Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
19. 9. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky, mobily či jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$
kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci, též značenou e^x.
   (a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ je funkce f spojitá? Pokud je v nějakém bodě nespojitá, je v tomto bodě aspoň spojitá zleva nebo zprava?
   (b) [3 b.] Určete, v kterých bodech má funkce f (vlastní či nevlastní) derivaci. Pokud v nějakém bodě derivaci nemá, určete zda má aspoň (vlastní či nevlastní) jednostranné derivace.
   (c) [4 b.] Najděte všechny body, v nichž f nabývá extrém, a určete, o jaký druh extrému se jedná (zda globální nebo jen lokální, zda minimum nebo maximum). Určete i limity f pro $x \to +\infty$ a $x \to -\infty$.

2. (a) [3 b.] Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Napište formálně, co znamená, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $+\infty$.
   (b) [4 b.] Nechť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodněte, zda jsou následující dvě tvrzení (A) a (B) ekvivalentní, případně zda aspoň platí, že některé z těch tvrzení implikuje to druhé:
   (A) Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $+\infty$.
   (B) Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí $b_n < b_{n+1}$.
   (c) [3 b.] Definujme posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem $c_n = \frac{\sqrt{n}}{n+(-2)^n}$. Rozhodněte, zda má tato posloupnost limitu, případně určete její hodnotu.

3. (a) [3 b.] Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nemusíte ji dokazovat.
   (b) [4 b.] Mějme kladné číslo $\varepsilon > 0$ a funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci splňující $f'(x) > \varepsilon$. Dokažte, že
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
   (c) [3 b.] Ukažte, že v předchozím podpříkladu nelze předpoklad $f'(x) > \varepsilon$ nahradit předpokladem $f'(x) > 0$. Jinými slovy, najděte příklad funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ kladnou derivaci, ale neplatí pro ni, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4. (a) [3 b.] Napište, jak se definuje součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vysvětlete, co znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentní.*
   (b) [3 b.] Uveďte příklad posloupnosti čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro niž platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a zároveň $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.
   (c) [4 b.] Zformulujte, co říká integrální kritérium konvergence řad. Nemusíte ho dokazovat.