Cvičení z Kalkulu 2
Zimní semestr

1. cvičení

1. Ukažte, že daná rovnice určuje v jistém okolí bodu $M = (m_1, m_2)$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(m_1)$ a $\varphi'(m_1)$.
   (i) $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$, $M = (0, 1)$
   (ii) $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$, $M = (0, 1)$
   (iii) $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$, $M = (1, 1)$
   (iv) $x^y + y^x = 2y$, $M = (1, 1)$
   (v) $\cos(x + y^2) + \sin(x^2 + y) = 1$, $M = (-1, -1)$
   (vi) $\log(x + y^3) + e^{x+2y} = 1$, $M = (2, -1)$
2. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje v jistém okolí bodu (π, π) implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě (π, π).

Výsledky: 1. (i) $\varphi'(0) = 2$, $\varphi''(0) = -14$, (ii) $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 2$, (iii) $\varphi'(1) = -1$, $\varphi''(1) = -\frac{2}{3}$, (iv) $\varphi'(1) = 1$, $\varphi''(1) = 4$, (v) $\varphi'(-1) = 2$, $\varphi''(-1) = 7$, (vi) $\varphi'(2) = -\frac{2}{5}$, $\varphi''(2) = \frac{24}{125}$
2. $y = \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}$

2. cvičení

1. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí:
   (i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
   (ii) $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$
   (iii) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$
   (iv) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$
   (v) $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$
   (vi) $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$
2. Určete, zda jsou následujíci množiny kompaktní:
   (i) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 1\}$
   (ii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$
   (iii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 5y^2 \leq 3\}$
   (iv) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^6 \leq y^6\}$
   (v) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5,\ y > 0\}$
   (vi) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0\}$
   (vii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\}$

Výsledky: 1. (i) $(1, 1)$ – ostré lokální minimum, (ii) $(0, 2)$ – ostré lokální minimum, (iii) není extrém, (iv) neostré lokální minimum na množině $\{(x, y) : y = x + 1\}$, (v) není extrém, (vi) $(0, 0)$ – ostré lokální minimum, $(-5, 0)$ – ostré lokální maximum
2. (i) ano, (ii) ne, (iii) ano, (iv) ne, (v) ne, (vi) ano, (vii) ne

3. cvičení

1. Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M:
   (i) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$
   (ii) $f(x, y) = xy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x^2 + y^2 = 6\}$
   (iii) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$
   (iv) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$, $M = [-1, 1]^2$
   (v) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y \leq 4\}$
   (vi) $f(x, y) = x^4y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^4 + y^4 \leq 16,\ x \geq -1\}$
   (vii) $f(x, y) = 2x + 4y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$
   (viii) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-2x^2-y^2}$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

Výsledky: 1. (i) maximum 2 v bodech $(1,1)$, $(-1,-1)$, minimum $\frac{1}{2}$ v bodech $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; (ii) maximum $\sqrt{3}$ v bodech $(1,\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$, minimum $-\sqrt{3}$ v bodech $(-1,\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$; (iii) maximum 11 v bodě $(\frac{9}{5},\frac{13}{5})$, minimum 1 v bodě $(\frac{1}{5},\frac{7}{5})$; (iv) maximum 3 v bodě $(0,1)$, minimum -3 v bodě $(0,-1)$; (v) maximum 40 v bodě $(4,4)$, minimum 4 v bodě $(0,0)$; (vi) maximum $\frac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ v bodě $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}},\frac{2}{\sqrt[4]{5}})$, minimum $-\frac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ v bodě $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}},-\frac{2}{\sqrt[4]{5}})$; (vii) maximum 4v bodě $(0,1)$, minimum 0 v bodě $(0,0)$; (viii) maximum $\frac{7}{4}e^{-\frac{1}{4}}$ v bodech $(0,\frac{1}{2})$, $(0,-\frac{1}{2})$, minimum 0 v bodě $(0,0)$

4. cvičení

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:
   (i) $f_n(x) = \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2}$
   (ii) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$
   (iii) $f_n(x) = \frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}$
2. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí:
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$
   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$
3. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a spočtěte $f'(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

4. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$$

je spojitá na $[-1,1]$ a spočtěte $f'(1/2)$.

Výsledky: 1. (i) konverguje stejnoměrně k funkci $f(x) = x$ na $\mathbb{R}$; (ii) f_n konverguje bodově k 0 na $(-1,1]$, konvergence není stejnoměrná; (iii) f_n konverguje bodově k 1 na $\mathbb{R}$, konvergence není stejnoměrná; 2. (i) konverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$; (ii) konverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$; (iii) konverguje bodově na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, konvergence není stejnoměrná; 3. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos nx}{2^n}$; 4. $f'(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n^2-4}{(4n^2+1)^2}$

5. cvičení

1. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence následujících řad:
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n+20}x^n$
   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$
   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$
   (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$
   (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$, $a,b>0$
2. Sečtěte následující řady:
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
   (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
   (iii) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$
   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^2+n}x^{2n+1}$
3. Vyjádřete funkci $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ jako mocninnou řadu o středu 0.

Výsledky: 1. (i) konverguje absolutně pro $x \in [-1,1]$, diverguje pro $|x| > 1$; (ii) konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$, jinak diverguje; (iii) $p > 1$: konverguje absolutně pro $x \in [-1,1]$, jinak diverguje; $p \in (0,1]$: konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$, konverguje neabsolutně pro $x = -1$, jinak diverguje; $p \leq 0$: konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$, jinak diverguje; (iv) konverguje absolutně pro $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, jinak diverguje; (v) konverguje absolutně pro $x \in (-4,4)$, jinak diverguje; (vi) konverguje absolutně pro $x \in (-\max\{a,b\}, \max\{a,b\})$, jinak diverguje; 2. (i) $-\log(1-x)$, $x \in [-1,1)$; (ii) $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$; (iii) $\frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1,1)$; (iv) $-2x - x\log(1+x^2) + 2\arctan x$, $x \in [-1,1]$; 3. $f(x) = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $x \in (-1,1)$

6. cvičení

1. Určete, zda následující Lebesgueovy integrály existují a zda jsou konvergentní.
   (i) $\int_0^1 \frac{1}{\sin^p x}\,dx$, $p \in \mathbb{R}$
   (ii) $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2-1}\,dx$
   (iii) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^p}\,dx$, $p \in \mathbb{R}$
   (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\,dx$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$
   (v) $\int_0^\pi \frac{\cos\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$

Výsledky: 1. (i) existuje vždy, konverguje pro $p < 1$; (ii) existuje, ale nekonverguje; (iii) existuje vždy, konverguje pro $p \in (1,2)$; (iv) existuje vždy, konverguje pro $p > -1$, $q > -1$; (v) konverguje

7. cvičení

1. Spočtěte $\lambda^2(M)$ pro následující množiny M:
   (i) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 < y < 2x+3\}$
   (ii) M je omezená křivkami $2x - y = 0$, $2x - y - 7 = 0$, $x - 4y + 7 = 0$, $x - 4y + 14 = 0$.
2. Spočtěte následující integrály:
   (i) $\int_M xy^2 d\lambda^2(x,y)$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y - 1 \geq 0\}$
   (ii) $\int_M y d\lambda^2(x,y)$, M je omezená křivkami $x^2 - y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$
   (iii) $\int_M e^{-(x+y)} d\lambda^2(x,y)$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y\}$
3. Spočtěte $\lambda^3(M)$, kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$.
4. Spočtěte integrál $\int_M x d\lambda^3(x,y,z)$, kde M je množina omezená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$, $x + z = 2$.
5. Spočtěte integrál $\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} dxdy$.

Výsledky: 1. (i) $\frac{32}{3}$; (ii) 7; 2. (i) $\frac{1}{20}$; (ii) $\frac{81}{5}$; (iii) $\frac{1}{2}$; 3. $\frac{1}{6}$; 4. 4; 5. $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$

8. cvičení

1. Spočtěte následující integrály:
   (i) $\int_M e^{-x^2-y^2} d\lambda^2(x,y)$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (ii) $\int_M (x^2 + y^2) d\lambda^2(x,y)$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$
   (iii) $\int_M \frac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} d\lambda^2(x,y)$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq e,\ y \geq 0\}$
2. Spočtěte $\lambda^3(M)$ pro následující množiny M:
   (i) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x > 0,\ z \in (-1,1),\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (ii) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$
   (iii) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$
3. Spočtěte následující integrály:
   (i) $\int_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d\lambda^3(x,y,z)$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$
   (ii) $\int_M \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda^3(x,y,z)$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
   (iii) $\int_M \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} d\lambda^3(x,y,z)$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$

Výsledky: 1. (i) $\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})$; (ii) $\frac{39}{2}\pi$; (iii) $\frac{\pi}{4}$; 2. (i) π; (ii) $\frac{16}{3}\pi$; (iii) $\frac{32}{3}\pi$; 3. (i) $\frac{\pi}{8}$; (ii) $\frac{4}{15}\pi$; (iii) $\frac{13}{3}\pi$

9. cvičení

1. Spočítejte hodnotu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu $\int_M f\,d\varphi$ pro danou množinu M a dané funkce f, φ:

(i) $M=[0,3]$, $f(x)=x^2+1$, $\varphi(x)=\lfloor x\rfloor$

(ii) $M=[2,3]$, $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=\chi_{[2,\infty)}(x)$

(iii) $M=[0,\infty)$, $f(x)=e^x$, $\varphi(x)=(3-e^{-2x})\chi_{[0,\infty)}(x)$

(iv) $M=[1,3]$, $f(x)=\begin{cases}x & x\neq 2\\ 1 & x=2\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases}$

(v) $M=[0,3)$, $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ x^2-2x+2 & x\in[1,2)\\ 3 & x=2\\ x+2 & x>2\end{cases}$

(vi) $M=[0,5]$, $f(x)=e^x$, $\varphi(x)=x+[x]$

(vii) $M=[1,5]$, $f(x)=\lfloor x\rfloor x$, $\varphi(x)=\begin{cases}6x-12 & x<2\\ 1 & x=2\\ x & x\in(2,3]\\ 3x^2-12 & x>3\end{cases}$

(viii) $M=[-2,2]$, $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leq -1\\ 1 & x\in(-1,0)\\ 100 & x=0\\ -x^2+7 & x>0\end{cases}$, $\varphi(x)=\lfloor 2x\rfloor-2x$

Výsledky: 1. (i) 18; (ii) 4; (iii) 4; (iv) 4; (v) $\frac{109}{6}$; (vi) $e+e^2+e^3+e^4+2e^5$; (vii) 840; (viii) $\frac{292}{3}$

10. cvičení

1. Spočtěte následující limity:

(i) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{1000}\frac{e^{x^3}}{1+nx}dx$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$

(iv) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin 5x}{x}dx$

(v) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^{15}\sin(\frac{x^2}{n})dx$

(vi) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2}dx$

Výsledky: 1. (i) 0; (ii) 0; (iii) 0; (iv) 0; (v) $\frac{1}{18}$; (vi) 0

11. cvičení

1. Vyjádřete následující integrály jako součet řady.

(i) $\int_0^\infty \log\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$

(ii) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx$

(iii) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx$

(iv) $\int_0^1 \log\frac{1}{1-x}\,dx$

(v) $\int_0^1 \frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}\,dx$

(vi) $\int_0^1 \frac{x^p\log x}{1+x^2}\,dx$, $p>0$

(vii) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx$, $p,\,q>0$

Výsledky: 1. (i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{-1+(-1)^n}{n^2}$; (ii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; (iii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$; (iv) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$; (v) $\sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(2n+1)^2}$; (vi) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+p+1)^2}$; (vii) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+qn}$

12. cvičení

1. Určete definiční obor následujících funkcí a dokažte, že jsou tyto funkce na svém definičním oboru spojité.

(i) $F(a)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$

(ii) $F(a)=\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)}{x^2}\,dx$

(iii) $F(a)=\int_0^\infty \frac{x}{2+x^a}\,dx$

(iv) $F(a)=\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,dx$

2. Spočtěte následující integrály:

(i) $\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin ax}{x}\,dx$, $a\in\mathbb{R}$

(ii) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx$, $a\in(-1,\infty)$

(iii) $\int_0^\infty \frac{\arctan ax-\arctan x}{x}\,dx$, $a\in(0,\infty)$

(iv) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$, $a\in(0,\infty)$

Výsledky: 1. (i) $(0,1)$; (ii) $\mathbb{R}$; (iii) $(2,\infty)$; (iv) $(1,\infty)$; 2. (i) $\arctan a$; (ii) $\frac{1}{2}\log(a+1)$; (iii) $\frac{\pi}{2}\log a$; (iv) $\sqrt{\pi}-\sqrt{a\pi}$