

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
27. 5. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f(x): \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou následovně:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x & \text{pro } x > 0, \\ \exp(1/x) & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

- [3 b.] Má tato funkce limitu v bodě $x = 0$? Pokud ne, má v tomto bodě aspoň jednu či obě jednostranné limity? Čemu se tyto limity rovnají?
 - [3 b.] Existuje nějaké $A > 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(-A, 0)$? Pokud ano, najděte co největší takové $A \in \mathbb{R}^*$.
 - [4 b.] Ve kterých bodech má funkce f lokální extrém? V kterých bodech má globální extrém?
- (a) [3 b.] Nechť M je neprázdná množina reálných čísel. Napište, jak je definováno supremum $\sup M$ množiny M .
 - (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení: “Pokud $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost reálných čísel, potom posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má vždy limitu, a ta je rovna supremu množiny $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.”
 - (c) [3 b.] Čemu je rovna limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\frac{1}{\sqrt{n}})$?
- (a) [4 b.] Definujte, co to znamená, že funkce má Darbouxovu vlastnost. Zformulujte větu, která mluví o tom, že funkce, která má primitivní funkci, má Darbouxovu vlastnost.
 - (b) [6 b.] Dokažte tu větu.
- (a) [3 b.] Napište, jak se vypočítá objem rotačního tělesa, určeného rotací plochy pod grafem spojitě nezáporné funkce f na daném intervalu $[A, B]$.
 - (b) [3 b.] Nechť $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ je nezáporná spojitá funkce na intervalu $[0, 1]$. Označme $t(f, 0, 1)$ objem rotačního tělesa určeného rotací plochy pod grafem funkce f na intervalu $[0, 1]$. Definujme novou funkci $g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ předpisem $g(x) = 3f(1-x)$. Je možné ze znalosti $t(f, 0, 1)$ určit hodnotu $t(g, 0, 1)$? Pokud ano, jaký je vztah mezi $t(f, 0, 1)$ a $t(g, 0, 1)$?
 - (c) [4 b.] Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[0, 2]$ předpisem $f(x) = \max\{0, \ln x\}$. Je funkce f riemannovsky integrovatelná na $[0, 2]$? Zdůvodněte. Pokud je funkce f riemannovsky integrovatelná, čemu je roven integrál $\int_0^2 f$?