Lineární algebra I (pro fyziky)

Lineární zobrazení

Dalibor Šmíd

MFF UK

Nechť V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ a $f, g : V \to W$ dvě lineární zobrazení. Pak zobrazení $f + g : V \to W$ definované předpisem

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$$

je také lineární zobrazení. Pro $r \in \mathbb{F}$ je $rf : V \to W$ definované

$$(rf)(v) := rf(v)$$

také lineární. Pokud $B = (v_1, \ldots, v_n)$ je báze V, $C = (w_1, \ldots, w_m)$ je báze W, pak

$$[f+g]_B^C = ([f(v_1)+g(v_1)]^C \mid \ldots \mid [f(v_n)+g(v_n)]^C) = [f]_B^C+[g]_B^C,$$

tedy reprezentace součtu lineárních zobrazení je součet reprezentací. Podobně

$$[rf]_B^C = ([rf(v_1)]^C \mid \ldots \mid [rf(v_n)]^C) = r[f]_B^C$$

Je-li U další vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $D = (u_1, \ldots, u_p)$ jeho báze a $h : U \to V$ lineární zobrazení, pak je $f \circ h : U \to W$ také lineární zobrazení. Nechť $u \in U$. Pak

$$[(f \circ h)(u)]^C = [f(h(u))]^C = [f]_B^C \; [h(u)]^B = [f]_B^C \; [h]_D^B \; [u]^D$$

Musí být tedy

$$[f \circ h]_D^C = [f]_B^C \; [h]_D^B,$$

neboli reprezentace složeného zobrazení $f \circ h$ je rovna součinu matic reprezentujících f a h. Speciálně odtud plyne

$$[f]_{B'}^{C'} = [\mathrm{Id} \circ f \circ \mathrm{Id}]_{B'}^{C'} = [\mathrm{Id}]_C^{C'} \; [f]_B^C \; [\mathrm{Id}]_{B'}^B,$$

kde C' je nějaká další báze W a B' je nějaká další báze V.

Příklad

V minulé přednášce jsme měli zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ s reprezentacemi

$$[F]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad [F]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $B = ((1,2)^T, (1,3)^T)$, $C = ((1,1,0)^T, (1,0,0)^T, (1,0,1)^T)$. Protože

$$[\mathrm{Id}]_C^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{Id}]_{K_2}^B = \left([\mathrm{Id}]_B^{K_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

můžeme ověřit $[\mathrm{Id}]_C^{K_3}\ [F]_B^C\ [\mathrm{Id}]_{K_2}^B = [F]_{K_2}^{K_3}$ dosazením:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineárnímu zobrazení $f : V \to W$ se říká také *homomorfismus vektorových prostorů* V *a* W. Zobrazení, pro které $V = W$, tedy se stejným zdrojovým a cílovým prostorem, se nazývá *endomorfismus vektorového prostoru* V. Pokud B, B' jsou dvě báze V, označme

- $R := [\mathrm{Id}]^{B}_{B'}$ matici přechodu od B k B'
- $A := [f]^{B}_{B}$ *matici endomorfismu vzhledem k bázi* B.
- $A' := [f]^{B'}_{B'}$ matice endomorfismu vzhledem k bázi B'.

Pak dostáváme *transformační formuli pro matici endomorfismu*:

$$A' = [f]^{B'}_{B'} = [\mathrm{Id}]^{B'}_{B}[f]^{B}_{B}[\mathrm{Id}]^{B}_{B'} = R^{-1}AR$$

Dvě matice A', A, pro něž existuje regulární matice R taková, že $A' = R^{-1}AR$, se nazývají *podobné*. Podobnost je relace ekvivalence ♣. Charakterizovat třídy této ekvivalence je poměrně komplikované a dostaneme se k tomu v letním semestru.

Připomeňme z minula, že

- bijektivní homomorfismus z V do W se nazývá izomorfismus
- f je izomorfismus, právě když je jeho reprezentace vzhledem k nějakým dvěma bázím regulární matice
- izomorfismus převádí bázi ve V na bázi ve W

Složení dvou izomorfismů je izomorfismus, stejně tak inverzní zobrazení k izomorfismu existuje a je izomorfismem ♣. Dva vektorové prostory, mezi nimiž existuje izomorfismus, se nazývají *izomorfní*. Izomorfnost je také relace ekvivalence ♣. Charakterizovat třídy této ekvivalence je jednoduché a dostaneme se k tomu hned:

Věta

Dva vektorové prostory V, W nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze jsou izomorfní, právě když mají stejnou dimenzi.

Důkaz.
Existuje-li izomorfismus $f : V \to W$ a $(v_1, \dots, v_n)$ je báze V, pak $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je báze W. Tedy $\dim V = \dim W$. Pokud naopak $\dim V = \dim W =: n$, pak zvolme bázi B ve V, bázi C ve W a označme

$$g := [\ \ ]^B : V \to \mathbb{F}^n$$
$$h := [\ \ ]^C : W \to \mathbb{F}^n$$

Protože g i h jsou izomorfismy, jsou izomorfismem i zobrazení

$$h^{-1} : \mathbb{F}^n \to W$$
$$h^{-1} \circ g : V \to W$$

Tedy V a W jsou izomorfní. $\square$

Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Množina všech homomorfismů z V do W je vektorový prostor s operacemi součtu homomorfismů a násobení homomorfismu skalárem z $\mathbb{F}$ ♣, značí se $\mathrm{Hom}(V, W)$.

VĚTA
Pokud $\dim V = n$ *a* $\dim W = m$*, pak* $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = mn$*.*

DŮKAZ.
Zvolme ve V bázi B a v W bázi C. Zobrazení

$$[\ \ ]_B^C : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathbb{F}^{m \times n},$$

které přiřazuje homomorfismu f jeho reprezentaci $[f]_B^C$, je lineární a bijektivní, tedy izomorfismus. Protože prostor $\mathbb{F}^{m \times n}$ má bázi z matic E_{ij} o mn prvcích, je $\dim \mathbb{F}^{m \times n} = mn$ a tedy také $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = mn$. □

Vektorový prostor všech endomorfismů prostoru V se místo $\mathrm{Hom}(V, V)$ častěji značí symbolem $\mathrm{End}(V)$, $\dim \mathrm{End}(V) = n^2$.

Prostý homomorfismus se označuje slovem *monomorfismus*, pokud je na, pak mu říkáme *epimorfismus*.

Věta

Nechť V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ je báze V a $M = (w_1, \ldots, w_n)$ posloupnost vektorů ve W. Pak existuje právě jeden $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ takový, že

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad \ldots, \quad f(v_n) = w_n$$

Navíc f je monomorfismus, právě když M je LN a f je epimorfismus, právě když M generuje W.

Důkaz.

Je-li $v \in V$, $\mathbf{x} := [v]^B$, pak definujme $f(v) := \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$. Důkaz, že f je homomorfismus ♣, stejně tak důkaz jednoznačnosti a ekvivalentní podmínky mono-/epimorfismu. $\square$

V následující větě nemusíme předpokládat, že vektorové prostory mají konečnou dimenzi.

Věta

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Platí

1. *f je monomorfismus, právě když $\mathrm{Ker}\, f = 0$*
2. *f je epimorfismus, právě když $\mathrm{Im}\, f = W$*
3. *Jsou-li f, g monomorfismy, pak je $f \circ g$ monomorfismus.*
4. *Jsou-li f, g epimorfismy, pak je $f \circ g$ epimorfismus.*
5. *Je-li $f \circ g$ monomorfismus, je g monomorfismus.*
6. *Je-li $f \circ g$ epimorfismus, je f epimorfismus.*

Důkaz.

Pokud pro $v_1, v_2 \in V$ platí $f(v_1) = f(v_2)$, je $f(v_1 - v_2) = 0$ a tedy $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\, f$. Tedy $\mathrm{Ker}\, f = 0$ znamená, že $v_1 = v_2$, čili f je monomorfismus. Naopak pokud f je monomorfismus, nemůže být vzorem o_W jiný vektor než o_V, tedy $\mathrm{Ker}\, f = 0$. Dále ♣. $\square$

Věta (O dimenzi jádra a obrazu)

Nechť V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Pak

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

Důkaz.

Argumentace je jednodušší, pokud předpokládáme, že $\dim W < \infty$. Zvolíme-li bázi B ve V a bázi C ve W, pak

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim [\operatorname{Ker} f]^B = \dim \operatorname{Ker} [f]^C_B$$
$$\dim \operatorname{Im} f = \dim [\operatorname{Im} f]^C = \dim \operatorname{Im} [f]^C_B$$

Protože n je rovno počtu sloupců matice $[f]^C_B$, plyne tvrzení z věty o hodnosti a nulitě pro tuto matici. $\square$

Dimenzi $\operatorname{Ker} f$ nazýváme *nulitou homomorfismu* f, značíme $n(f)$. Dimenzi $\operatorname{Im} f$ nazýváme *hodností homomorfismu* f, značíme $\operatorname{rank}(f)$. Předchozí věta se tedy dá nazývat i větou o hodnosti a nulitě homomorfismu. Plyne z ní

TVRZENÍ

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze, $f \in \operatorname{End}(V)$. Je-li f mono- nebo epimorfismus, pak už musí být i izomorfismem.

DŮKAZ.

Pokud f je monomorfismus, je $\operatorname{Ker} f = 0$, tedy $n(f) = 0$. Pak ale $\operatorname{rank}(f) = n$, tedy $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$. Musí být proto $\operatorname{Im} f = V$, neboli f je epimorfismus a tudíž i izomorfismus. Pokud f je epimorfismus, má důkaz tytéž kroky, jen v opačném pořadí. $\square$

Izomorfismus $f \in \operatorname{End}(V)$ se nazývá *automorfismem* prostoru V.