) = \lambda^n(Q)$. Navíc, Lebesgueova míra je translačně invariantní, tj. pro každou měřitelnou množinu A a každý vektor $c \in \mathbb{R}^n$ máme $\lambda^n(A + c) = \lambda^n(A)$, kde $A + c = \{a + c : \ a \in A\}$.*

3.1.3 Měřitelná zobrazení

Značení. Je–li X množina a $A \subset X$, pak *charakteristická funkce množiny* A je funkce $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Symbolem $\overline{\mathbb{R}}$ značíme $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Je–li $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ funkce a $M \subset \mathbb{R}$, značíme

$$\{f \in M\} := \{x \in D;\ f(x) \in M\},$$

podobně zavádíme značení jako $\{f > a\}$, $\{f = a\}$.

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor.

Definice. Nechť $D \in \mathcal{A}$, pak zobrazení $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ je $\mathcal{A}$-*měřitelné*, pokud pro každý otevřený interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ je $\{f \in I\} \in \mathcal{A}$.

Úmluva. Pokud je z kontextu jasné co je $\mathcal{A}$, pak říkáme, že funkce je "měřitelná" místo "$\mathcal{A}$-měřitelná". Často říkáme, že funkce je Lebesgueovsky (resp. borelovsky) měřitelná a myslíme tím, že je měřitelná vzhledem k σ-algebře Lebesgueovských (resp. borelovských) množin.

Tvrzení 3.6 (Měřitelnost vzoru)**.** *Nechť $D \in \mathcal{A}$, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ je měřitelná funkce a $A \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina. Pak $\{f \in A\} \in \mathcal{A}$.*

Důkaz. Důkaz pro $f : D \to \mathbb{R}$ byl předveden na přednášce (důkaz že každá otevrřená množina v $\mathbb{R}$ je spočetným sjednocením otevřených intervalů byl pouze naznačen). □

Tvrzení 3.7 (Měřitelnost složené funkce)**.** *Nechť $D \in \mathcal{A}$, $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce, $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak $\varphi \circ f$ je měřitelná funkce.*

Poznámka. Pozor! Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný.

Značení. Je–li $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funkce, definujeme $f^+ := \max\{f, 0\}$ a $f^- := \max\{-f, 0\}$. (Maximum/minimum funkcí definujeme bodově.) Tedy $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$.

Tvrzení 3.8. *(i) Kdykoliv $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak f je borelovsky měřitelná.*

(ii) Každá monotónní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná.

(iii) Funkce $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ je měřitelná pro každou $A \in \mathcal{A}$.

(iv) Kdykoliv $D \in \mathcal{A}$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná, pak $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou měřitelné na D a $\frac{1}{f}$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.

(v) Součet, součin, podíl, maximum a minimum konečně mnoha reálných měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.

(vi) Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

Důkaz. Důkaz (iii) byl předveden na přednášce, ostatní důkazy byly vynechány. □

konec 12. přednášky (11.11.2020)

3.1.4 Lebesgueův integrál

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Definice. Konečný soubor množin $\{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{A}$ nazveme *rozkladem* množiny $E \in \mathcal{A}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j=1}^{m} A_j = E$.

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{A}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \backslash N$.

Definice. Nechť f je měřitelná funkce (s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$).

1. Je–li $f \geqslant 0$, definujeme

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j);\ \{A_j\}_{j=1}^m \text{ je rozklad } X, 0 \leqslant a_j \leqslant f \text{ na } A_j,\ j = 1, \ldots, m \right\},$$

kde používáme konvenci že $0 \cdot \infty = 0$.

2. V obecném případě definujeme

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

pokud má tento rozdíl smysl.

3. Je–li $E \subset X$, $E \in \mathcal{A}$ a funkce f je definovaná skoro všude na E, pak definujeme

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f \cdot \chi_{E \cap D(f)} \, \mathrm{d}\mu.$$

Je-li integrál $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ defiován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje*, nebo že f je *integrovatelná* a tento fakt značíme symbolem $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, nebo zkráceně $f \in L^1(E)$.

Věta 3.9 (Základní vlastnosti Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť f a g jsou měřitelné funkce, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $E \in \mathcal{A}$. Pak*

(i) $\int_X \chi_E \, \mathrm{d}\mu = \mu(E)$;

(ii) $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$, *pokud* $\mu(E) = 0$ *nebo pokud* $f = 0$ *skoro všude na* E;

(iii) Pokud $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje, pak* $|f| < \infty$ *skoro všude na* E;

(iv) Pokud je $\mu(E) < \infty$ *a* f *je omezená, pak* $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje a* $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{x \in E} |f(x)| \cdot \mu(E)$;

(v) Je–li $\{D_1, D_2\} \subset \mathcal{A}$ *rozklad množiny* E*, pak*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f \, \mathrm{d}\mu;$$

(vi)

$$\int_E \alpha f + g \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu,$$

má–li pravá strana smysl;

(vii) $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje právě tehdy, když* $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje;*

(viii) Jestliže f, g *mají integrál a* $f \leqslant g$ *skoro všude na* E*, pak*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \, \mathrm{d}\mu;$$

(ix)

$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Na přednášce byl předveden důkaz (i), (ii), (iv) a (vii), ostatní důkazy vynechány. □

3.1.5 Vztah Lebesgueova integrálu k Newtonovu integrálu a Riemannovu integrálu

V moderní matematické literatuře se integrálem bez přívlastku rozumí vždy integrál Lebesgueův. Význam Newtonova a Riemannova integrálu zůstává ve sféře didaktiky.

Věta 3.10 (Vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a,b). Potom $(N) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

Věta 3.11 (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a,b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

konec 13. přednášky (16.11.2020)

3.2. Fubiniova věta

Lemma 3.12. *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ a $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ jsou Lebesgueovsky měřitelné množiny. Pak $E \times F$ je Lebesgueovsky měřitelná množina a $\lambda^{n+m}(E \times F) = \lambda^n(E) \cdot \lambda^m(F)$, kde definujeme $0 \cdot \infty = 0$.*

Definice. Nechť $E \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} E^{x,*} &:= \{y \in Y;\ (x,y) \in E\}, \qquad x \in X, \\ E^{*,y} &:= \{x \in X;\ (x,y) \in E\}, \qquad y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy*.

Věta 3.13 (Fubiniova věta)**.** *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je Lebesgueovsky měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je Lebesgueovsky měřitelná funkce. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}$$

má smysl. Potom všechny integrály níže mají smysl a platí

$$\int_E f\,\mathrm{d}\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y). \tag{3.1}$$

Speciálně, je–li $f \geqslant 0$ nebo je jeden z integrálů

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x), \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y)$$

konečný, pak platí (3.1).

Důkaz. Na přednášce byla podrobně vysvětlena pouze část “Speciálně”. □

konec 14. přednášky (18.11.2020)

3.3. Věta o substituci

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi_i \in \mathcal{C}^1(G)$, $i = 1, \dots, n$. Uvažujme funkci $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : G \to \mathbb{R}^n$. Pak *Jacobiho matice zobrazení* φ *v bodě* t je matice

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t)\right)_{i,j=1}^n .$$

Pokud má Jacobiho matice zobrazení φ v každém bodě $t \in G$ hodnost n, pak řekneme, že φ je *regulární* a determinant Jacobiho matice nazýváme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t a značíme jej $J_\varphi(t)$.

Věta 3.14 (O substituci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť f je funkce na $E \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}\lambda^n(t),$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Věta 3.15 (o zobecněných polárních souřadnicích). *Nechť $a, b > 0$, $G = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha) := (ar\cos\alpha, br\sin\alpha)$, $(r, \alpha) \in G$. Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha)| = abr$ pro $(r, \alpha) \in G$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^2$ a f funkce na E, pak*

$$\int_E f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^2(x, y) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abr \cdot f(ar\cos\alpha, br\sin\alpha)\,\mathrm{d}\lambda^2(r, \alpha),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz. Důkaz pro $a = b = 1$ byl předveden na přednášce. □

Poznámka. Někdy je vhodné zobecněné polární souřadnice zřejmým způsobem posunout, tj. pro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ uvažovat transformaci $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ danou předpisem $\varphi(r, \alpha) := (ar\cos\alpha + x_0, br\sin\alpha + y_0)$.

konec 15. přednášky (23.11.2020)

Věta 3.16 (o zobecněných válcových souřadnicích). *Nechť $a, b > 0$, $G = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha, z) := (ar\cos\alpha, br\sin\alpha, z)$, $(r, \alpha, z) \in G$. Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha, z)| = abr$ pro $(r, \alpha, z) \in G$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^3$ a f funkce na E, pak*

$$\int_E f(x, y, z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abr \cdot f(ar\cos\alpha, br\sin\alpha, z)\,\mathrm{d}\lambda^3(r, \alpha, z),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Věta 3.17 (o zobecněných sférických souřadnicích). *Nechť $a, b, c > 0$, $G = \{(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem*

$$\varphi(r, \alpha, \beta) := (ar\cos\alpha\cos\beta, br\sin\alpha\cos\beta, cr\sin\beta), \quad (r, \alpha, \beta) \in G.$$

Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha, \beta)| = abcr^2\cos\beta$ pro $(r, \alpha, \beta) \in G$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^3$ a f funkce na E, pak

$$\int_E f(x, y, z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abcr^2\cos\beta \cdot f(ar\cos\alpha\cos\beta, br\sin\alpha\cos\beta, cr\sin\beta)\,\mathrm{d}\lambda^3(r, \alpha, \beta),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Poznámka. Podobně jako v případě zobecněných polárních souřadnic, i zobecněné válcové/sférické souřadnice je někdy vhodné zřejmým způsobem posunout.

konec 16. přednášky (25.11.2020)

3.4. Lebesgueův-Stieltjesův integrál

Definice. Symbolem $\mathcal{I}$ budeme značit systém všech zprava polouzavřených omezených intervalů v $\mathbb{R}$, tedy intervalů tvaru $(a,b]$, $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Interval $(a,a]$ je samozřejmě prázdná množina. Řekneme, že $\mathfrak{m} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ je Lebsgueova-Stieltjesova funkce intervalu (zkratka LSFI), jestliže

- pro každou uspořádanou trojici reálných čísel (a,b,c) platí
$$a \leqslant b \leqslant c \implies \mathfrak{m}(a,c]) = \mathfrak{m}((a,b]) + \mathfrak{m}((b,c]).$$
- funkce $b \mapsto \mathfrak{m}((a,b])$ je zprava spojitá na $[a,\infty)$.

Tvrzení 3.18. $\mathfrak{m} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ *je Lebsgueova-Stieltjesova funkce intervalu právě tehdy, když existuje zprava spojitá neklesající funkce* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*
$$\mathfrak{m}((a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a), \quad (a,b] \in \mathcal{I}.$$

Definice. Nechť $\mathfrak{m}$ je LSFI. Pro $A \subset \mathbb{R}$ položme
$$\mathfrak{m}^*(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{m}(I_j);\ I_j \in \mathcal{I}, \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A\}.$$
O funkci $\mathfrak{m}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ říkáme, že to je *Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná* $\mathfrak{m}$.

Lemma 3.19. *Nechť* $\mathfrak{m}$ *je LSFI a* $\mathfrak{m}^*$ *je Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná* $\mathfrak{m}$*. Pak* $\mathfrak{m}^*$ *je vnější míra.*

Definice. Nechť $\mathfrak{m}$ je LSFI a $\mathfrak{m}^*$ je Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná $\mathfrak{m}$. Funkci $\mathfrak{M}(\mathfrak{m}^*) \ni A \mapsto \mathfrak{m}^*(A)$ říkáme *Lebesgueova-Stieltjesova míra na* $\mathbb{R}$ (generovaná $\mathfrak{m}$).

Je–li $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zprava spojitá neklesající funkce a $\mathfrak{m}$ je LSFI definovaná předpisem $(a,b] \mapsto \varphi(b) - \varphi(a)$, pak Lebesgueovu-Stieltjesovu míru na $\mathbb{R}$ generovanou $\mathfrak{m}$ značíme jako μ_φ a říkáme, že μ_φ je *Lebesgueova-Stieltjesova míra na* $\mathbb{R}$ *generovaná* φ.

Poznámka. Je–li φ identita (tj. $\varphi(x) = x$) pak μ_φ je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$.

Věta 3.20. *Nechť* $\mathfrak{m}$ *je LSFI a* μ *je Lebesgueova-Stieltjesova míra na* $\mathbb{R}$ *generovaná* $\mathfrak{m}$*. Pak* μ *je úplná míra, každá borelovská množina je* μ*-měřitelná a pro každé* $A \in \mathcal{I}$ *máme* $\mathfrak{m}(A) = \mu(A)$.

Definice (Lebesgueův-Stieltjesův integrál)**.** Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zprava spojitá neklesající funkce a f je μ_φ-měřitelná funkce na μ_φ-měřitelné množině $E \subset \mathbb{R}$. Integrál
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu_\varphi$$
se nazývá Lebesgue-Stieltjesův integrál funkce f podle μ_φ. Je–li $E = (a,b]$, používá se též označení
$$(LS)\int_a^b f \,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{(a,b]} f \,\mathrm{d}\mu_{\varphi(x)}.$$
Je–li $a,b \in \mathbb{R}$ a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ neklesající, zprava spojitá funkce, pak používáme značení
$$(LS)\int_a^b f \,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b]} f \,\mathrm{d}\mu_{\widetilde{g}(x)},$$
kde $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem
$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} g(a) & x < a, \\ g(x) & x \in [a,b], \\ g(b) & x > b. \end{cases}$$
Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f \,\mathrm{d}g(x)$ místo $(LS)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$.

Věta 3.21 (Vztah Lebesgueova-Stieltjesova a Riemannova-Stieltjesova integrálu)**.** *Nechť $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je zprava spojitá a neklesající funkce. Má–li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci g, pak má také Lebesgueův-Stieltjesův integrál podle μ_g přes množinu $(a,b]$ a hodnoty těchto integrálů se rovnají.*

Poznámka. Ne každá funkce, která má Lebesgueův-Stieltjesův integrál má také Riemannův-Stieltjesův integrál. Například pro funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, \\ 0 & x \in [0,1), \end{cases}$$

máme $(LS) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}f(x) = 1$, ale $(RS) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}f(x)$ neexistuje.

Značení. Pro reálnou funkci f definovanou na pravém (resp. levém) okolí bodu x označujeme symbolem $f(x+)$ (resp. $f(x-)$) limitu $\lim_{y\to x^+} f(y)$ (resp. $\lim_{y \to x^-} f(y)$).

Věta 3.22 (per partes pro LS integrál)**.** *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou zprava spojité a neklesající funkce. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x-)\,\mathrm{d}f(x),$$

kde $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.
(Součástí tvrzení je i existence integrálů)

3.4.1 LS integrál pro obecnější funkce a jeho výpočet

Definice. Pokud je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající funkce, uvažujme zprava spojitou neklesající funkci $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x+)$. Míru $\mu_{\widetilde{\varphi}}$ pak označujeme jako μ_φ a říkáme, že μ_φ je *Lebesgueova-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$ generovaná φ*. Analogicky jako výše pak píšeme $(LS) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ (nebo dokonce jen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$, nemůže-li dojít ke zmatení) místo $\int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu_\varphi(x)$.

Fakt 3.23. *Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce, $a -\infty < a < b < \infty$. Pak*

1. $\mu_\varphi((a,b]) = \varphi(b+) - \varphi(a+)$
2. $\mu_\varphi(\{b\}) = \varphi(b+) - \varphi(b-)$
3. $\mu_\varphi([a,b]) = \varphi(b+) - \varphi(a-)$
4. $\mu_\varphi([a,b)) = \varphi(b-) - \varphi(a-)$
5. $\mu_\varphi((a,b)) = \varphi(b-) - \varphi(a+)$

Definice. Nechť $\varphi, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou borelovsky měřitelné funkce a nechť $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, kde $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou omezené neklesající funkce. Pak pro $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definujeme

$$(LS) \int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) := \int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi_1(x) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi_2(x),$$

má–li pravá strana rovnosti smysl (tj. není–li na pravé straně výraz typu $\infty - \infty$). Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ místo $(LS) \int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ (kde $-\infty < a \leqslant b < \infty$).

Podobně jako výše také definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ pro $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelnou a $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, kde $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou omezené neklesající funkce.

Poznámka. Platí, že hodnota integrálu $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ nezávisí na volbě funkcí φ_1, φ_2 a definice tak dává dobrý smysl. Funkce, které lze zapsat jako rozdíl dvou neklesajících funkcí se nazývají funkce s *omezenou variací*.

Věta 3.24 (Pravidla pro počítání LS integrálu)**.** *Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rozdílem omezených neklesajících funkcí a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená borelovsky měřitelná funkce. Pak*

1. *Pokud interval I je disjunktním sjednocením intervalů $(I_j)_{j=1}^n$, pak*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

2. *Pokud $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j g_j$, kde $c_j \in \mathbb{R}$ a $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou rozdílem omezených neklesajících funkcí pro každé $j = 1, \ldots, n$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_j(x).$$

3. *Pokud φ je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$, pak pro $-\infty \leqslant a < c < b \leqslant \infty$ platí*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{(a,c)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x), \quad a \quad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{[c,b]} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

4. *Pokud je φ konstantní na otevřeném intervalu I, pak*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = 0.$$

5. *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ máme*

$$\int_{[c,c]} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = f(c)\big(\varphi(c+) - \varphi(c-)\big).$$

6. *Pokud $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f \in \mathcal{C}(I)$ a $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, pak platí*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

konec 18. přednášky (2.12.2020)

konec 19. přednášky (7.12.2020)

3.5. Prohození integrálu a limity, integrálu a řady

V celé této sekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Definice. Nechť E je množina a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *konverguje skoro všude na* E k funkci $f : E \to \mathbb{R}$, pokud $E \in \mathcal{A}$ a existuje $F \subset E$ taková, že $f_j|_F \to f|_F$ a $\lambda^n(E \backslash F) = 0$.

Řekneme, že $\sum_{j=1}^\infty f_j$ *konverguje skoro všude na* E, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{j=1}^N f_j\}_{N=1}^\infty$ konverguje skoro všude na E.

Tvrzení 3.25. *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť $f_j \rightrightarrows f$, $\mu(E) < \infty$ a $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$ existuje. Pak*

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Věta 3.26 (Leviho věta)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť $\int_E f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ a $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$. Pak*

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 3.27 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť posloupnost funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje bodově skoro všude na E. Nechť existuje integrovatelná funkce $g : E \to \mathbb{R}$ (takzvaná* majoranta*) taková, že*

$$|f_j(x)| \leqslant g(x), \quad j \in \mathbb{N},\ x \in E.$$

Pak

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

konec 20. přednášky (9.12.2020)

Důsledek 3.28 (Lebesgueova věta pro řady)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konverguje skoro všude na E. Nechť existuje integrovatelná funkce $g : E \to \mathbb{R}$ (takzvaná* majoranta*) taková, že*

$$\left|\sum_{j=1}^{N} f_j(x)\right| \leqslant g(x), \quad N \in \mathbb{N},\ x \in E.$$

Pak

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Důsledek 3.29. *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť je splněna jedna z následujících podmínek*

(i) $f_j = aq^j$, *kde* a, q *jsou měřitelné funkce,* $|q| < 1$ *a* $\int_E \frac{a}{1-q} \,\mathrm{d}\mu$ *konverguje*

(ii) $\sum_j \int_E |f_j| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ *nebo* $\int_E \sum_j |f_j| \,\mathrm{d}\mu < \infty$,

(iii) $f_j = (-1)^j h_j$, $h_j \to 0$, $h_1 \geqslant h_2 \geqslant h_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$ *a* $\int_E h_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$

Pak řada $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konverguje skoro všude a platí

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

konec 21. přednášky (14.12.2020)

3.6. Integrály závislé na parametru

V celé této sekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Věta 3.30 (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť U je otevřená množina obsahující bod a. Nechť funkce $f : U \times E \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ je funkce $U \ni t \mapsto f(t, x)$ spojitá v a,

(ii) pro všechna $t \in U$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ měřitelná,

(iii) existuje integrovatelná funkce g na E tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in E$ je $|f(t, x)| \leqslant g(x)$.

Potom pro všechna $t \in U$ je $E \ni x \mapsto f(t, x)$ integrovatelná a funkce

$$F(t) := \int_E f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad t \in U$$

je spojitá v bodě a.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Věta 3.31 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times E \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ má funkce $I \ni t \mapsto f(t, x)$ vlastní derivaci na celém intervalu I,

(ii) pro všechna $t \in I$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ měřitelná,

(iii) existuje integrovatelná funkce g na E tak, že pro všechna $t \in I$ a $x \in E$ je $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leqslant g(x)$,

(iv) existuje $t_0 \in I$ tak, že funkce $E \ni x \mapsto f(t_0, x)$ je integrovatelná.

Pak pro všechna $t \in I$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ integrovatelná, funkce

$$F(t) := \int_E f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I$$

má vlastní derivaci na celém intervalu I a platí

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I.$$

Definice. Funkci *Gamma* definujeme na intervalu $(0, \infty)$ předpisem

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}x, \quad s \in (0, \infty).$$

Tvrzení 3.32 (Vlastnosti funkce Gamma)**.** *(i) $\Gamma(s) \in (0, \infty)$, $s \in (0, \infty)$;*

(ii) $\Gamma(1) = 1$ a pro každé $s \in (0, \infty)$ platí $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$. Speciálně, $\Gamma(n + 1) = n!$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\Gamma \in \mathcal{C}^k(0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$;

konec 22. přednášky (16.12.2020)

(iv) Γ je ryze konvexní na $(0, \infty)$;

(v) $\lim_{s \to 0^+} \Gamma(s) = \lim_{s \to \infty} \Gamma(s) = +\infty$;

(vi) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

Definice. Funkci *Beta* definujeme na $(0,\infty)\times(0,\infty)$ předpisem

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x, \quad (p,q)\in(0,\infty).$$

Tvrzení 3.33 (Vlastnosti funkce Beta)**.** *(i) Pro každé $p,q\in(0,\infty)$ máme $B(p,q)\in(0,\infty)$;*

(ii) pro každé $p,q\in(0,\infty)$ máme $pB(p,q+1)=qB(p+1,q)$;

(iii) pro každé $p,q\in(0,\infty)$ máme $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (speciálně $B(p,q)=B(q,p)$);

(iv) $B\in\mathcal{C}^k((0,\infty)\times(0,\infty))$, $k\in\mathbb{N}$;

(v) $B(1-s,s)=\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$, $s\in(0,1)$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce (kromě důkazu, že $B(1-s,s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$ pro $s\in(0,1)$). □

konec 23. přednášky (21.12.2020)

Tvrzení 3.34 (objem n-rozmerne koule)**.** *Nechť je dána n-rozměrná koule $B(0,R)\subset\mathbb{R}^n$. Pak $\lambda^n(B(0,R))=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}R^n$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce. □

konec 24. přednášky (4.1.2021)

Tvrzení 3.35 (Stirlingův vzorec)**.**

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{e}{s}\right)^s\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi}.$$

3.7. Radon-Nikodýmova věta

V celé této sekci je $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor s mírou.

Definice. Řekneme, že míra μ je *σ-konečná*, pokud existují měřitelné množiny A_n, $n\in\mathbb{N}$ takové, že $\mu(A_n)<\infty$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=X$.

Definice. Nechť μ,ν jsou míry na $(X,\mathcal{A})$. Řekneme, že ν *je absolutně spojitá vzhledem k* μ (značíme $\nu<<\mu$), jestliže pro každou $E\in\mathcal{A}$ platí

$$\mu(E)=0\Rightarrow\nu(E)=0.$$

Definice. Nechť f je nezáporná μ-měřitelná funkce. Pak míra $\nu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ definovaná předpisem

$$\nu(E):=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

se nazývá *míra s hustotou f (vzhledem k μ)*. Naopak f se v této situaci nazývá *hustota* nebo *Radon-Nikodýmova derivace* míry ν (vzhledem k ν) a značí $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Věta 3.36 (Radon-Nikodýmova věta)**.** *Nechť μ je σ-konečná a nechť ν je σ-konečná míra na $(X,\mathcal{A})$ splňující $\nu<<\mu$. Pak existuje právě jedna (až na modifikace na množinách μ-míry nula) μ-měřitelná funkce f taková, že $f=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$, tj.*

$$\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu, \qquad E\in\mathcal{A}.$$

Navíc, pokud je ν konečná, pak f je μ-integrovatelná.

Tvrzení 3.37 (O integraci vzhledem k hustotě)**.** *Nechť* μ *je* σ*-konečná a nechť* ν *je konečná míra na* $(X, \mathcal{A})$ *splňující* $\nu << \mu$ *a nechť* $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$*. Pak pro každou* $E \in \mathcal{A}$ *a každou* $\mathcal{A}$*-měřitelnou funkci* $g : E \to \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_E g(x)\,\mathrm{d}\nu = \int_E gf\,\mathrm{d}\mu,$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

konec 25. přednášky (6.1.2021)