Lineární algebra I (pro fyziky)

Soustavy lineárních rovnic

Dalibor Šmíd

MFF UK

Minule jsme viděli několik úloh vedoucích na soustavy lineárních rovnic:

- hledání průsečnice rovin (průniku nadrovin)
- hledání lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, která dává vektor $\mathbf{b}$
- hledání vzoru vektoru $\mathbf{b}$ v zobrazení F_A.
- hledání sloupců inverzní matice

Další příklady jsou řešení elektrických obvodů (Kirchhoffovy zákony), chemických rovnic, numerické aproximace řešení diferenciálních rovnic, proložení bodů polynomem nebo jinou funkcí či křivkou a mnoho dalších.

Řešení SLR je nejdůležitější úloha lineární algebry. Pokusíme se jí proto co nejlépe porozumět.

Definice

Elementární řádkovou úpravou (*EŘÚ*) matice rozumíme buď

1. prohození dvou řádků
2. přičtení libovolného násobku nějakého řádku do jiného řádku
3. vynásobení nějakého řádku nenulovým číslem

Elementární maticí rozumíme matici, která vznikne z jednotkové matice elementární řádkovou úpravou.

Tvrzení

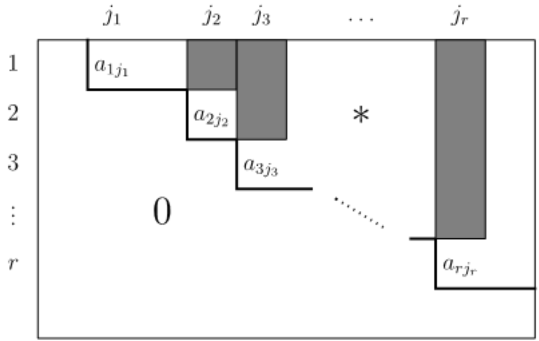
Elementární řádková úprava rozšířené matice soustavy $(A|\mathbf{b})$ *nemění množinu řešení. Pokud* B *je matice této EŘÚ, pak upravená matice je* $(BA|B\mathbf{b})$.

Důkaz.

Každou EŘÚ lze vrátit zpět opět pomocí EŘÚ. Stačí tedy pro jednotlivé typy EŘÚ ukázat, že každé řešení $(A|\mathbf{b})$ je také řešením upravené soustavy. To, stejně jako zapsání matic těchto úprav a ověření druhé části tvrzení, necháváme za cvičení ♣. $\square$

Definice

První nenulový prvek každého řádku matice se nazývá *pivot*. Matice A je v *odstupňovaném tvaru*, pokud má každý pivot vyšší sloupcový index než pivot předchozího řádku. Sloupce, v nichž jsou v odstupňovaném tvaru pivoty, se nazývají *pivotní sloupce*. Matice je v *redukovaném odstupňovaném tvaru*, pokud jsou navíc všechny pivoty rovny 1 a všechny ostatní elementy pivotních sloupců jsou rovny 0.



Tvrzení

Je-li rozšířená matice soustavy $(A|\mathbf{b})$ *v odstupňovaném tvaru, pak má soustava rovnic řešení, právě když sloupec pravých stran není pivotní.*

Důkaz.

Předpokládejme, že rozšířená matice má r nenulových řádků a pivoty mají sloupcové indexy $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Pokud sloupec pravých stran je pivotní, pak je součástí soustavy také rovnice, která má na levé straně 0 a na pravé nenulový pivot b_r. Taková rovnice nemá řešení a tedy ani celá soustava. Pokud sloupec pravých stran pivotní není, pak je jedním z řešení vektor $\mathbf{x}$, v němž $\forall k \in \{1, \ldots, r\}$ je $x_{j_k} = b_k$ a ostatní složky jsou nulové. $\square$

Obecné řešení SLR v odstupňovaném tvaru získáme, pokud položíme každou nepivotní složku rovnu nějakému reálnému parametru a zpětným dosazením dopočítáme složky pivotní. Nejlépe je to vidět na maticích v redukovaném odstupňovaném tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Zvolíme $x_6 = t$, $x_4 = s$ a $x_3 = r$ a dopočteme

$$\begin{aligned} x_5 &= 4 + 2t \\ x_2 &= 2 - 3r + s + 3t \\ x_1 &= 9 + 2r + 2s + 3t \end{aligned}$$

Přepsáno do vektorového tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že vektor $\mathbf{b}$ pravých stran nemá žádný vliv na koeficienty u parametrů r, s, t. Řešení SLR s maticí $(A|\mathbf{o})$ (*příslušné homogenní soustavy*) je tedy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To se netýká jen soustav v odstupňovaném tvaru:

TVRZENÍ

Nechť $\mathbf{x}_P$ *je nějaké řešení SLR* $(A|\mathbf{b})$. *Pak vektor* $\mathbf{x}_P + \mathbf{x}_H$ *je řešením soustavy* $(A|\mathbf{b})$ *právě tehdy, když je* $\mathbf{x}_H$ *řešením příslušné homogenní soustavy.*

DŮKAZ.

Pokud $\mathbf{x}_P + \mathbf{x}_H$ je řešením soustavy, pak $A(\mathbf{x}_P + \mathbf{x}_H) = \mathbf{b}$. Z distributivity maticového násobení plyne

$$A(\mathbf{x}_P + \mathbf{x}_H) = A\mathbf{x}_P + A\mathbf{x}_H = \mathbf{b} + A\mathbf{x}_H$$

Tedy $A\mathbf{x}_H = \mathbf{o}$. Pokud naopak $A\mathbf{x}_H = \mathbf{o}$, pak dosazením do rovnosti výše dostáváme $A(\mathbf{x}_P + \mathbf{x}_H) = \mathbf{b}$. $\square$

Vektoru $\mathbf{x}_P$ říkáme *partikulární řešení nehomogenní soustavy*. Množině všech řešení homogenní soustavy $(A|\mathbf{o})$ pak *jádro matice* A, značíme $\operatorname{Ker} A$. Množina řešení nehomogenní soustavy se v duchu tvrzení zapisuje ve tvaru $\mathbf{x}_P + \operatorname{Ker} A$.

DEFINICE

Množina $W \subset \mathbb{R}^n$, která s každými vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ obsahuje i všechny jejich lineární kombinace $r\mathbf{x} + s\mathbf{y}$, se nazývá *podprostor*. Množina tvaru $\mathbf{x} + W$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a W je podprostor v $\mathbb{R}^n$, se nazývá *afinní podprostor*.

TVRZENÍ

Jádro každé matice A typu $m \times n$ je podprostor v $\mathbb{R}^n$.

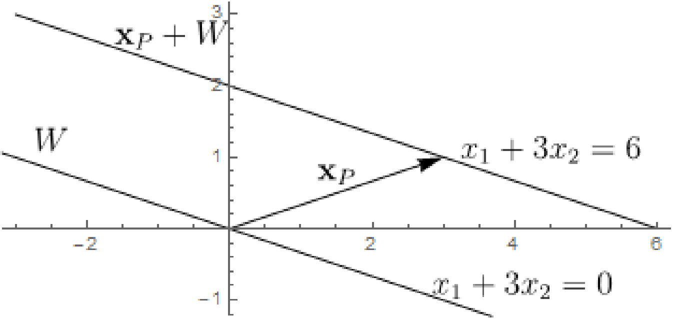
DŮKAZ.

Pokud $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{Ker} A$, pak $A\mathbf{x} = A\mathbf{y} = \mathbf{o}$. Pak ale

$$A(r\mathbf{x} + s\mathbf{y}) = rA\mathbf{x} + sA\mathbf{y} = r\mathbf{o} + s\mathbf{o} = \mathbf{o},$$

tedy i $r\mathbf{x} + s\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} A$. $\square$

Každý podprostor musí obsahovat nulový vektor, stačí zvolit $r = s = 0$. Opačná implikace, tedy že podmnožina $\mathbb{R}^n$ obsahující nulový vektor je nutně podprostorem, neplatí (najděte protipříklad!). Afinní podprostor $\mathbf{x} + W$ obsahující $\mathbf{o}$ ovšem už podprostorem být musí. To nastává právě tehdy, když $\mathbf{x} \in W$. Homogenní a nehomogenní soustavy se tedy liší právě tím, že řešením prvních je vždy podprostor, řešením druhých nikdy není podprostor, pouze afinní podprostor:



Každou matici A typu $m \times n$ lze převést do (redukovaného) odstupňovaného tvaru postupem zvaným *Gaussova eliminace*:

1. Najdeme první nenulový sloupec, jeho index označíme j. Pokud neexistuje, je matice nulová, tedy v redukovaném odstupňovaném tvaru.
2. Pokud je $a_{1j} = 0$, pak prohodíme 1. řádek s libovolným řádkem i, v němž $a_{ij} \neq 0$.
3. Pro každé $i = 2, 3, \dots, m$ přičteme $(-a_{ij}/a_{1j})$-násobek prního řádku do i-tého řádku.
4. Opakujeme postup pro matici bez prvního řádku. Proces se zastaví buď v bodě 1, nebo tím, že dojdou nenulové řádky. Pokud v každém průchodu bodu 1 zaznamenáme index j do proměnné j_k, dostaneme posloupnost $j_1 < j_2 < \dots j_r$ indexů pivotních sloupců, přičemž řádky $r+1$ až m jsou nulové.
5. Pro každé $i = 1, \dots, r$ vynásobíme i-tý řádek číslem $1/a_{ij_i}$ a poté pro každé $k < i$ přičteme jeho $(-a_{kj_i})$-násobek do k-tého řádku.

Ukažme si Gaussovu eliminaci na příkladě rozšířené matice SLR:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 1 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 3 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

První úpravě, tedy hledání vhodného pivota, se říká *pivotace*. Po dvou průchodech body 1,2,3,4 jsme dospěli zpět do 1 a nemáme už žádné nenulové řádky. Bod 5, tedy přechod do redukovaného tvaru, je efektivnější provádět odspodu:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Množina řešení soustavy má tvar

$$\mathbf{x}_P + \operatorname{Ker} A = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Množina všech lineárních kombinací nějaké množiny vektorů $M \subset \mathbb{R}^n$ se značí $\langle M \rangle$ a říká se jí *lineární obal*. S tímto značením můžeme řešení zapsat poněkud úsporněji jako

$$(8,1,0,0,-2)^T + \langle (2,2,1,0,0)^T, (-3,-2,0,1,0)^T \rangle$$

Často se v zápise vynechává i symbol transponování.

Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá

- *prosté* (*injektivní*), pokud má každý prvek z Y nejvýše jeden vzor, tedy pokud $f(a) = f(b)$, pak $a = b$.
- *na* (*surjektivní*), pokud má každý prvek z Y alespoň jeden vzor
- *vzájemně jednoznačné* (*bijektivní*), pokud má každý prvek z Y právě jeden vzor, tedy pokud existuje inverzní zobrazení $f^{-1} : Y \to X$.

Ze zobrazení, kterými jsme se zabývali, jsou posunutí $T_{\mathbf{b}}$, zrcadlení $Z_{\mathbf{x}^\perp}$, dilatace D_λ pro $\lambda \neq 0$ i rotace bijektivní zobrazení (napište inverze! ♣). Projekce $P_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ není prostá, protože libovolný vektor z nadroviny $\mathbf{x}^\perp$ se zobrazí na $\mathbf{o}$, a není ani na, protože $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ leží vždy v $\langle \mathbf{x} \rangle$. Podobně pro $P_{\mathbf{x}^\perp}$.

Množinu

$$\operatorname{Im} f := \{p \in Y \mid \exists a \in X : f(a) = p\}$$

nazýváme *obraz* zobrazení f. Obsahuje všechny prvky Y, které mají v zobrazení f vzor, tedy pro zobrazení na platí $\operatorname{Im} f = Y$.

Zobrazení $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je prosté právě tehdy, když rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má pro všechna $\mathbf{b}$ nejvýše jedno řešení, tedy když $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{o}\}$. To nastává právě tehdy, když jsou po převodu A na odstupňovaný tvar všechny sloupce pivotní, neboli přejde-li A v redukovaném odstupňovaném tvaru na jednotkovou matici. Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, pakliže $\mathbf{b}$ lze zapsat jako

$$(\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_n)\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots x_n\mathbf{a}_n,$$

neboli $\operatorname{Im} A = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$. Zobrazení F_A je tedy na, právě když $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = \mathbb{R}^m$. Lineárnímu obalu sloupců se říká *sloupcový prostor* matice A (analogicky definujeme *řádkový prostor*, ten je roven $\operatorname{Im} A^T$). Rovnost $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = \mathbb{R}^m$ formulujeme také tak, že sloupce matice A prostor $\mathbb{R}^m$ *generují*.

Tvrzení

Zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *je bijektivní, právě když* A *je čtvercová a existuje matice* X*, pro kterou* $AX = E$*.*

Důkaz.

Je-li f_A bijektivní, pak pro každou pravou stranu $\mathbf{b}$ má SLR $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení. Nemůže tedy být $m < n$, protože pak by po převodu na odstupňovaný tvar nemohly být všechny sloupce pivotní a tedy $\operatorname{Ker} A \neq \{\mathbf{o}\}$. Nemůže být ani $m > n$, protože pak by bylo možné najít pravou stranu $\mathbf{b}$ takovou, že po eliminaci matice $(A|\mathbf{b})$ bude sloupec pravých stran pivotní. Tedy A je čtvercová. Pro pravou stranu $\mathbf{e}_i$ označme $\mathbf{x}_i$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$. Pak $X = (\mathbf{x}_1| \dots |\mathbf{x}_n)$ splňuje $AX = E$. Tím je dokázána první implikace. $\square$

Důkaz.

Dokažme nyní druhou implikaci. Pokud existuje matice X splňující $AX = E$, pak $\mathbf{x} := X\mathbf{b}$ je řešením soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Tedy f_A je na. Uvažujme eliminaci rozšířené matice $(A|E)$ elementárními úpravami s maticemi $B_1, \ldots, B_k$. Pak

$$(A|E) \sim (B_k \ldots B_1 A | B_k \ldots B_1 E) = (C | B_k \ldots B_1),$$

kde matice C je v redukovaném odstupňovaném tvaru. Pokud by měla nulový řádek, neplatilo by, že $(A|\mathbf{b})$ má řešení pro každé $\mathbf{b}$. Protože je čtvercová, musí tedy mít n pivotních sloupců, neboli být jednotkovou maticí. Pak ale j-tý sloupec součinu $B_k \ldots B_1$ je jediným řešením soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, jejímž řešením je i j-tý sloupec X. Tedy $B_k \ldots B_1 = X$ a $XA = E$. Tedy X je inverzní matice k A a tudíž i f_X inverzní zobrazení k f_A. $\square$

Připomeňme, že čtvercovou matici A, která má inverzní matici, nazýváme *regulární*. Z tvrzení a jeho důkazu plyne, že regulární jsou právě ty matice, pro které je f_A bijektivní, a že stačí ověřovat jen podmínku $AX = E$, tedy inverznost zprava.