I. MECHANIKA

3. Energie a silové pole II

Základní typy konzervativních polí

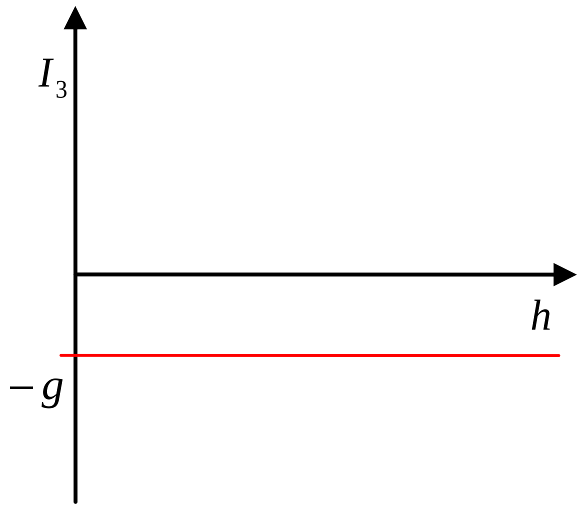
- homogenní pole
- pole centrální síly

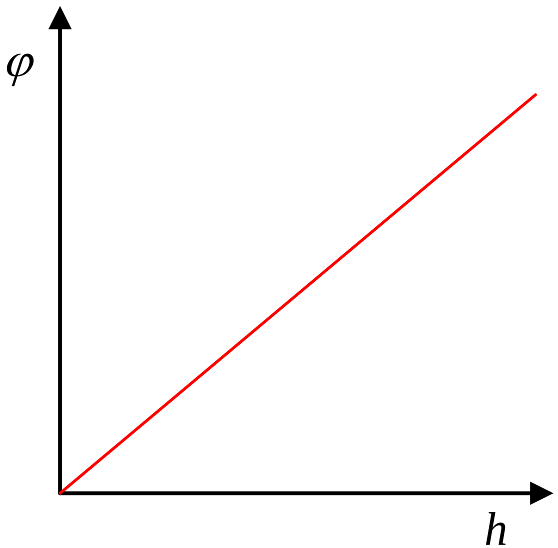
Homogenní pole

- vektorové pole $\vec{F}$ má ve všech bodech stejnou hodnotu $\vec{F} = (0,0,-mg)$
- intenzita pole $\vec{I} = (0,0,-g)$
- namísto souřadnice *z* se užívá výška *h*

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' + E_{p0} \;\rightarrow\; E_p(h) = mg \int_{h_0}^{h} dz + E_{h0} = mg(h - h_0) + E_{h0}$$

- referenční výška h_0 a aditivní konstanta E_{h0} se volí tak, aby $E_p(h=0)=0$
- pak vyjádření potenciální energie $E_p(h) = mgh$ a potenciálu $\varphi(h) = gh$





Centrální pole

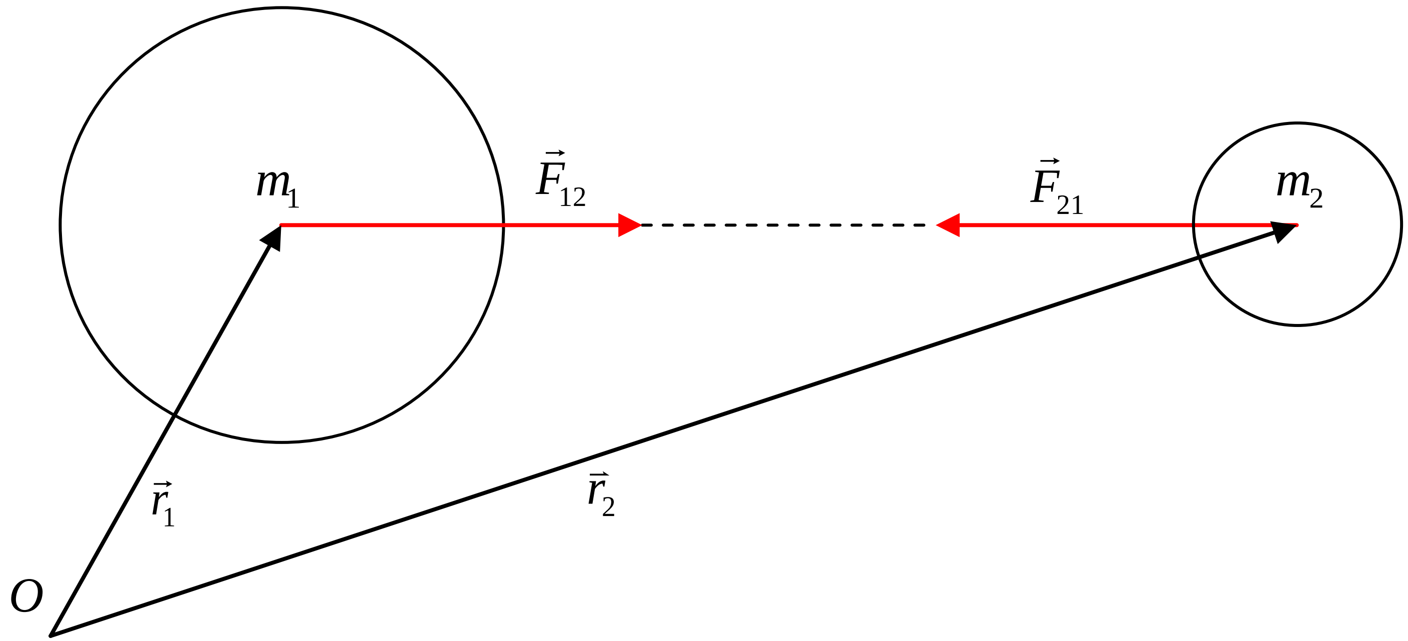
- počátek sférické s.s. v centru síly
- na pozici $\vec{r}$ působí síla $\vec{F} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$
- působící síla má nenulovou pouze radiální složku
- skalární součin vektoru síly $\vec{F}$ a diferenciálu $d\vec{r}'$ nezávisí na úhlových souřadnicích $\Rightarrow$ <u>hledáme formuli závislou pouze na radiální souřadnici</u>
- píšeme $\vec{F}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' = -f(r')\frac{\vec{r}\cdot d\vec{r}'}{r} = -f(r')dr'$, kde <u>skalární diferenciál dr'</u> značí nikoliv velikost vektoru $d\vec{r}'$, nýbrž <u>velikost průmětu $d\vec{r}'$ do radiálního směru</u>
- analogicky: obecná formule $E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' + E_{p0}$ pro P.E. se zjednoduší

  na tvar $E_p(r) = \int_{r_0}^{r} f(r')dr' + E_{p0}$

Newtonův gravitační zákon

- mezi body o hmotnostech m_1 a m_2 ve vzdálenosti r působí přitažlivá síla

  $F = \frac{\kappa\, m_1\, m_2}{r^2}$, kde gravitační konstanta $\kappa = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{kg}^{-1} \mathrm{m}^3 \mathrm{s}^{-2}$
- zákon všeobecné gravitace ve vektorovém tvaru:
  - silou $\vec{F}_{21} = -\frac{\kappa\, m_1\, m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$ působí první bod na druhý
  - silou $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ působí druhý bod na první



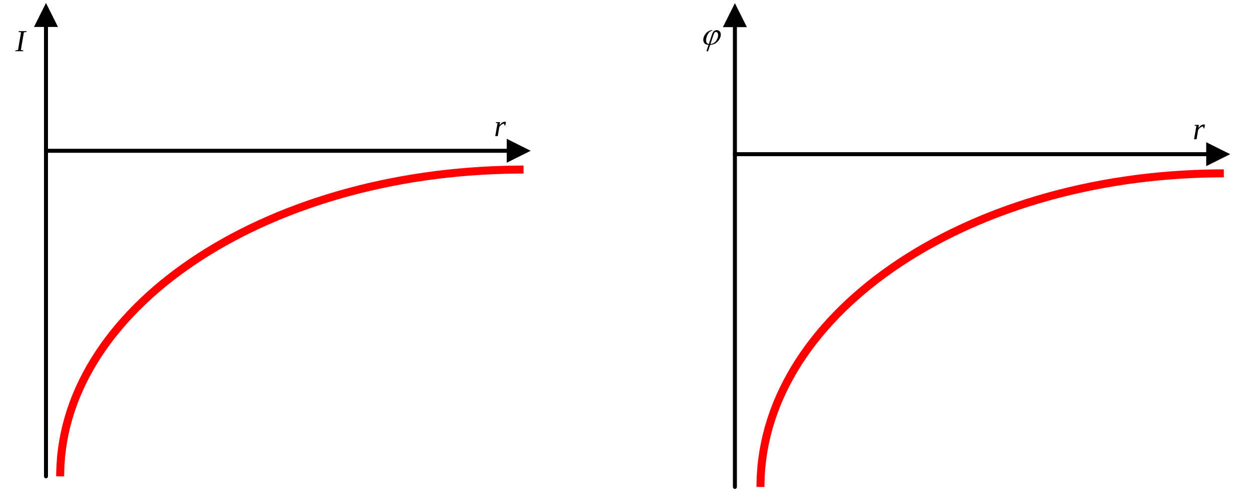
Gravitační pole velmi hmotného objektu

- pro $m_1 >> m_2$ lze umístit počátek vztažné soustavy do pozice prvního h.b. a zanedbat zpětné silové působení druhého bodu na první – pak se vztažná soustava pohybuje bez zrychlení a je tedy inerciální
- hmotnost centrálního hmotného bodu budeme značit M, hmotnost testovacího tělesa m a jeho polohový vektor $\vec{r}$
- na testovací těleso pak působí síla $\vec{F} = -\frac{\kappa\, M\, m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, což odpovídá obecnému tvaru centrálního silového pole $\vec{F} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$
- intenzita gravitačního silového pole bodu o hmotnosti M má intenzitu $\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\kappa\, M\vec{r}}{r^3}$ (intenzita gravitačního pole je rovna gravitačnímu zrychlení)
- potenciální energie $E_p(r) = \int_{r_0}^{r} f(r')dr' + E_{p0}$, kde $f(r) = \frac{\kappa\, M\, m}{r^2}$, takže

$$E_p(r) = \kappa\, M\, m\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2} + E_{p0} = \kappa\, M\, m\left[-\frac{1}{r'}\right]_{r_0}^{r} + E_{p0} = \kappa\, M\, m\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + E_{p0}$$

Gravitační pole velmi hmotného objektu

- obecné řešení $E_p(r) = \kappa\, M\, m\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + E_{p0}$
- běžně se volí referenční úroveň $r_0 \to \infty$ a potenciální energie na této úrovni rovna $E_{p0} = 0$, takže pak platí $E_p(r) = -\frac{\kappa\, M\, m}{r}$
- potenciál $\varphi(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{\kappa\, M}{r}$
- ekvipotenciální plochy jsou kulové, siločáry radiální



Gravitační pole objektu konečných rozměrů

diskrétní rozložení hmotnosti:

$$\left.\begin{aligned} \vec{I} &= \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\kappa\, M\, \vec{r}}{r^3} \\ M &= \sum_i m_i(\vec{r}) \end{aligned}\right\} \quad \vec{I} = -\kappa \sum_i \frac{m_i(\vec{r})\,\vec{r}}{r^3}$$

spojité rozložení hmotnosti:

$$\left.\begin{aligned} \vec{I} &= \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\kappa\, M\, \vec{r}}{r^3} \\ M &= \iiint_V \rho(\vec{r})\,dV \end{aligned}\right\} \quad \vec{I} = -\kappa \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})\,\vec{r}}{r^3}\,dV$$

Matematická poznámka: objemový integrál se často zapisuje také jako jednoduchý, oba následující zápisy mají stejný význam

$$M = \iiint_V \rho(\vec{r})\,dV$$

$$M = \int_V \rho(\vec{r})\,dV$$

- obecný výpočet složitý
- s výhodou lze využít <u>symetrie</u>
  (Rozložení hmotnosti, které je závislé pouze na vzdálenosti od středu, vytvoří pole, jehož intenzita také závisí jen na vzdálenosti od středu.)

Tok vektorového pole plochou

Zkoumejme tok Φ vektorového pole $\vec{A}$ uzavřenou plochou (počet vycházejících siločar)

- na uzavřené ploše vybereme elementární plošku velikosti dS
- normálový vektor $\vec{n}$ k plošce orientován směrem ven z uzavřené oblasti
- orientovaný element plochy $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$
- elementární tok ploškou určen průmětem vektoru pole do směru normály k povrchu $d\Phi = \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \vec{A} \cdot d\vec{S}$
- volba směru normálového vektoru určuje význam znaménka toku:
  - $d\Phi > 0$ ... tok směrem ven
  - $d\Phi < 0$ ... tok směrem dovnitř
  - $d\Phi = 0$ ... $\vec{A} = 0 \quad \vee \quad \vec{A} \perp \vec{n}$

Tok vektorového pole plochou

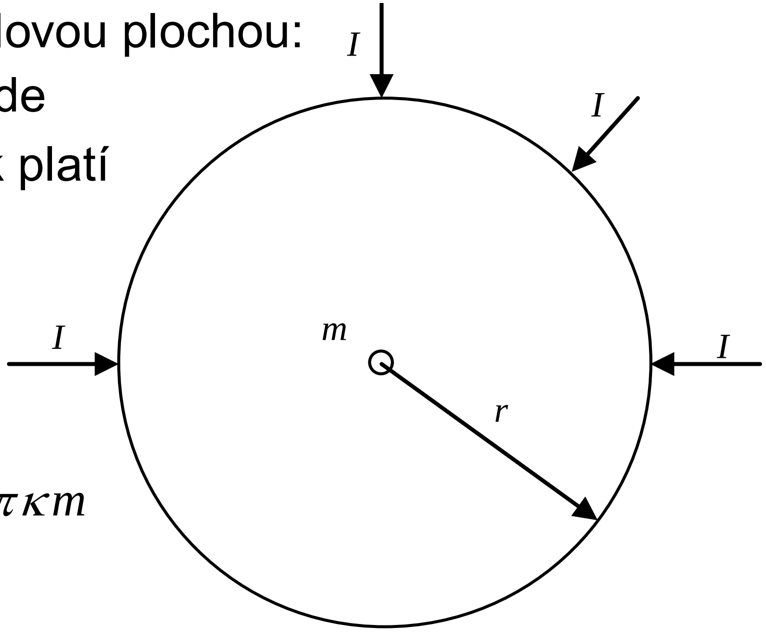
- celkový tok vektoru $\vec{A}$ plochou S (celkový počet siločar vycházejících z části uzavřené plochy)

  - elementární plošky konečných rozměrů $\Phi = \sum_i \vec{A}_i \cdot \Delta\vec{S}$ (část mnohostěnu)
  - infinitezimální elementární plošky $\Phi = \iint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$
  - znaménko toku:
    - $\Phi > 0$ ... tok směrem ven (více siločar směrem ven)
    - $\Phi < 0$ ... tok směrem dovnitř (více siločar směrem dovnitř)
    - $\Phi = 0$ ... nulový <u>celkový</u> tok (stejný počet siločar dovnitř i ven); speciální případy $\vec{A} = 0 \quad \vee \quad \vec{A} \perp \vec{n}$

- celkový tok uzavřenou plochou $\Phi = \oiint_{S(V)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$

Tok intenzity vyvolaný hmotným bodem

Pro zjednodušení výpočtu obklopíme h.b. kulovou plochou:
Ze symetrie plyne, že intenzita pole $\vec{I}$ je všude
kolmá k ploše a má stejnou velikost $|\vec{I}|$. Pak platí



$$\Phi = \underset{\text{povrch koule}}{\oiint} \vec{I} \cdot d\vec{S} = \underset{\text{povrch koule}}{\oiint} \vec{I}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \overset{\overbrace{\vec{I} \parallel \vec{n}}^{}}{\downarrow}{=}$$

$$= \underset{\text{povrch koule}}{\oiint} I(r)\, dS = I(r) \underset{\text{povrch koule}}{\oiint} dS = \underbrace{I(r)}_{-\kappa \frac{m}{r^2}} 4\pi r^2 = -4\pi\kappa m$$

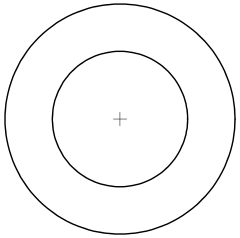
Tok intenzity gravitačního pole vyvolaný jediným h.b. hmotnosti m je roven

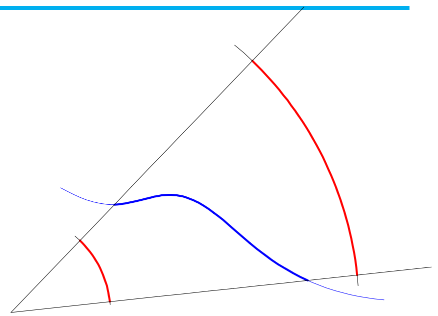
$$\Phi = \underset{S(V)}{\oiint} \vec{I} \cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa m\,.$$

Závislost na vzdálenosti se kompenzuje, protože mocnitel v Newtonově gravitačním zákonu je roven přesně 2. Celkový tok uzavřenou plochou bude stejný pro každou uzavřenou plochu libovolného tvaru.

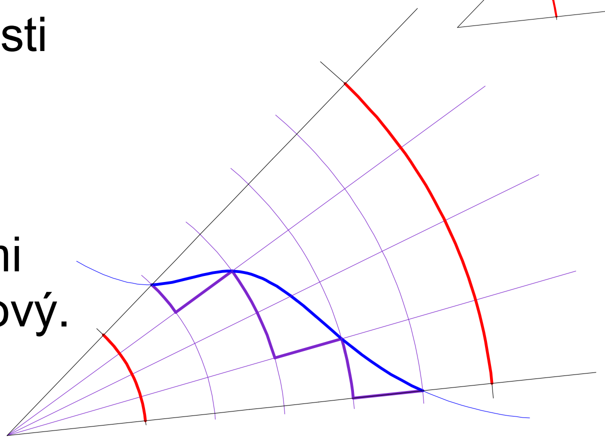
Tok intenzity plochou libovolného tvaru

Odvodili jsme, že celkový tok intenzity gravitačního pole kulovou plochou se středem v hmotném bodě nezávisí na poloměru.



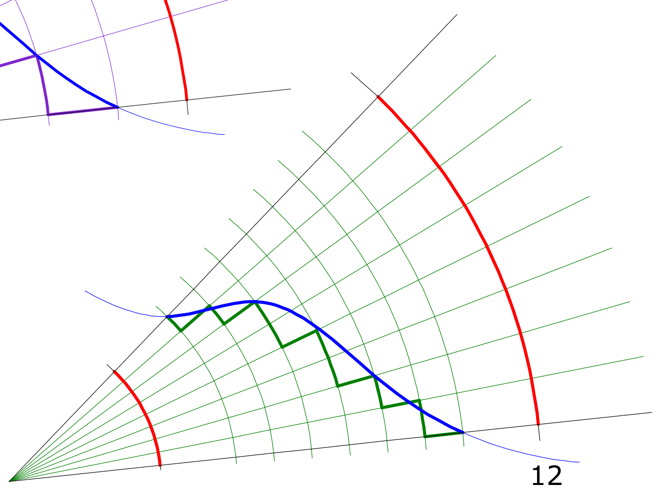


Ze symetrie plyne, že totéž platí pro části kulových ploch vymezené společným prostorovým úhlem.



Dále je zřejmé, že tok intenzity rovinami procházejícími hmotným bodem je nulový.

Protože obecnou plochu je možno s libovolnou přesností aproximovat kombinací elementárních soustředných kulových ploch a částí rovin procházejících hmotným bodem, rovná se tok obecnou plochou toku kulovou plochou.



Gaussův zákon

Zobecnění (Gaussův zákon)

- pro diskrétní rozložení hmoty uvnitř uzavřené plochy: $\oiint\limits_{S(V)} \vec{I} \cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa \sum_i m_i$

- pro spojité rozložení hmoty uvnitř uzavřené plochy: $\oiint\limits_{S(V)} \vec{I} \cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa \iiint\limits_V \rho \, dV$

Důsledky:

1) $\Phi = 0$, pokud uvnitř uzavřeného objemu neleží žádná hmota
2) siločáry vyvolané hmotou ležící vně uzavřeného objemu směřují dovnitř i ven a kompenzují se

Gaussův zákon je ekvivalentní Newtonovu gravitačnímu zákonu (připomeňme, že při jeho odvození hraje důležitou roli skutečnost, že mocnitel v NGZ je právě 2; důsledkem je nezávislost na tvaru a velikosti uzavírající plochy)

Gaussův zákon

V případě spojitého rozložení hmoty (derivace jsou všude spojité) lze použít Gaussovu větu:

$$\oiint_S \vec{I} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{I}\; dV$$

Pak platí

$$\oiint_S \vec{I} \cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa \iiint_V \rho\, dV = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{I}\; dV \rightarrow \iiint_V \left(\mathrm{div}\, \vec{I} + 4\pi\kappa\rho\right) dV = 0$$

$\rightarrow$ $\mathrm{div}\, \vec{I} = -4\pi\kappa\rho$ musí platit v každém bodě (Gaussův zákon v diferenciálním tvaru)

Pozn.: Obdobou pro elektrický náboj je Coulombův zákon, kde také vystupuje závislost přesně na převráceném kvadrátu vzdálenosti. Tam také platí GZ

Gravitační pole symetrického objektu

Naznačený způsob lze použít pro výpočet pole v okolí symetrického objektu:

- Rozložení hmotnosti (celkové velikosti m), které je závislé pouze na vzdálenosti od středu, vytvoří pole, jehož intenzita také závisí jen na vzdálenosti od středu.
- Na kulové ploše poloměru r (od středu symetrie) obklopující celou generující hmotu bude mít intenzita pole stejnou velikost I. Aplikujme GZ.

$$\underbrace{\underbrace{\oiint_{S(V)} \vec{I}\cdot d\vec{S}}_{I\,4\pi r^2} = -4\pi\kappa \underbrace{\iiint_V \rho\, dV}_{m}}_{I=-\kappa\frac{m}{r^2}}$$

(Povšimněme si, že *r* v tomto vztahu není vzdálenost od hmotného elementu, nýbrž poloměr kulové plochy. Přímo ve středu symetrie se nemusí nacházet žádný hmotný objekt.)

Gravitační pole symetrického objektu

Příklady:

1. homogenní kulová slupka hmotnosti m :
   - vně – pole stejné jako pole h.b. hmotnosti m
   - uvnitř – pole $I = 0$, potenciál konstantní

2. homogenní koule poloměru R a hmotnosti m
   - vně – pole stejné jako pole h.b. hmotnosti m
   - uvnitř – pole jako h.b. hmotnosti $m\frac{r^3}{R^3}$, tedy

$I = -\kappa\, m \frac{r^3}{R^3}\frac{1}{r^2} = -\kappa\, m \frac{r}{R^3}$ a potenciál $\varphi(r) = \frac{\kappa\, m}{R^3}\int_0^r r'dr' + \varphi_0 = \frac{\kappa\, mr^2}{2R^3} + \varphi_0$

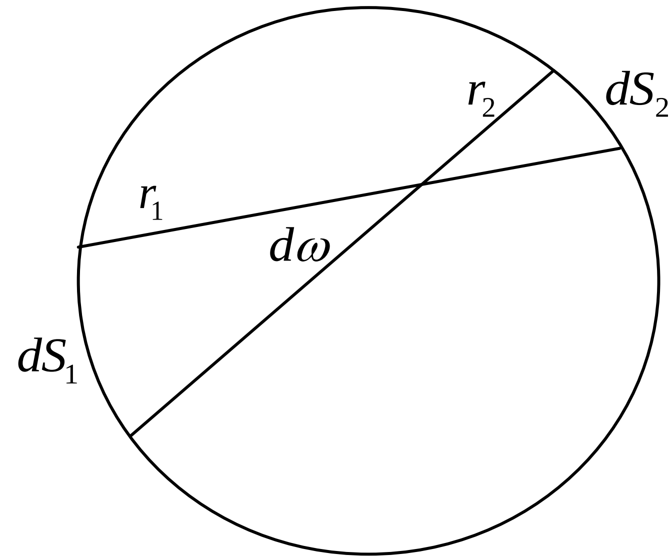
z rovnosti obou vztahů pro $r = R$ platí $\varphi(R) = -\frac{\kappa\, m}{R} = \frac{\kappa\, m}{2R} + \varphi_0 \rightarrow$

$$\varphi_0 = -\frac{3\kappa\, m}{2R} \rightarrow \varphi(r) = \frac{\kappa\, mr^2}{2R^3} - \frac{3\kappa\, m}{2R}$$

Gravitační pole kulové vrstvy

problém pole homogenní kulové vrstvy řešil už Newton:

- plošná hustota σ
- prostorový úhel $d\omega$
- plošný element dS
- hmotnostní element dm



$$dS_1 = r_1^2 d\omega \rightarrow dm_1 = \sigma\, dS_1 \rightarrow E_1 = \kappa \frac{dm_1}{r_1^2}$$

$$dS_2 = r_2^2 d\omega \rightarrow dm_2 = \sigma\, dS_2 \rightarrow E_2 = \kappa \frac{dm_1}{r_2^2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{dm_1}{dm_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\sigma\, dS_1}{\sigma\, dS_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\sigma\, r_1^2 d\omega}{\sigma\, r_2^2 d\omega}\frac{r_2^2}{r_1^2} = 1$$

Příspěvky od protilehlých plošných elementů vymezených na vrstvě elementárním prostorovým úhlem $d\omega$ jsou stejně velké a opačně orientované, tj. kompenzují se. Intenzita gravitačního pole homogenní kulové vrstvy je uvnitř všude nulová, potenciál je konstantní.

Gravitační pole Země - přiblížení homogenním polem

potenciální energie v malé výšce $h << R_Z$ nad povrchem Země:

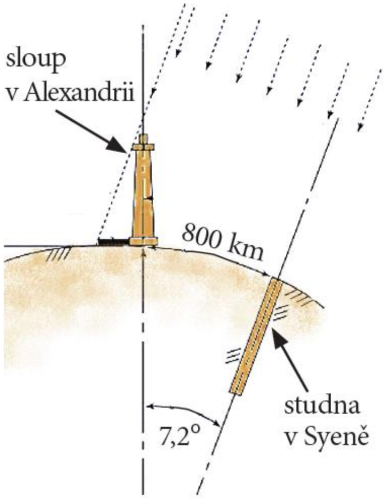
$$E_p(h) = E_p(h) - E_p(0) = -\frac{\kappa M_Z m}{R_Z + h} + \frac{\kappa M_Z m}{R_Z} = \underbrace{\kappa M_Z}_{a_g R_Z^2} m\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z + h}\right) =$$

$$= m a_g R_Z^2 \frac{R_Z + h - R_Z}{R_Z(R_Z + h)} = m a_g h \underbrace{\frac{R_Z}{R_Z + h}}_{\approx 1} \approx m a_g h$$

splněno jen v malých oblastech

Gravitační pole Země - přiblížení centrálním polem

přibližný tvar koule
rozměry Země – dříve geodetická měření – dnes GPS



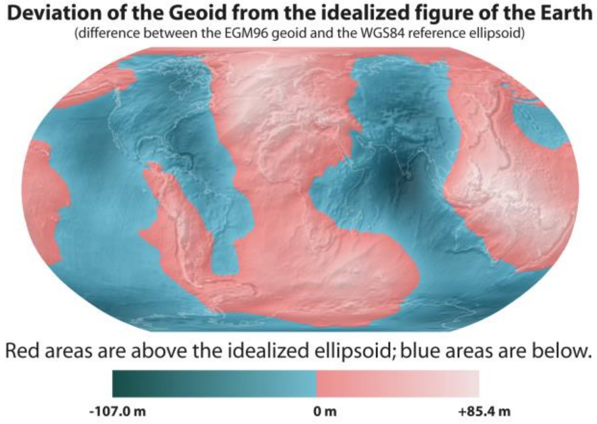
Erathostenovo měření obvodu Země

<u>referenční elipsoid</u> WGS-84 (World Geodetic System 1984)
mapy, navigace
historie – mapy vztažené k různým elipsoidům – rozdíly i 100 m
poloměr Země:

- R_Z = 6378 km (rovníkový)
- R_Z = 6356 km (polární)
- R_Z = 6371 km (poloměr koule stejného objemu)

<u>geoid</u> EGM96 (Earth Gravity Model 1996)
ekvipotenciální plocha tíhového pole

- co nejvíce se přimyká k hladině oceánu
- prochází v podzemí kontinentů



http://en.wikipedia.org/wiki/User:Citynoise -
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Geoid_height_red_blue.png

Gravitační pole Země - přiblížení centrálním polem

Jak se mění gravitační zrychlení v okolí zemského povrchu (užití diferenciálu)?

$$a_g = \frac{\kappa M_Z}{r^2} \qquad da_g = -2\frac{\kappa M_Z}{r^3}dr \qquad \Delta a_g = -2\frac{\kappa M_Z}{r^3}\Delta r \qquad \frac{\Delta a_g}{a_g} = -2\frac{\Delta r}{r}$$

i bez znalosti gravitační konstanty a hmotnosti Země můžeme zjistit, že např.

- v nadmořské výšce 6378 metrů (1/1000 poloměru Země) se gravitační zrychlení zmenší oproti úrovni mořské hladiny o 2/1000 hodnoty, což je přibližně 0.02 ms^{-2}
- ke zmenšení gravitačního zrychlení o 0.01 ms^{-2} dojde při zvýšení nadmořské výšky o 3251 metrů.

Tíhové zrychlení na povrchu Země

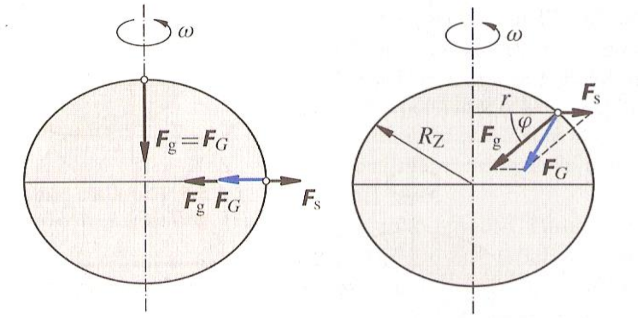
tíhová síla – působí v těžišti, urychluje těleso
pozor na terminologii: tíha – působí na okolní tělesa (podložka, závěs,...) a její působiště leží v místě styku s podložkou, ukotvení závěsu,...

z hlediska neinerciální v.s. spojené pevně se Zemí je tíhová síla vektorovým součtem gravitační síly a odstředivé síly (setrvačná síla) platí:

$$r = R_Z \cos\varphi$$

$$F_s = mr\omega^2$$

$$F_G^2 = F_g^2 + F_s^2 - 2F_g F_s \cos\varphi$$



stav beztíže

- neprojevuje se působení tíhy na okolní tělesa
- v příslušné neinerciální v.s. dojde k vymizení tíhové síly díky setrvačným silám

například:

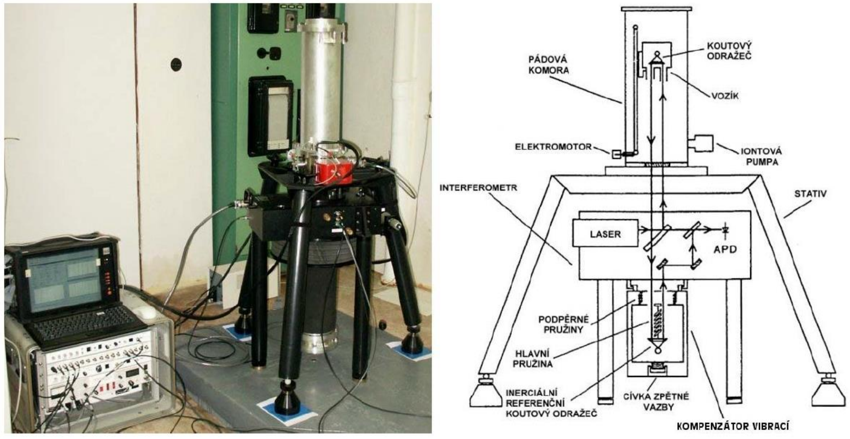
- v případě neinerciální v.s. spojené se stanicí na oběžné dráze se vektorově skládá gravitační síla a odstředivá síla – ty mají stejnou velikost, takže výsledná tíhová síla je nulová
- v případě n.v.s. spojené s padající zdviží se vektorově skládají gravitační síla a setrvačná síla – ty mají stejnou velikost

Standardní hodnota tíhového zrychlení

Jako standardní byla na 3. Generální konferenci pro míry a váhy v r. 1901 stanovena tzv. normální hodnota tíhového zrychlení $g_n = 9.80665\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ (přesně)

měření lokálního tíhového zrychlení

- reverzní kyvadlo – doba kyvu kyvadla závisí na *g* (praktikum)
- balistický gravimetr – volný pád ve vakuu (nejistota řádu 10^{-8} $\mathrm{ms^{-2}}$)



Obr. 1 *Absolutní gravimetr FG5 č. 215 a jeho schéma*

experimentální závislost tíhového zrychlení na zeměpisné šířce na úrovni moře

International Gravity Formula 1967:

$$g(\varphi) = 9.780327(1 + 0.0053024\sin^2\varphi - 0.0000058\sin^2 2\varphi)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

odtud vychází $g(45°30') \cong 9.80665\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Započtení odstředivé síly

- Na rovníku je tíhové zrychlení menší než gravitační o hodnotu
- $$a_s = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60 s} \right)^2 \times 6378 \times 10^3 m = 0.034\ ms^{-2}$$
- (což odpovídá zvýšení nadmořské výšky o cca 11 km)
- Experimentálně zjištěná hodnota tíhového zrychlení na rovníku je 9.78 ms^{-2}.
- Gravitační zrychlení pak vychází přibližně 9.814 ms^{-2}.

Hmotnost Země

- hmotnost Země M_Z se určuje na základě gravitační interakce
- nejjednodušší výpočet na základě změřeného gravitačního zrychlení a_g na rovníku

$$a_g = \frac{F_g}{m} = |\vec{I}| = \frac{\kappa\, M_Z}{R_Z{}^2} \Rightarrow M_Z = \frac{a_g R_Z{}^2}{\kappa} \Rightarrow$$

$$M_Z = \frac{9.814\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,(6378\times10^3\,\mathrm{m})^2}{6.67428\times10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}\,m^3 s^{-2}}} = 5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$$

- můžeme spočítat objem Země (užijeme střední hodnotu poloměru) a vypočítat střední hustotu

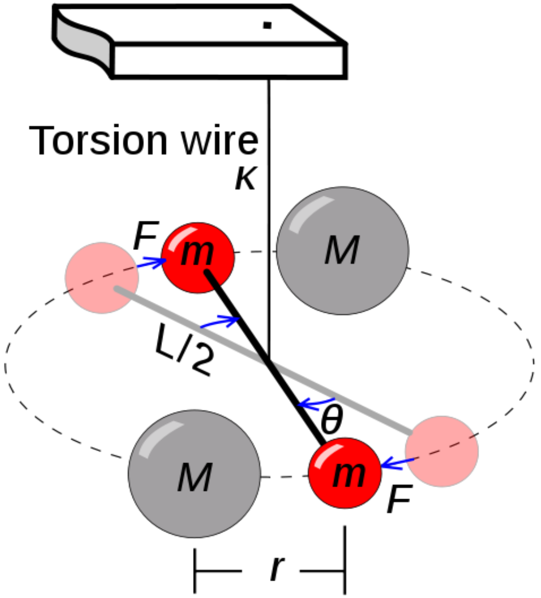
$$\rho_Z = \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3} \qquad \rho_Z = \frac{5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi(6371\times10^3\,\mathrm{m})^3} = 5.52\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

- využili jsme znalosti gravitační konstanty

Měření gravitační konstanty

- pro její určení bylo nutno provést skutečné měření síly působící mezi tělesy definované hmotnosti

- torzní váhy, kde tíhová síla působí na tělesa kolmo k ose rotace vah, takže nevlivní měření

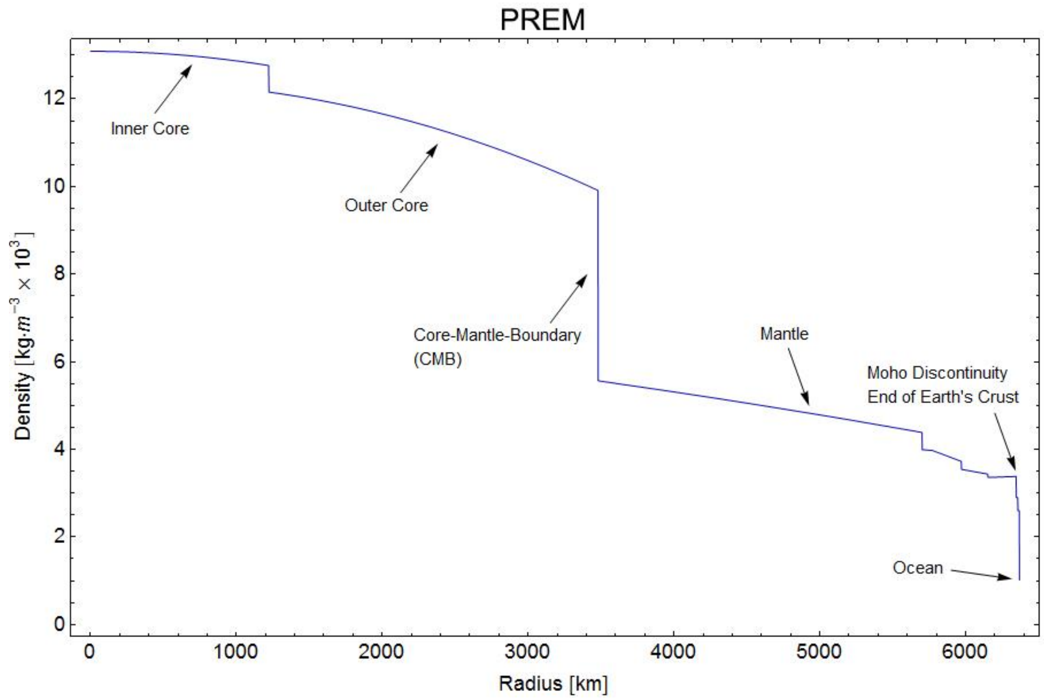


Henry Cavendish (1731 – 1810, Anglie)

- měřil v r. 1798 pomocí torzních vah gravitační konstantu v jiných jednotkách – po přepočtu $\kappa = 6.74 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$
- pro něj to ale byl nepříliš podstatný mezivýsledek
- konečným publikovaným výsledkem jeho experimentu byla právě průměrná hustota planety Země (5.448 g cm^{-3})

Co jsme neuvažovali

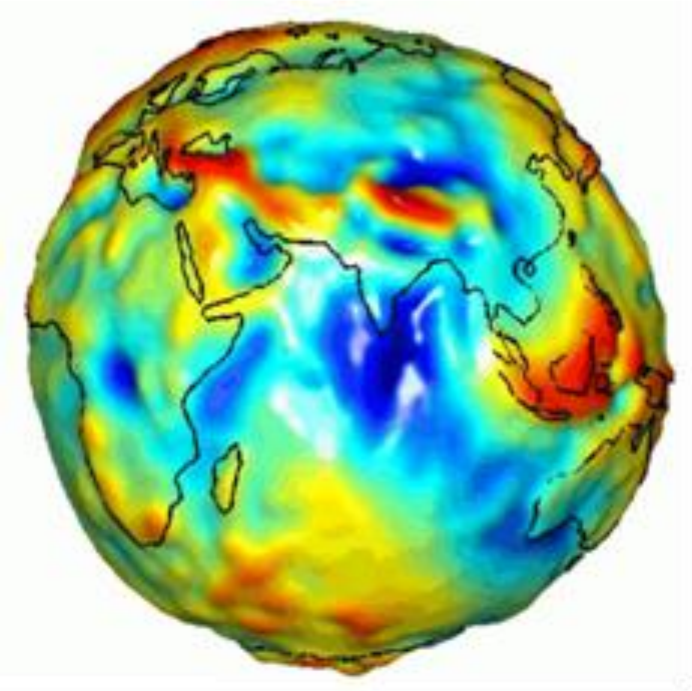
Země není homogenní – slupky výrazně odlišné hustoty (víme, že to by nevadilo, pokud by slupky byly homogenní)

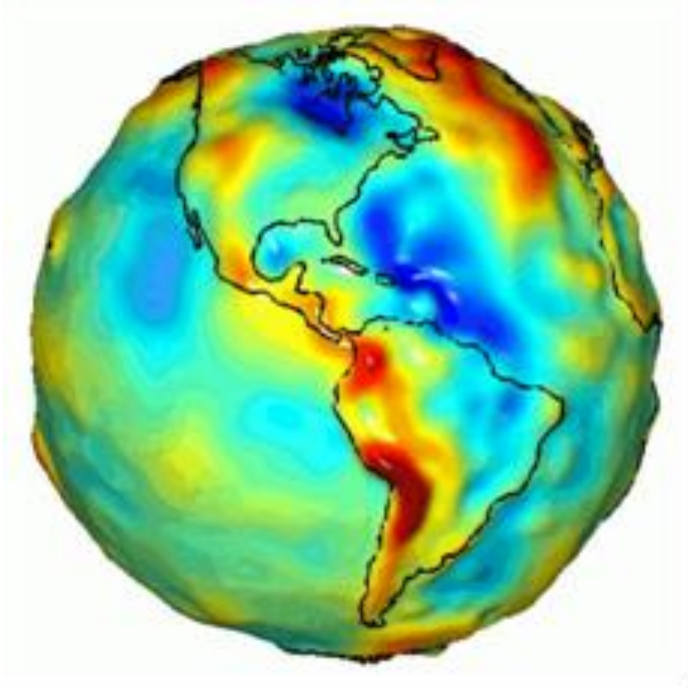


"RadialDensityPREM" by AllenMcC. - Own work, Paper: http://www.gps.caltech.edu/uploads/File/People/dla/DLApepi81.pdf.

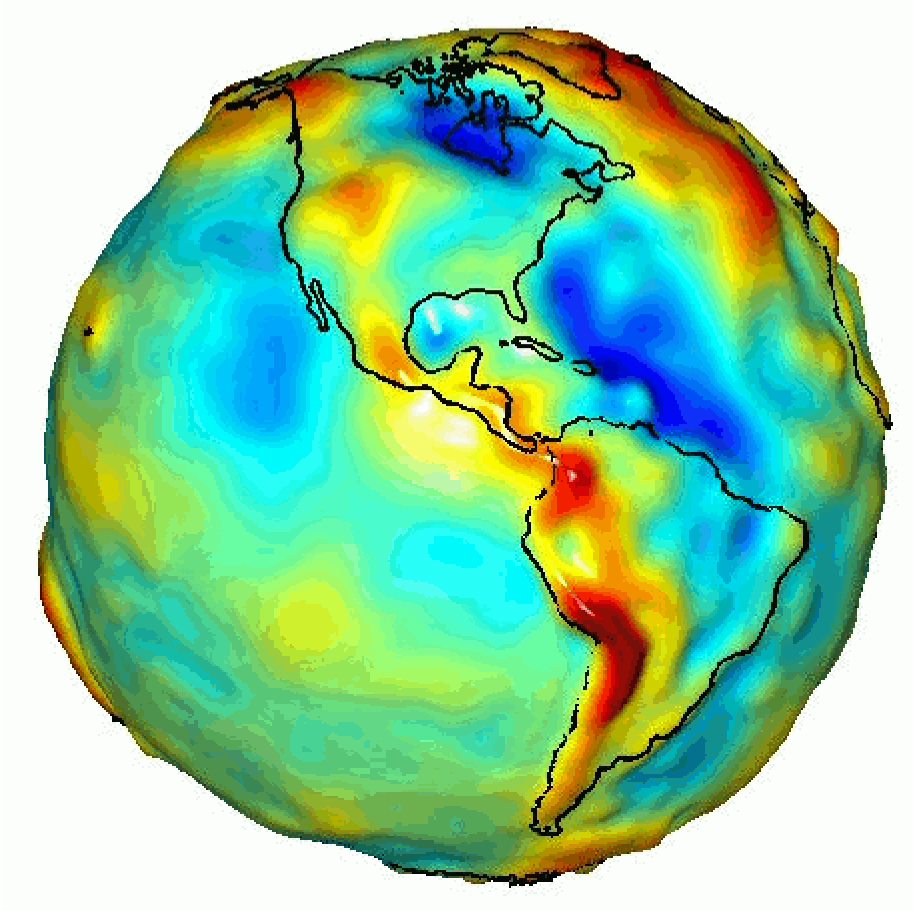
Gravimetrická mapa světa

nerovnoměrné rozložení hmoty ve slupkách
(narušuje pravidelnost pole)





Gravimetrická mapa světa

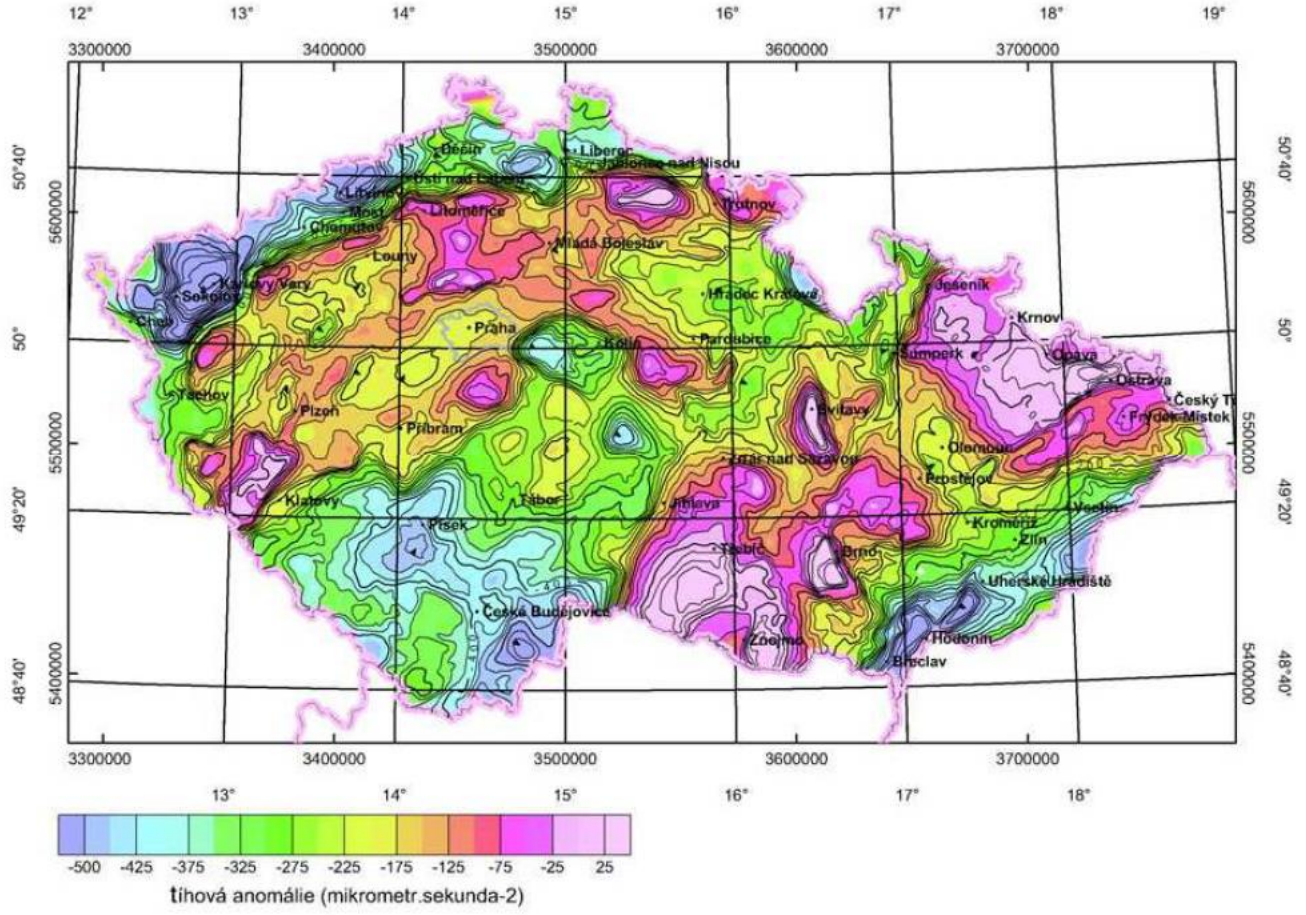


"GRACE globe animation" by NASA/JPL/University of Texas Center for Space Research. –

http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA12146. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons–

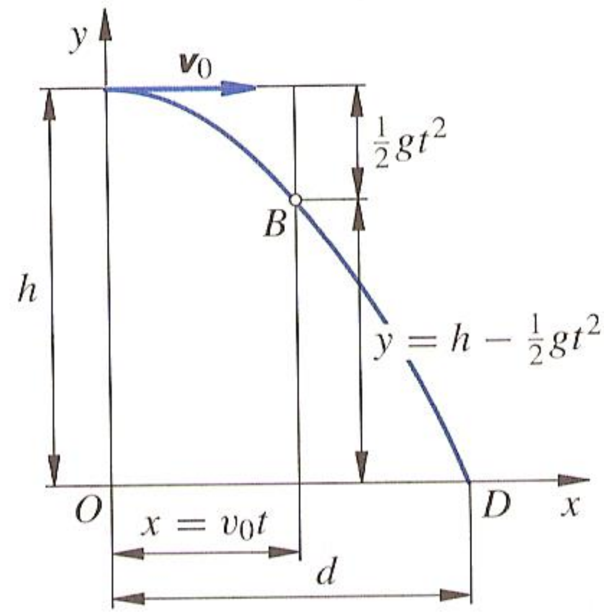
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GRACE_globe_animation.gif#mediaviewer/File:GRACE_globe_animation.gif

Gravimetrická mapa České republiky



https://www.ig.cas.cz/userdata/files/popular/Gravimetricka_mapa.pdf

Pohyb v homogenním poli – vrhy



pohyb v gravitačním poli: $\vec{F} = (0, -mg)$

- pohybové rovnice: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$, $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$
- explicitní formulace: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$
- první integrály: $\dfrac{dx}{dt} = k_1$, $\dfrac{dy}{dt} = -gt + k_2$
- obecné řešení: $x = k_1 t + d_1$, $y = -\dfrac{gt^2}{2} + k_2 t + d_2$
- počáteční podmínky: $\vec{v}(t=0) = (v_{10}, v_{20})$, $\vec{r}(t=0) = (x_{10}, x_{20})$
- porovnáním s poč. podmínkami: $x = v_{10}t + x_{10}$, $y = -\dfrac{gt^2}{2} + v_{20}t + x_{20}$
- vrh vodorovný

$$\vec{v}(t=0) = (v_{10}, 0) = (v_0, 0)$$
$$\vec{r}(t=0) = (0, x_{20}) = (0, h)$$
$$\vec{p}(t=0) = (mv_0, 0)$$

Pohyb v homogenním poli – vrhy

- vrh vodorovný

$$b_z(t=0) = [\vec{r} \times \vec{p}]_z = -mv_0 h$$

$$E_k(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad E_p(t=0) = mgh$$

$$\vec{v}(t) = (v_0, -gt) \qquad \vec{r}(t) = (v_0 t, h - \frac{1}{2} g t^2)$$

$$\vec{p}(t) = (mv_0, -mgt) \qquad b_z(t) = [\vec{r} \times \vec{p}]_z = -\frac{1}{2} m v_0 g t^2 - m v_0 h$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m (v_0^2 + g^2 t^2) \qquad E_p(t) = mg(h - \frac{1}{2} g t^2)$$

$$\vec{J}(t) = \int_0^t \vec{F} dt = (0, -mgt) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0)$$ … impuls tíhové síly roven nárůstu hybnosti

$$M_z(t) = \left[\int_0^t \vec{r} \times \vec{F}\, dt \right]_z = -m v_0 g \int_0^t t\, dt = -\frac{1}{2} m v_0 g t^2 = b_z(t) - b_z(0)$$ … impuls momentu tíhové síly roven nárůstu momentu hybnosti

$$E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} m (v_0^2 + g^2 t^2) + mg(h - \frac{1}{2} g t^2) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = E_k(0) + E_p(0)$$ … ZZME

- celková mechanická energie se zachovává
- hybnost a moment hybnosti se mění působením tíhové síly

Pohyb v homogenním poli – vrhy

- **vrh šikmý**

$$\vec{v}(t=0)=(v_{10},v_{20})=(v_0\cos\alpha,v_0\sin\alpha)$$

$$\vec{r}(t=0)=(0,0)$$

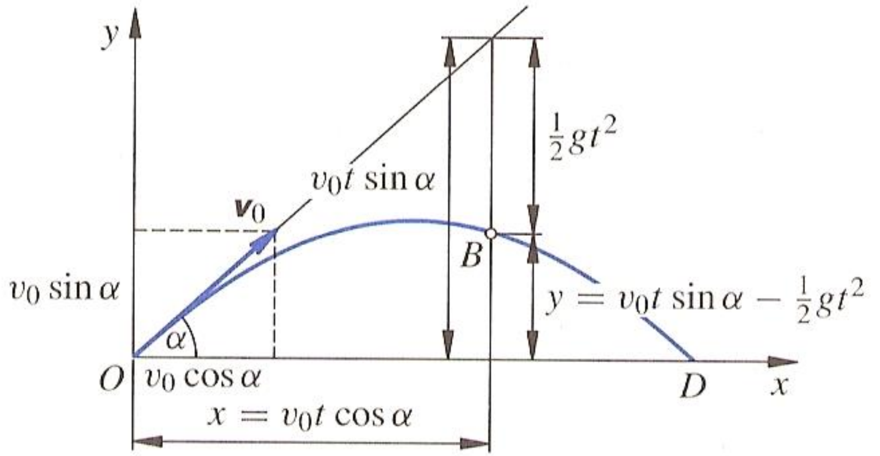
$$\vec{p}(t=0)=(mv_0\cos\alpha,mv_0\sin\alpha)$$

$$\vec{v}(t)=(v_0\cos\alpha,v_0\sin\alpha-gt)$$

$$\vec{r}(t)=(v_0t\cos\alpha,v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2)$$

$$\vec{p}(t)=(mv_0\cos\alpha,mv_0\sin\alpha-mgt)$$

$\vec{J}(t)=\vec{F}t=(0,-mgt)=\vec{p}(t)-\vec{p}(0)$ … impuls tíhové síly roven nárůstu hybnosti



Pohyb v centrálním poli - Keplerova úloha

- centrální pole $\Rightarrow \quad \vec{r} \parallel \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$
- 2. NZ: $\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{b}_0 = \text{konst}$

$\Rightarrow$ zachovává se rovina pohybu vektory $\vec{r}$ a $\vec{v}$ stále ve stejné rovině

- zvolíme kartézskou s.s. tak, že $x_3 = 0 \wedge v_3 = 0$
- pak 2 složky momentu hybnosti: $\begin{cases} b_1 = m(x_2 v_3 - x_3 v_2) = 0 \\ b_2 = m(x_3 v_1 - x_1 v_3) = 0 \end{cases}$
- přejdeme do polárních souřadnic: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_1 = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ v_2 &= \dot{x}_2 = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} v_r = \dot{r} & \ldots\text{radiální složka} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} & \ldots\text{azimutální složka} \end{pmatrix}$$

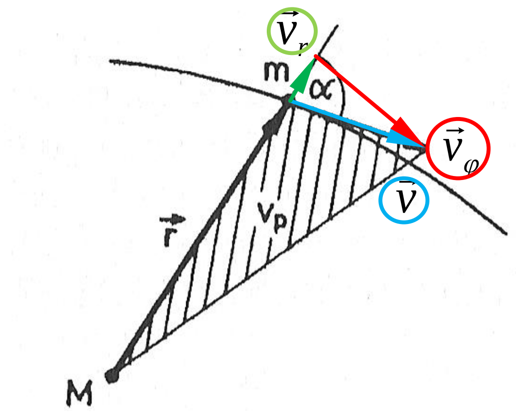
3. složka mom. hybnosti

$$\begin{aligned} b_3 &= m\big(r\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) - r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\big) = \\ &= m\big(r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi - r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi\big) = \\ &= m\big(r^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi\big) = mr^2\dot{\varphi}\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = mr^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

2. Keplerův zákon (zákon ploch)

- velikost momentu hybnosti (tj. velikost jediné jeho nenulové složky) lze nalézt i jednodušeji:

$$b_0 = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mr \underbrace{v \sin\alpha}_{\text{azimutální složka } \vec{v}} = mrv_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

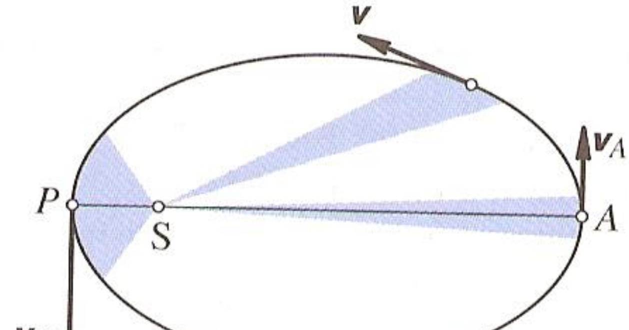


- zavedeme **plošnou rychlost** (viz obrázek)

$$v_p = \frac{rv\sin\alpha}{2} = \frac{1}{2}rv_\varphi = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$$

- vyjádříme v_p pomocí momentu hybnosti a využijeme jeho konstantnosti

$$v_p = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{b_0}{2m} = konst.$$



2. Keplerův zákon (zákon ploch):
Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.

Keplerova úloha – sestavení dif. rovnice

potenciální energie gravitačního pole

$$F = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \qquad F = -\frac{d}{dr} E_p \qquad E_p = -\kappa \frac{Mm}{r} = -\frac{\alpha}{r}$$

ZZME: $\rightarrow$ $$E_0 = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\alpha}{r} = \text{konst}$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 =$$

$$= \dot{r}^2\cos^2\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi =$$

$$= \dot{r}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \dot{r}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi = \dot{r}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$$

$$\rightarrow \qquad E_0 = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\alpha}{r}$$

ZZMH: $\rightarrow$ $$b_0 = mr^2\dot{\varphi} \rightarrow r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{b_0^2}{m^2 r^2}$$

$$\rightarrow \qquad E_0 = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + \frac{b_0^2}{m^2 r^2}\right) - \frac{\alpha}{r} \qquad \rightarrow \qquad \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2 r^2}}$$

Pohyb v centrálním poli – vyloučení času

Derivace inverzní funkce:

nechť inverzní funkce k $y = f(x)$ je $x = g(y)$ a $f'(x) \neq 0$,

pak $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$

- nehledáme závislosti $r(t)$ a $\varphi(t)$
- zajímá nás tvar dráhy, takže nám stačí funkce $r(\varphi)$
- virtuálně zavedeme složenou funkci $r(t(\varphi))$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\dot r} \cdot \underbrace{\frac{dt}{d\varphi}}_{\frac{1}{\dot\varphi}} = \dot r \frac{1}{\underbrace{\dot\varphi}_{\frac{mr^2}{b_0}}} = \dot r \frac{mr^2}{b_0} = \pm \frac{mr^2}{b_0}\sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2 r^2}} = \pm r^2 \sqrt{\frac{2E_0 m}{b_0^2} + \frac{2\alpha m}{r b_0^2} - \frac{1}{r^2}}$$

Dif. rovnice se separovanými proměnnými

- obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
- speciální tvar funkce $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
- řešení pomocí separace proměnných $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
- integrály na obou stranách se rovnají $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

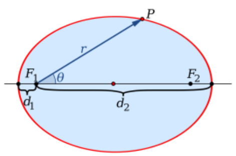
Keplerova úloha – rovnice kuželosečky

$$Q=\frac{2E_0 m}{b_0^2} \quad \wedge \quad p=\frac{b_0^2}{\alpha m} \qquad \to \qquad \frac{dr}{d\varphi}=\pm r^2\sqrt{\frac{2E_0 m}{b_0^2}+\frac{2\alpha m}{r b_0^2}-\frac{1}{r^2}}=\pm r^2\sqrt{Q+\frac{2}{rp}-\frac{1}{r^2}}$$

$$\pm d\varphi=\frac{dr}{r^2\sqrt{Q+\frac{2}{rp}-\frac{1}{r^2}}} \qquad \to \qquad \pm\int d\varphi=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{Q+\frac{2}{rp}-\frac{1}{r^2}}}$$

výpočet primitivní funkce zde neprovádíme; správnost lze ověřit derivováním $\to$

$$\pm\varphi=\arccos\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}{\sqrt{Q+\frac{1}{p^2}}}-C \quad \wedge \quad \sqrt{Q+\frac{1}{p^2}}=\frac{\varepsilon}{p} \qquad \to \qquad \pm\varphi=\arccos\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}-C \quad \to$$



$$\frac{1}{r}=\frac{1+\varepsilon\cos(C\pm\varphi)}{p} \to \quad r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(C\pm\varphi)}$$

toto je <u>polární rovnice kuželosečky</u>

počátek souřadnic leží v ohnisku kuželosečky, úhel $C\pm\varphi$ leží mezi průvodičem a osou kuželosečky, hodnota $\varepsilon=\sqrt{Qp^2+1}$ (číselná excentricita) určuje typ kuželosečky:

1. Keplerův zákon

$\varepsilon > 1$ ... hyperbola $\rightarrow \varepsilon = \sqrt{\dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1} > 1 \rightarrow \dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} > 0 \rightarrow E_0 > 0$

$\varepsilon = 1$ ... parabola $\rightarrow \varepsilon = \sqrt{\dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1} = 1 \rightarrow \dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} = 0 \rightarrow E_0 = 0$

$\varepsilon < 1$ ... elipsa $\rightarrow \varepsilon = \sqrt{\dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1} < 1 \rightarrow \dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} < 0 \rightarrow E_0 < 0$

$\varepsilon = 0$ ... kružnice $\rightarrow \varepsilon = \sqrt{\dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1} = 0 \rightarrow \dfrac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} = -1 \rightarrow E_0 = -\dfrac{\alpha^2 m}{2b_0^2}$

platí-li $E_0 < 0$, představuje odvozená rovnice elipsy 1. Keplerův zákon:
Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku leží Slunce.

3. Keplerův zákon

- součin plošné rychlosti a doby oběhu je roven ploše elipsy

$$T\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \pi ab$$

- využitím 2. KZ dostaneme

$$T\frac{b_0}{2m} = \pi ab \rightarrow T^2\frac{b_0^2}{4m^2} = \pi^2 a^2 b^2$$

- dále víme

$$\frac{b_0^2}{\alpha m} = p = \frac{b^2}{a} \rightarrow b_0^2 = \frac{b^2\alpha m}{a}$$

- spojením dostaneme

$$T^2\frac{1}{4m^2}\frac{b^2\alpha m}{a} = \pi^2 a^2 b^2 \rightarrow T^2\frac{\alpha}{4m} = \pi^2 a^3$$

- po úpravě

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4m\pi^2}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{\kappa M} = \text{konst}}$$

- a to je

<u>3. Keplerův zákon</u>: *Poměr druhých mocnin oběžných dob libovolných dvou planet je roven poměru třetích mocnin velkých poloos jejich drah*.

Ověření výpočtu primitivní funkce

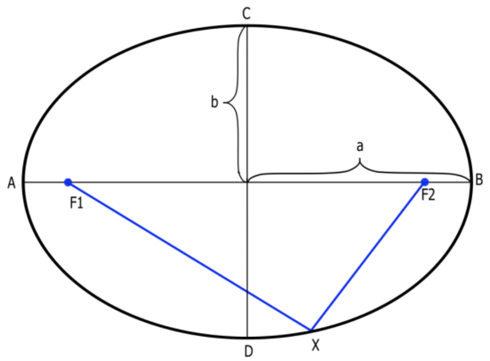
$$\left.\begin{aligned}
&\pm\varphi = \arccos \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}{\sqrt{Q+\frac{1}{p^2}}} - C \\
&\text{substituce:} \\
&x = x(r) = \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}{\sqrt{Q+\frac{1}{p^2}}} \\
&\pm\varphi = \arccos x - C
\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned}
&\pm d\varphi = \frac{d}{dx}(\arccos x - C)\frac{dx}{dr}dr \\
&\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\frac{dx}{dr} = \frac{1}{\sqrt{Q+\frac{1}{p^2}}}\left(-\frac{1}{r^2}\right) \\
&\pm d\varphi = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}{\sqrt{Q+\frac{1}{p^2}}}\right)^2}} \frac{\left(-\frac{dr}{r^2}\right)}{\sqrt{Q+\frac{1}{p^2}}} = \frac{dr}{r^2\sqrt{Q+\frac{2}{rp}-\frac{1}{r^2}}}
\end{aligned}\right.$$

Parametry eliptické dráhy

charakteristiky obecné elipsy:

- číselná excentricita $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, kde a a b jsou delší a kratší poloosa elipsy
- parametr p , pro který platí $p = \frac{b^2}{a}$

pro eliptickou oběžnou dráhu platí vzhledem k užitým substitucím:



- číselná excentricita $\varepsilon = \sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1} \rightarrow \frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} = -\frac{b^2}{a^2}$
- parametr p značil veličinu $\frac{b_0^2}{\alpha m} = p$
- propojením předchozích $\frac{2E_0}{\alpha} = -\frac{1}{a} \rightarrow$ $\boxed{a = -\frac{\alpha}{2E_0} \quad b = \frac{b_0}{\sqrt{-2mE_0}}}$ (připomeňme: $E_0 < 0$)

První a druhá kosmická rychlost

- jednoduché odvození 3.KZ pro kruhové dráhy (poloměr = velká poloosa)
- gravitační síla tvoří sílu dostředivou:

$$m\omega^2 r = \kappa \frac{Mm}{r^2} \rightarrow \left.\begin{aligned} \omega^2 &= \kappa \frac{M}{r^3} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \kappa \frac{M}{r^3} \rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}}$$

první kosmická rychlost

- rychlost pohybu po kruhové dráze v blízkosti povrchu Země
- stejná rovnice jako prve, jen vyjádříme oběžnou rychlost $v_I = \omega R_Z$ na povrchu Země

$$\frac{m v_I^2}{R_Z} = \kappa \frac{M_Z m}{R_Z^2} \rightarrow v_I = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}}$$, pro Zemi $v_I = 7.9$ km/s

druhá kosmická rychlost

- rychlost, kterou má těleso pohybující se po parabolické dráze v perigeu
- je-li pomalejší, pohybuje se po elipse, je-li rychlejší, pohybuje se po hyperbole
- celková energie pro parabolickou dráhu je nulová; ZZME:

$$E_0 = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \kappa \frac{Mm}{r} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m v_{II}^2 - \kappa \frac{M_Z m}{R_Z} = 0 \rightarrow v_{II} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}}$$

pro Zemi $v_{II} = 11.2$ km/s