I. MECHANIKA

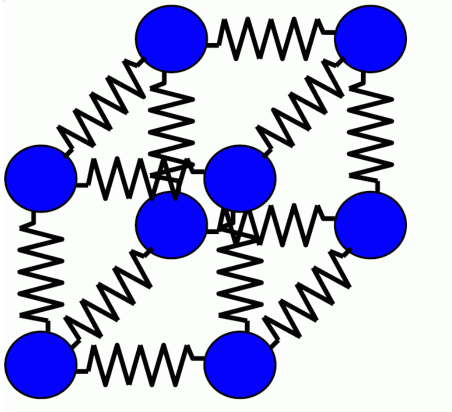
6. Kmity a vlnění II

Obsah

- Pojem vlny, příčné a podélné vlnění, polarizace.
- Vlnová rovnice, operátory.
- Popis vlnění (fázová rychlost, vlnová délka, frekvence).
- Rychlost vlny na struně, rychlost vlny v tenké tyči, rychlost zvuku.
- Harmonická vlna.
- Rovinná vlna, kulová vlna.
- Princip superpozice.
- Interference.
- Stojaté vlnění (vlastní módy, uzly, kmitny).
- Chladniho obrazce.
- Grupová rychlost.
- Přenos energie, intenzita vlny.
- Huygensův princip, vlnoplochy, lom vlnění, odraz, totální odraz, difrakce.
- Dopplerův jev (princip, využití).

Mechanické vlnění

- vlnění – šíření rozruchu prostorem – postupná vlna
- rozruch – změna fyzikální veličiny – mechanická výchylka, deformace, změna hustoty, tlaku, teploty, silového pole
- částice kmitají kolem rovnovážných poloh
- nešíří se částice, nepřemisťuje se hmota
- zdroj – kmitající systém – vazba (viz vázané oscilátory) → přenáší se energie i hybnost

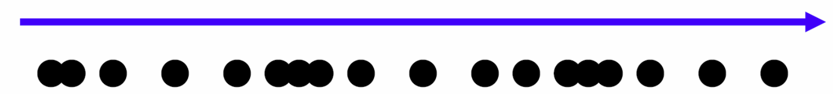


- nejjednodušší případ - částice kmitají se stejnou periodou a amplitudou, nekmitají synchronně – fázové zpoždění úměrné vzdálenosti od zdroje
- vlny se šíří konečnou rychlostí
- typy vlnění
    - mechanické – v látkovém prostředí v důsledku elastických vazeb
    - elektromagnetické – není třeba hmotné prostředí
    - kvantové (de Broglieovy)
    - gravitační

http://phet.colorado.edu/sims/wave-on-a-string/wave-on-a-string_en.html

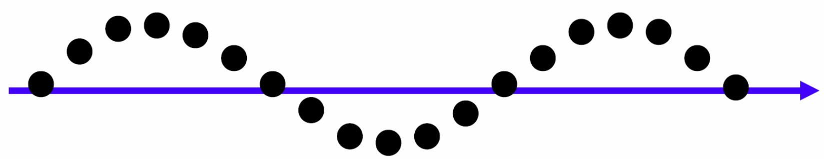
Příčné a podélné vlnění. Polarizace.

2 základní typy vlnění



<u>podélné (longitudinální)</u>

- kmity ve směru šíření vlny
- šíří se zhuštění a zředění
- jen normálová napětí → elastické vlny v pevných látkách , kapalinách i plynech



<u>příčné (transverzální)</u>

- kmity kolmo ke směru šíření vlny
- šíří se vrch a důl
- nutná i tečná napětí → příčné vlny v pevných látkách , dále elmg. vlnění

<u>polarizace</u>

- jen příčné vlny
- všechny kmity v jedné rovině
- 2 směry polarizace – 2 nezávislé vlny
- zpravidla se šíří stejnou rychlostí, lišit se mohou fázovým zpožděním (lineární polarizace, kruhová polarizace)
- nepolarizovaná vlny – kmity ve všech směrech

Popis vlnění. Obecná vlna

závislost výchylky (může jít o skalární i vektorovou veličinu) na čase a souřadnici $u(x,t)$
obecná funkce času a souřadnice (c ... rychlost šíření vlny)

<u>časový pohled</u>

$f(t)$ $\longrightarrow$ $f(t-\Delta t)$

$x=0$ $\qquad$ $x=x_0$

- pro pevné x_0 je výchylka funkcí času
- pro počátek zavedeme $u(0,t)=f(t)$
- výchylka v bodě x_0 začne oproti počátku později o čas $\Delta t = x_0/c$, takže $u(x_0,t)=f(t-\Delta t)$
- pro pohyb ve/proti směru osy x $\qquad u(x_0,t)=f\left(t\mp\frac{x_0}{c}\right)$

<u>prostorový pohled</u>

$g(x)$ $\longrightarrow$ $g(x-\Delta x)$

$t=0$ $\qquad$ $t=t_0$

- pro pevné t_0 je výchylka funkcí souřadnice
- pro čas nula zavedeme $u(x,0)=g(x)$
- do bodu x v čase t_0 dospěje zvlnění ze vzdálenosti $\Delta x = c\,t_0$, takže $u(x,t_0)=g(x-\Delta x)$
- pro pohyb ve/proti směru osy x $\qquad u(x,t_0)=g(x\mp ct_0)$
- vzájemný vztah pro lib. x a t dostanu $\qquad u(x,t)=f\left(t\mp\frac{x}{c}\right)=f\left[\mp\frac{1}{c}(\mp ct+x)\right]=g(x\mp ct)$

čas a souřadnice se vyskytují jen v těchto kombinacích

Pozn: dále budeme upřednostňovat souřadnice a čas v kombinaci $x\mp ct$, kde směr šíření vlny nemění význam prostorové souřadnice

Vlnová rovnice – odvození

- vlnění musí splňovat $u = f(x \mp ct) = f(s)$, kde $s = x \mp ct$
- v homogenním prostředí je rychlost c konstantní
- první derivace podle obou proměnných

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{ds} \cdot \underbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}_{1} = \underbrace{\frac{df}{ds}}_{f'} = f' \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{ds} \cdot \underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{\mp c} = \mp c \underbrace{\frac{df}{ds}}_{f'} = \mp c f'$$

- druhá derivace podle obou proměnných

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \underbrace{\frac{df'}{ds}}_{f''} \cdot \underbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}_{1} = f'' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{\mp c} = \mp c \underbrace{\frac{d}{ds}\left(\mp c f'\right)}_{\mp c f''} = c^2 f''$$

- porovnáním dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{, resp.} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ nebo } \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

- stejná rovnice platí pro oba směry pohybu vlny $\Rightarrow$ obecné řešení $u = f(x - ct) + g(x + ct)$
- J. d'Alembert (Francie, 1717 - 1783)

Vlnová rovnice - vlastnosti

- lineární homogenní parciální dif. rce 2. řádu $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
- rovnice hyperbolického typu
- lineární – funkce a její derivace pouze v lineárních kombinacích
- homogenní – s nulovou pravou stranou $\Rightarrow$ je-li u_1 řešením, pak je řešením také $u_2 = \text{konst.}\, u_1$
- lineární homogenní dif. rce – pokud u_1 a u_2 jsou lineárně nezávislá řešení, pak je řešením také jejich lineární kombinace $au_1 + bu_2$

Důkaz: $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \;,\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$0 = a\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right) + b\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(au_1 + bu_2) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(au_1 + bu_2)$$

toto je důležité pro superpozici vlnění

Vlnová rovnice pro trojrozměrný případ

rozšíření pro 3D $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

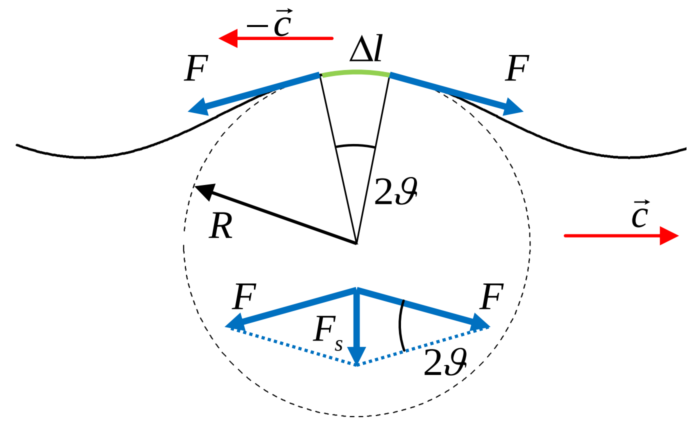
jiné zápisy levé strany: $$\nabla\cdot\nabla u=\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\nabla^2 u=\Delta u=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

obecné d'Alembertovo řešení: $u=f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)+g(\vec{n}\cdot\vec{r}+ct)$, kde $\vec{n}$ je směr šíření vlnění

předp., že v rovnici $c^2\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ představuje u mechanickou výchylku, pak

- pravá strana je zrychlení působící na element jednotkové hmotnosti
- levá strana podle 2.NZ rovna síle působící na element jednotkové hmotnosti
- vlnová rovnice pak představuje dynamický zákon (skutečně ji lze odvodit např. pro elastické nebo tekuté prostředí z pohybových zákonů)
- každá rovnice tohoto tvaru popisuje nějaké vlnění, konstanta c určuje jeho (fázovou) rychlost
- platnost vlnové rovnice je daleko širší než pouze v oblasti mechanických kmitů, lze ji odvodit také pro veličiny elmg. pole nebo gravitačního pole

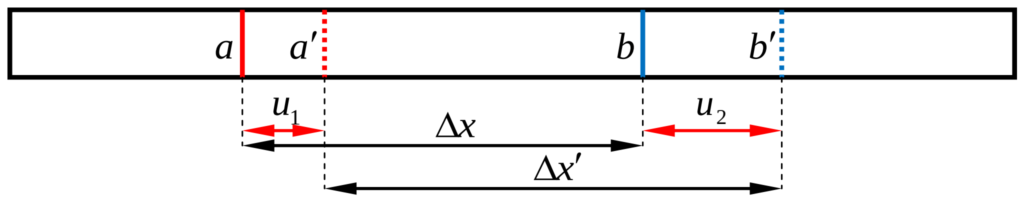
Rychlost vlny na struně



- příčnou vlnu popisujeme pomocí oskulační kružnice putující po struně rychlostí c
- v s.s. spojené s pulsem se element struny (délky Δl) sune po obvodu kružnice poloměru R rychlostí $-c$,

  proto na něj působí dostředivé zrychlení $a = \dfrac{c^2}{R}$
- dostředivá síla na element $F_d = \Delta m a = \underbrace{\Delta l S \rho}_{\Delta m} \dfrac{c^2}{R}$
- středový úhel pro element struny na vrchlíku pulsu $2\vartheta = \dfrac{\Delta l}{R}$
- napínací síla (napětí σ, průřez S) $F = \sigma S$
- vratná síla na vychýlený element; malý úhel $F_s = 2F \sin\vartheta \approx 2F\vartheta$
- vratná síla vytváří dostředivou sílu $\underbrace{\Delta l S \rho}_{\Delta m} \dfrac{c^2}{R} = F_d = F_s = \sigma S \dfrac{\Delta l}{R}$
- pro fázovou rychlost vyjde $\Rightarrow \; c = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{S\sigma}{S\rho}} = \sqrt{\dfrac{F}{\rho_l}}$
- ρ_l představuje hmotnost jednotkové délky struny ("tloušťka" struny)

Podélné vlnění v pružné tenké tyči



- posunutí $u_1, \quad u_2$
- $\Delta x' - \Delta x = u_2 - u_1 = \Delta u$ (když budou výchylky stejné, tyč není deformovaná, ale jen celá posunutá)
- relativní prodloužení (závisí na poloze v tyči) $\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x} \to \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$
- pro element tyče dx je prodloužení mezi x a $x + dx$ $d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$
- Hookeův zákon: $\frac{F}{S} = E\varepsilon \; \to \; dF = SEd\varepsilon$
- pro element dx $dF = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$
- 2.NZ – na týž element působí zrychlení $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $dF = a \cdot \underbrace{dm}_{\rho S dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho S dx$
- porovnáním $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\rho}{E}}_{c^{-2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \quad c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Rychlost šíření vln v různých materiálech

Materiál	Fázová rychlost c_L [m/s]	Fázová rychlost c_P [m/s]
ocel	5900-6000	3260
hliník	6320	3080
sklo	5570	3515
dřevo	4300	900
beton	5400	3400
rtuť	1450	-
voda	1480	-
vzduch (20°C)	340	-
vzduch (0°C)	331,8	-

c_L … rychlost šíření podélných elastických vln (zvuk)

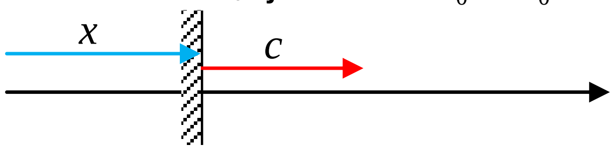
c_P … rychlost šíření příčných elastických vln

Popis vlnění. Fázová rychlost.

- vlna šířící se ve směru osy x
- tzv. fáze vlny $\varphi = k(x - ct) + \varphi_0$ určuje výchylku v určitém čase a místě
- pro konstantu k zatím nemáme fyzikální význam
- hledáme rychlost, s níž se šíří konstantní hodnota fáze (rychlost libovolného zafixovaného místa na vlně) $\varphi =$konst. $\Rightarrow$ $d\varphi = 0 \Rightarrow d\varphi = k(dx - c\,dt) = 0 \Rightarrow c = \dfrac{dx}{dt}$
- ze vztahu diferenciálů posunutí a času plyne, že fáze se šíří rychlostí $c \Rightarrow$ <u>fázová rychlost</u>

<u>Jinak:</u>

- zafixujeme proměnnou část fáze v čase t_0 a bodě x_0 $\rightarrow$ $\Delta = x_0 - ct_0$
- fáze bude stejná ve všech časech t a bodech x, kde $x - ct = \Delta$, tj. $x - ct = x_0 - ct_0$.
- pro místa se stejnou fází platí $x = x_0 + c(t - t_0)$



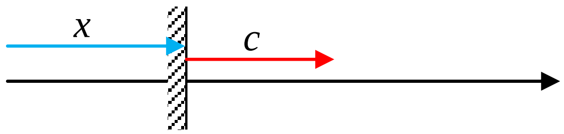
$\Rightarrow$ šíří se rychlostí c

$\Rightarrow$ v tomto speciálním případě (vlna ve směru osy x) nezávisí fáze na ostatních souřadnicích $\rightarrow$ rovinná <u>vlnoplocha</u> kolmá k ose x

fázová rychlost není obecně spjata s šířením energie a hybnosti nebo informace, proto může být i větší než rychlost světla nejen v daném prostředí, dokonce i ve vakuu!

Harmonická rovinná vlna

- význam rovinné vlny:
  - malá část každé vlnoplochy – popis jako rovinná vlna
  - libovolný časový průběh získáme superpozicí harmonických vln (Fourierova řada)
  - pro názornost nejprve budeme studovat rovinnou vlnu ve směru osy x



- obecné řešení $f(x \mp ct)$, dále budeme používat jen mínus, které značí šíření ve směru osy
- harmonická vlna $u(x,t) = A\sin[k(x - ct)]$
- argument $k(x - ct)$ goniometrické funkce musí být bezrozměrný, k má rozměr 1/délka

periodicita v prostoru:

- vlnová délka – minimální vzdálenost $\Delta x = \lambda$, při níž je v daném čase t stejná fáze (tedy i výchylka)

$\rightarrow$ $u(x,t) = u(x \pm \lambda, t)$

$\rightarrow$ $A\sin[k(x - ct)] = A\sin[k(x \pm \lambda - ct)]$

$\rightarrow$ $|k\lambda| = 2\pi$ a $k > 0 \wedge \lambda > 0$ $\rightarrow$ vlnočet $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Harmonická rovinná vlna

periodicita v čase:

- perioda – nejkratší doba opakování stejné výchylky v daném bodě x

$\rightarrow \quad u(x,t) = u(x,t+T)$

$\rightarrow \quad A\sin[k(x-ct)] = A\sin[k(x-c(t\pm T))] = A\sin[k(x-ct)\mp kcT]$

$\rightarrow \quad |kcT| = 2\pi$ a $k>0 \wedge c>0 \wedge T>0 \;\rightarrow$ vlnočet $k = \dfrac{2\pi}{cT} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\rightarrow \quad \lambda = cT \;\rightarrow$ perioda $T = \dfrac{\lambda}{c}$ $\rightarrow$ frekvence $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{c}{\lambda}$

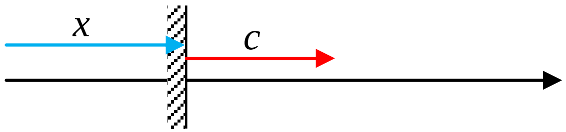
$\rightarrow$ úhlová frekvence $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\lambda}{T} = kc \;\rightarrow\; c = \dfrac{\omega}{k}$

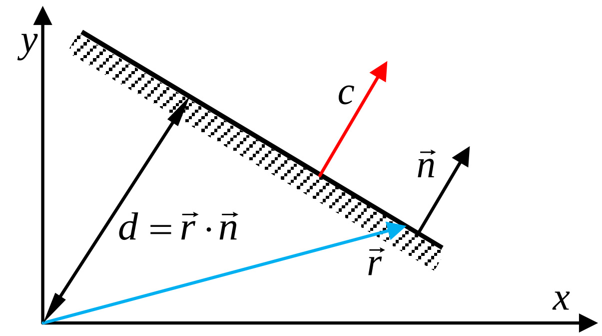
vlnová funkce pro harmonickou vlnu (oba směry šíření)

- $u(x,t) = A\sin(kx \mp \omega t + \varphi_0) = A\sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}(x \mp ct) + \varphi_0\right] = A\sin\left[2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda} \mp \dfrac{t}{T}\right) + \varphi_0\right]$
- exponenciální tvar $u(x,t) = Ae^{i(kx\mp\omega t+\varphi_0)} = \widehat{A}e^{i(kx\mp\omega t)}$

Harmonická rovinná vlna obecného směru

- od rovinné vlny ve směru osy x přejdeme k rovinné vlně v obecném směru





- zavedeme jednotkový vektor $\vec{n}$ ve směru vlny
- vzdálenost vlnoplochy od počátku $d = \vec{n} \cdot \vec{r}$
- obecné řešení $f(x \mp ct)$ se změní na $f(\vec{n} \cdot \vec{r} \mp ct)$
- ve výše odvozených vztazích se zamění $x \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r}$

- harmonická vlna $u(\vec{r}, t) = A \sin[k(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)]$

<u>periodicita v prostoru:</u>

- vlnová délka – minimální vzdálenost $\vec{n} \cdot \Delta\vec{r} = \lambda$, při níž je v daném čase t stejná fáze (a výchylka)

$\rightarrow$ $u(\vec{r}, t) = u(\vec{r} \pm \lambda\vec{n}, t)$

$\rightarrow$ $A \sin[k(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)] = A \sin[k(\vec{n} \cdot \vec{r} \pm \vec{n} \cdot \vec{n}\lambda - ct)] = A \sin[k(\vec{n} \cdot \vec{r} \pm \lambda - ct)]$

$\rightarrow$ $|k\lambda| = 2\pi$ a $k > 0 \wedge \lambda > 0$ $\rightarrow$ vlnočet $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Harmonická rovinná vlna obecného směru

periodicita v čase:

- perioda – nejkratší doba opakování stejné výchylky v daném bodě $\vec{r}$

$\rightarrow \quad u(\vec{r},t)=u(\vec{r},t+T)$

$\rightarrow \quad A\sin[k(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)] = A\sin[k(\vec{n}\cdot\vec{r}-c(t\pm T))] = A\sin[k(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)\mp kcT]$

$\rightarrow \quad |kcT|=2\pi$ a $k>0 \wedge c>0 \wedge T>0 \rightarrow$ vlnočet $k=\dfrac{2\pi}{cT}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\rightarrow \quad \lambda = cT \rightarrow$ perioda $T=\dfrac{\lambda}{c}$ $\rightarrow$ frekvence $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{c}{\lambda}$

$\rightarrow$ úhlová frekvence $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\lambda}{T} = kc$ $\rightarrow$ $c=\dfrac{\omega}{k}$

vlnová funkce pro harmonickou vlnu

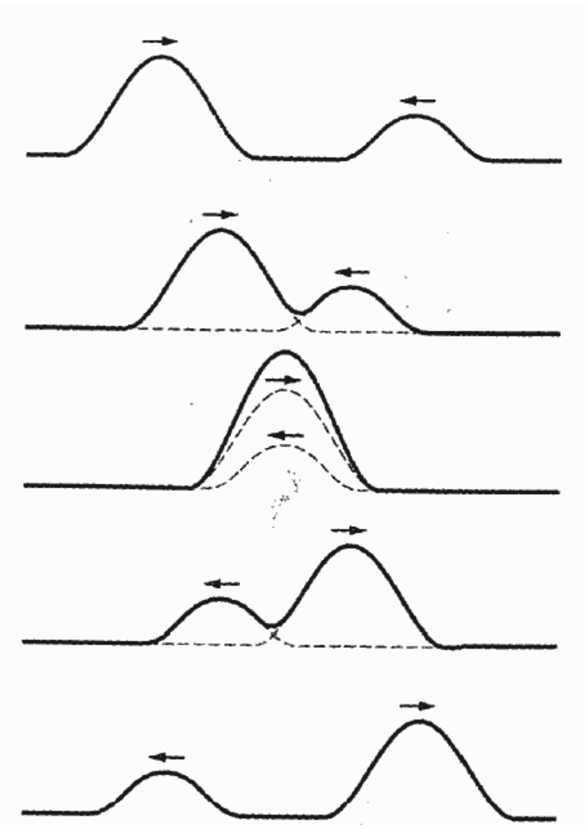
- vlnočet $\rightarrow$ vlnový vektor $\vec{k}=\dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$
- $u(\vec{r},t)=A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}\mp\omega t+\varphi_0)=A\sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}(\vec{n}\cdot\vec{r}\mp ct)+\varphi_0\right]=A\sin\left[2\pi\left(\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{\lambda}\mp\dfrac{t}{T}\right)+\varphi_0\right]$
- exponenciální tvar $u(x,t)=Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\mp\omega t+\varphi_0)}=\hat{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\mp\omega t)}$

Princip superpozice

vlnové rovnice odvozeny za předpokladu, že fázová rychlost je konstanta (nezávisí na poloze a času, ani na amplitudě vlny)

$\Rightarrow$ vlnová rovnice – lineární homogenní dif.rce

$\Rightarrow$ superpozice jednotlivých vlnění



experimentálně potvrzeno (pro malé výchylky), že

- vyvolají-li nezávislé rozruchy výchylky $\vec{u}_1(\vec{r},t)$ resp. $\vec{u}_2(\vec{r},t)$
- pak při současném působení vyvolají oba rozruchy výchylku $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}_1(\vec{r},t) + \vec{u}_2(\vec{r},t)$

(výchylky jsou veličiny stejného druhu, obecně jsme je chápali vektorově, může jít také o skalární veličiny)

toto experimentální pozorování mj. opravňuje náš předpoklad, že <u>fázová rychlost nezávisí na amplitudě</u>

http://phet.colorado.edu/sims/wave-on-a-string/wave-on-a-string_en.html

Interference vlnění stejné frekvence

- skládání více vlnění na základě principu superpozice → interference vlnění
- předpokládáme stejnou fázovou rychlost skládaných vlnění
- modifikujeme vztahy odvozené pro kmity

- $u_1 = A_1 \sin(kx - \omega t + \alpha_1)$
- $u_2 = A_2 \sin(kx - \omega t + \alpha_2)$
- výsledkem je vlnění se stejnou frekvencí
- $u = A\sin(kx - \omega t + \alpha) = A\sin(kx - \omega t)\cos\alpha + A\cos(kx - \omega t)\sin\alpha$
- platí totiž $$\left\{\begin{aligned} u = u_1 + u_2 = \sin(kx - \omega t)&\underbrace{(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)}_{A\cos\alpha} + \\ + \cos(kx - \omega t)&\underbrace{(A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)}_{A\sin\alpha} \end{aligned}\right.$$
- amplituda $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$
- fázové posunutí $\tan\alpha = \dfrac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = \dfrac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$

Interference vlnění stejné frekvence

- dále předpokládáme stejnou amplitudu obou vlnění

$$A_1 = A_2 = a$$

- amplituda
$$\begin{cases} A^2 = 2a^2\left(1+\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right) = \\ = 2a^2\left(1-\sin^2\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right) = \\ = 4a^2\cos^2\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \Rightarrow A = \left|2a\cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right| \end{cases}$$

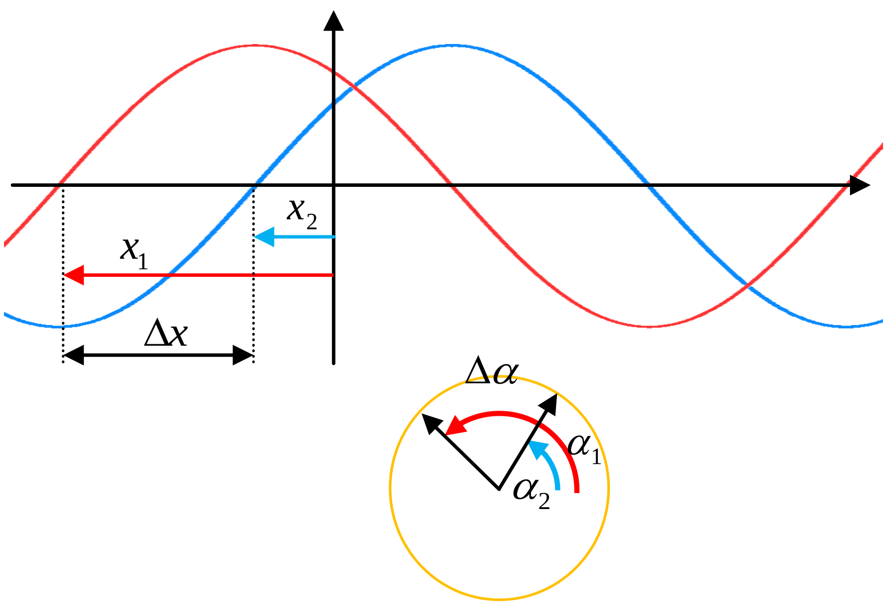
$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

- fázové posunutí $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}$
- výsledné vlnění $u = \left|2a\cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right|\sin(kx-\omega t+\alpha)$
  - opět rovinná vlna se stejnou frekvencí
  - amplituda se mění v závislosti na fázovém rozdílu v rozsahu $0 \le A \le 2|a|$
  - znaménko fázového rozdílu není důležité – funkce kosinus je sudá

Dráhový a fázový rozdíl

od fázových posunutí v úhlových jednotkách přejdeme k posunutím dráhovým:

- mezi vlnami budiž fázové posunutí $\Delta\alpha = |\alpha_2 - \alpha_1|$
- v libovolném časovém okamžiku jsou body, jejichž kmity na obou vlnách mají stejnou fázi, vzdáleny o pevný dráhový rozdíl $\Delta x = |x_2 - x_1|$
- hledáme vztah mezi $\Delta\alpha$ a Δx
- $\rightarrow$ $\begin{aligned} &\boxed{u_1(x,t)} = A\sin(kx - \omega t + \alpha_1) \\ &\boxed{u_2(x,t)} = A\sin(kx - \omega t + \alpha_2) \end{aligned}$
- $\rightarrow$ $\begin{aligned} &u_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t - kx_1) \\ &u_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t - kx_2) \end{aligned}$
- $\rightarrow$ $\alpha_1 - \alpha_2 = k(x_2 - x_1)$
- $\rightarrow$ $\Delta\alpha = k\,\Delta x \rightarrow \Delta\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x$



Dráhový a fázový rozdíl

amplituda v závislosti na fázovém rozdílu

$$\left.\begin{aligned} A &= \left| 2a\cos\frac{\Delta\alpha}{2} \right| \\ \Delta\alpha &= \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \end{aligned}\right\} A = \left| 2a\cos\frac{\pi}{\lambda}\Delta x \right|$$

konstruktivní interference (maximum)

$$\left|\cos\frac{\Delta\alpha}{2}\right| = \left|\cos\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\Delta\alpha}{2} = \pi n \Rightarrow \Delta\alpha = 2\pi n \\ \dfrac{\pi}{\lambda}\Delta x = \pi n \Rightarrow \Delta x = n\lambda \end{cases}$$

destruktivní interference (minimum)

$$\left|\cos\frac{\Delta\alpha}{2}\right| = \left|\cos\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\Delta\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow \Delta\alpha = (2n+1)\pi \\ \dfrac{\pi}{\lambda}\Delta x = \dfrac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow \Delta x = \dfrac{\lambda}{2}(2n+1) \end{cases}$$

Projevy interference vlnění

optická interference

- na nerovnoměrně tlusté vrstvě benzínu maxima pro různé vlnové délky vzájemně posunuta

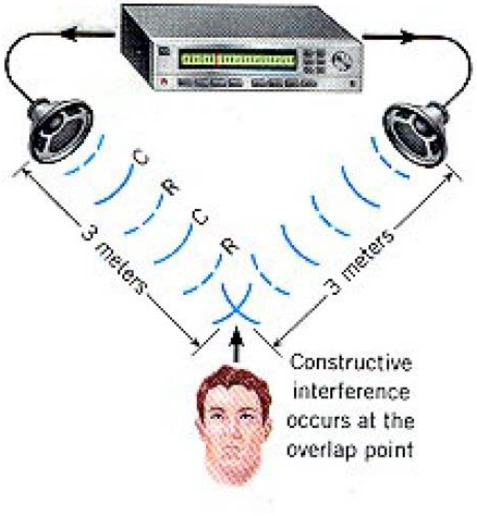
foto: Cornelia Kopp

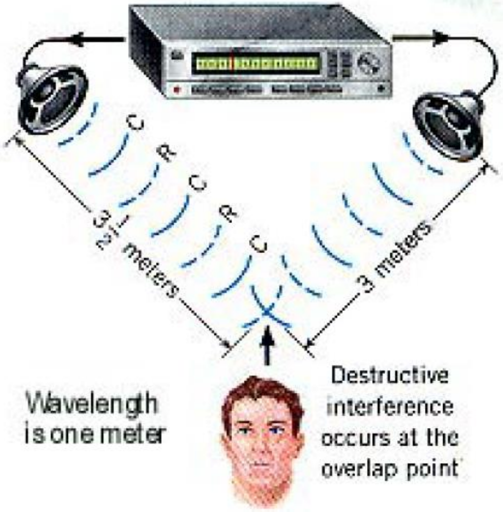
zvukové vlny

- $c \rightarrow$ 340 m/s
- $f \rightarrow$ 16 Hz až 20 kHz
- vlnová délka $\lambda = c / f \rightarrow$ 16.5 mm až 20 m
- $\lambda =$ 1 m $\rightarrow f =$ 330 Hz

stereofonní poslech

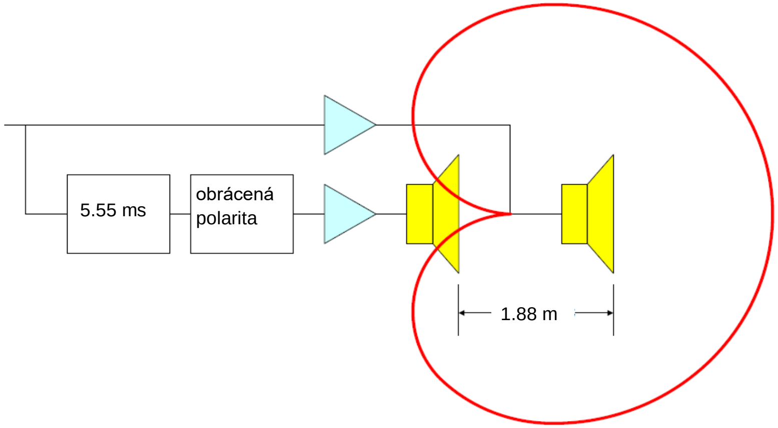
- vzdálenost mikrofonů a reproduktorů cca 3 m
- zvukové vlny různých frekvencí zeslabeny nebo zesíleny v závislosti na poloze posluchače



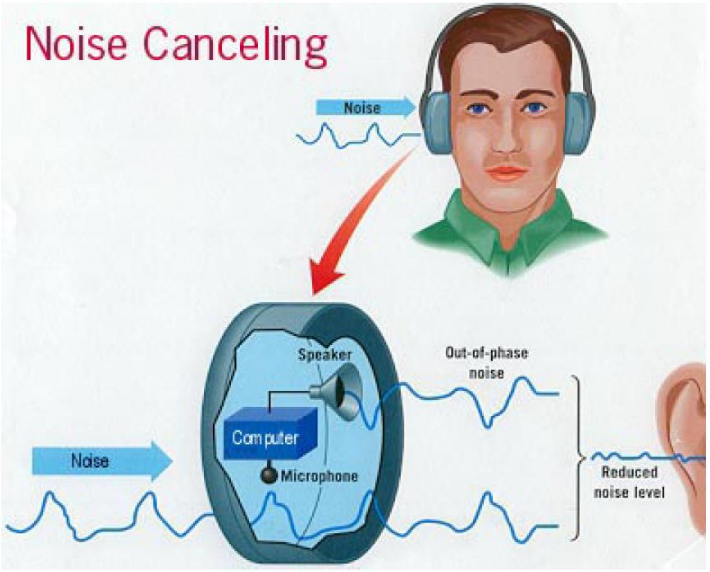


Využití interference vlnění

- subwoofer nemá směrovou charakteristiku
- vhodným umístěním 2 subwooferů lze docílit kardiodní směrové charakteristiky pro zvolenou frekvenci:
    - vybraná střední frekvence 45 Hz
    - fyzická vzdálenost $\lambda / 4$
    - zpoždění signálu $\lambda / 4c$
- subwoofer přenáší frekvence 20 Hz až 100 Hz (3 až 17 m) $\Rightarrow$ vyladění jen pro jednu frekvenci



- zeslabení zvuku destruktivní interferencí



Stojaté vlnění

- význačný případ interference – stejné vlny (podélné, příčné stejné polarizace) šířící se opačnými směry
- v jednorozměrném případě $\rightarrow$ $u = f(x-ct) + f(x+ct)$
- volné parametry nastaveny tak, že počátek v místě, kde se vlny setkají v čase t=0 při nulové výchylce
- $$u_1 = a\sin(kx-\omega t)$$ $$u_2 = a\sin(kx+\omega t)$$ $\rightarrow$ $$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = a\sin(kx-\omega t) + a\sin(kx+\omega t) = a[\sin(kx-\omega t)+\sin(kx+\omega t)] = \\ &= a[\sin(kx)\cos(\omega t) - \cancel{\cos(kx)\sin(\omega t)} + \sin(kx)\cos(\omega t) + \cancel{\cos(kx)\sin(\omega t)}] = \\ &= 2a\sin(kx)\cos(\omega t) \end{aligned}$$
- výsledné vlnění $$u = \underbrace{2a\sin(kx)}_{A}\cos(\omega t)$$
- po celé délce vzniknou harmonické kmity $u = A\cos(\omega t)$ se stejnou fází
- amplituda závisí na vzdálenosti od počátku $A = 2a\sin(kx)$ (záporná amplituda jen otáčí fázi kmitů)
- $|A|$ je maximální, pokud $|\sin(kx)| = 1 \Rightarrow kx = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \rightarrow$ kmitny
- $|A|$ je nulové, pokud $|\sin(kx)| = 0 \Rightarrow kx = \pi n \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = \pi n \Rightarrow x = 2n\frac{\lambda}{4} \rightarrow$ uzly
- (v souladu se zadáním: v počátku nulová amplituda $\rightarrow$ uzel)

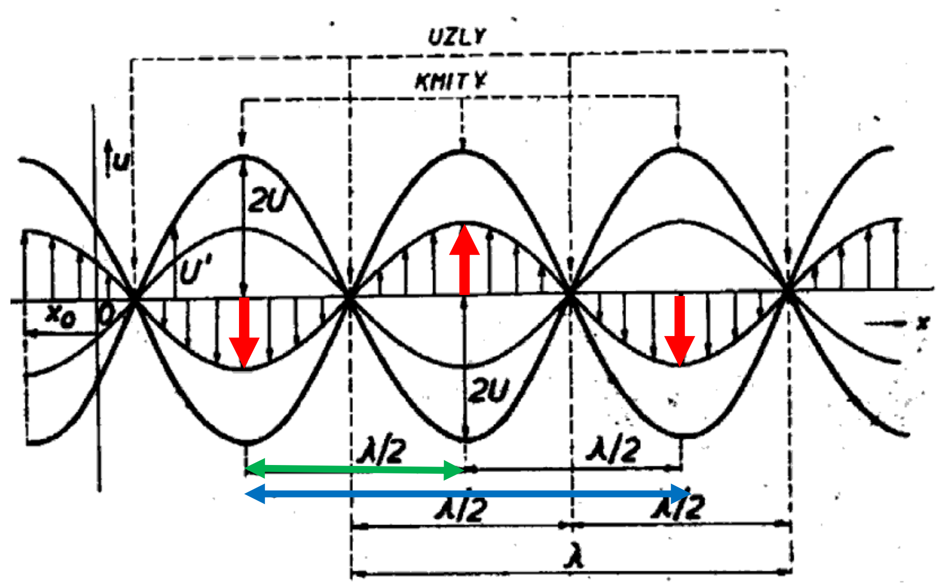
Postupné vlnění vs. stojaté vlnění

postupné vlnění

- amplituda – stejná ve všech bodech
- fáze – různá
- vlnoplochy se šíří fázovou rychlostí c
- může přenášet energii

stojaté vlnění

- amplituda – periodicky závislá na poloze bodu
- body ve vzdálenosti λ kmitají ve fázi
- body ve vzdálenosti $\lambda / 2$ v protifázi
- nepřenáší energii



Stojaté vlnění – odraz vlnění

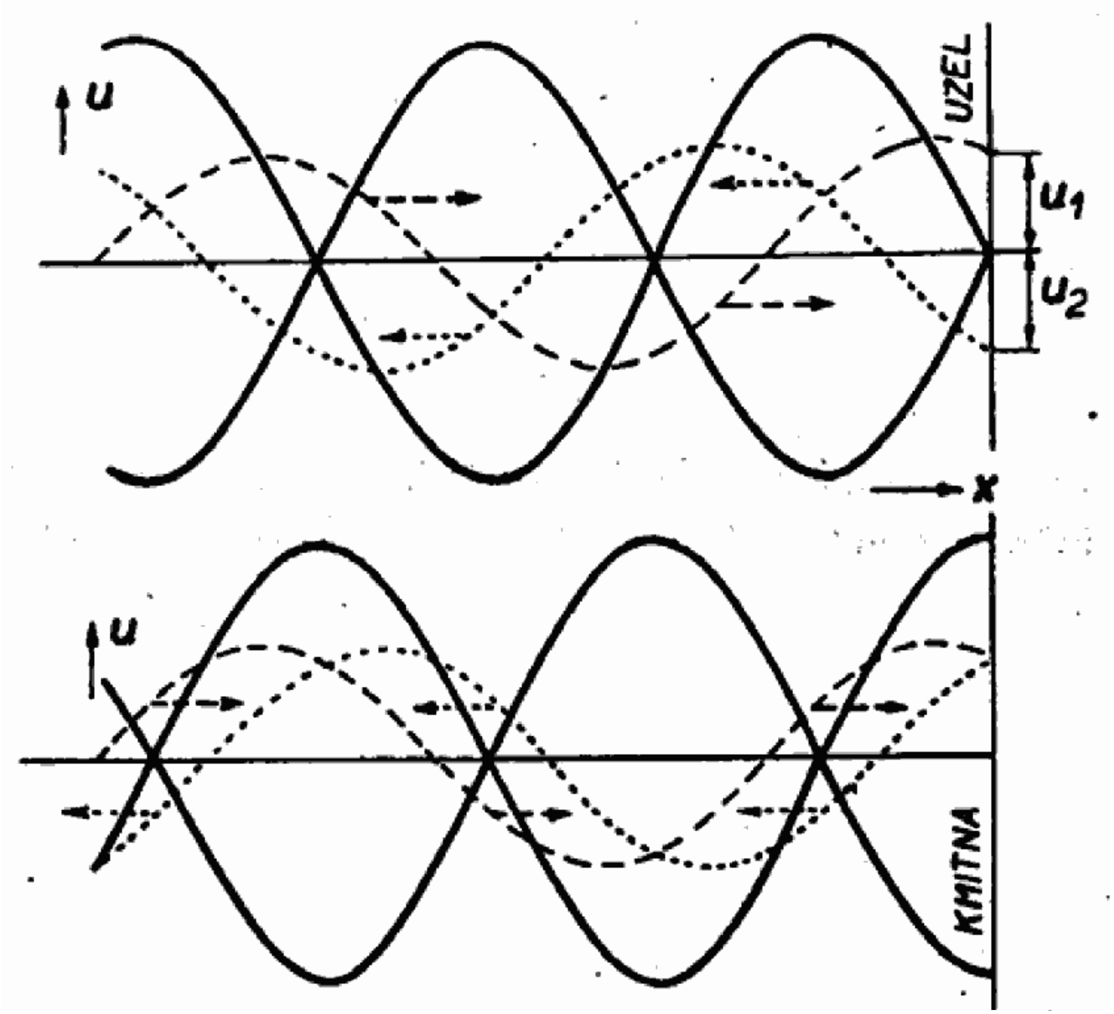
stojaté vlnění obvykle vzniká složením postupného vlnění se svým odrazem

odraz na pevném konci

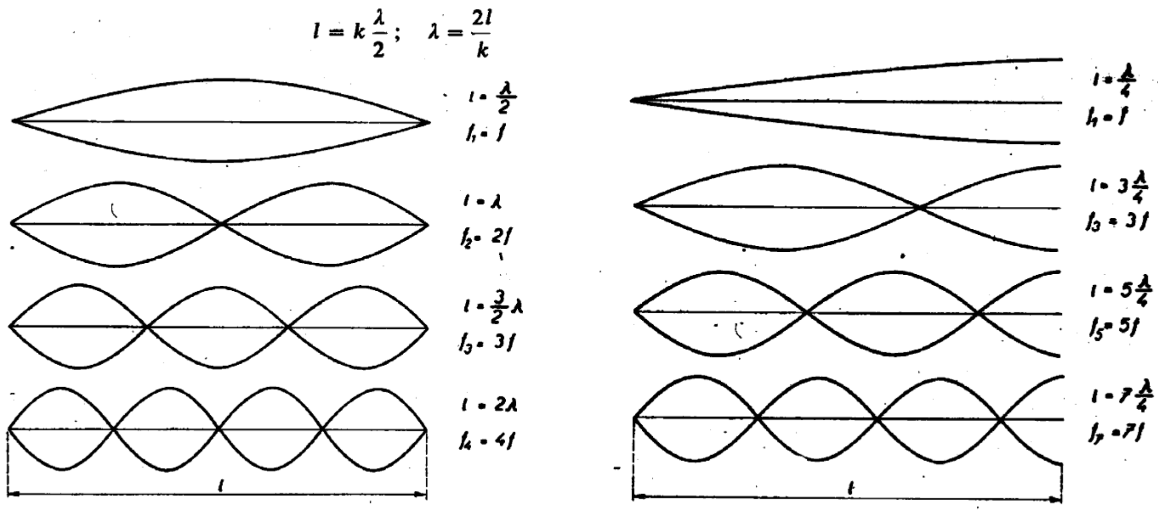
- interakce se stěnou
- na pevném konci je uzel
- uzel vznikne složením výchozí a odražené vlny
- odražená vlna má opačnou fázi

odraz na volném konci

- na volném konci je kmitna
- odražená vlna má stejnou fázi



Stojaté vlnění – struna, píšťala



jen vlny určitých frekvencí konstruktivně interferují a přetrvávají – vytvoří stojaté vlnění – <u>vlastní frekvence</u>

1) struna – na koncích uzly, na délce L celý počet půlvln $L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \rightarrow$ základní tón $f_1 = \frac{c}{2L}$

2) oba konce volné – na koncích kmitny, stejný výpočet jako pro pevné konce

3) dechový nástroj – jeden konec pevný (uzel), druhý volný (kmitna) – na délce L lichý počet čtvrtvln

$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n+1)\frac{c}{4L} \rightarrow$ základní tón $f_1 = \frac{c}{4L}$

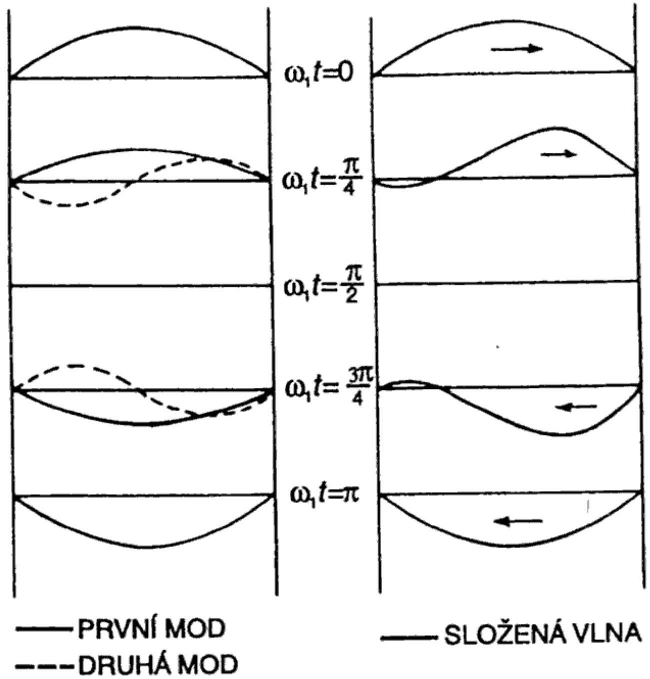
Závěr: Frekvence nezávisí jen na délce, ale i na fázové rychlosti v daném prostředí, a ta závisí na dalších parametrech systému (napětí a materiál struny, teplota a vlhkost plynu ve vzduchovém sloupci)

Stojaté vlnění – vlastní kmity

- hledání vlastních frekvencí lze zobecnit na různé soustavy (nejen mechanické)
- přípustné frekvence se nazývají vlastní módy soustavy

příklady:

- chvění mechanických soustav (křídla letadel, mosty,...)
- pohyb takové soustavy lze zkoumat jako současné vybuzení několika vlastních módů
- složením vlastních módů (stojatá vlnění) vznikne postupná vlna



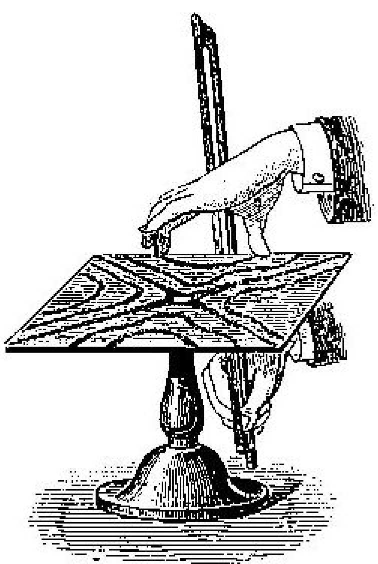
http://www.novinky.cz/koktejl/200957-v-rusku-museli-uzavrit-sedmikilometrovy-most-pres-volhu-rozkmital-se.html

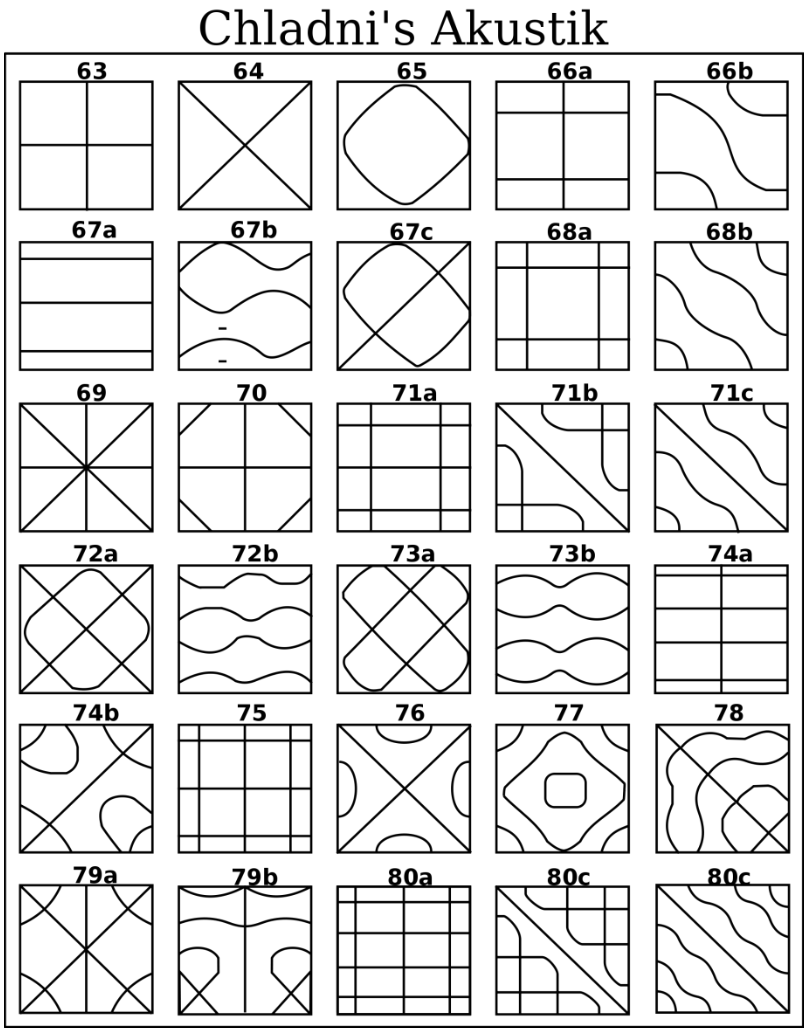
http://www.aldebaran.cz/zvuky/index.php

Chladniho obrazce

Ernst Chladni (1756-1827, Německo)

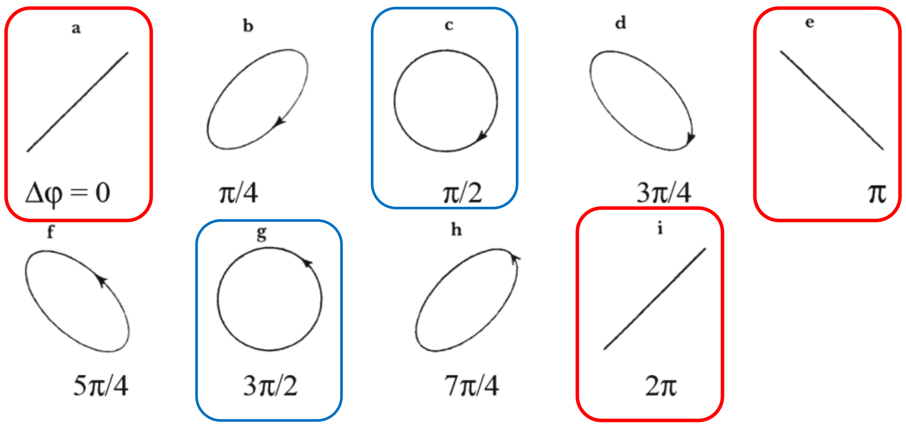
- jemný písek na kovové desce rozeznívané smyčcem na různých místech
- po desce se šíří vlny, odrážejí se a interferují
- písek se shlukuje v uzlových oblastech





Polarizace podruhé

- složení dvou vlnění se vzájemně kolmými rovinami polarizace
- stejná fázová rychlost, frekvence a amplituda, odlišná fáze
- $u_x = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$
- $$\begin{cases} u_y = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \Delta\varphi) = \\ = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\cos\Delta\varphi + A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\sin\Delta\varphi = \\ = \underbrace{A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}_{u_x}\cos\Delta\varphi + A\underbrace{\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}_{\sqrt{1-\frac{u_x{}^2}{A^2}}}\sin\Delta\varphi = \\ = u_x\cos\Delta\varphi + A\sqrt{1-\frac{u_x^2}{A^2}}\sin\Delta\varphi \end{cases}$$
- lze upravit na obecnou rovnici elipsy
  $u_x{}^2 - 2u_x u_y\cos\Delta\varphi + u_y{}^2 = A^2\sin^2\Delta\varphi$
- pro $\Delta\varphi = n\pi \quad \rightarrow \boxed{u_y = (-1)^n u_x}$
- pro $\Delta\varphi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \rightarrow \boxed{u_x{}^2 + u_y{}^2 = A^2}$
- výsledkem je opět <u>polarizovaná vlna</u> – <u>lineárně</u>, <u>kruhově</u> nebo <u>elipticky</u>



Fázová rychlost. Disperzní relace.

- některé parametry vlnění ve skutečnosti nebývají konstanty
- nepředpokládáme závislost na čase a poloze
- amplituda a fázová rychlost často závisí na úhlové frekvenci

závislost fázové rychlosti na frekvenci

- $c = c(\omega) \rightarrow k = \dfrac{\omega}{c(\omega)} \rightarrow k = k(\omega) \rightarrow \omega = \omega(k)$
- v anizotropním prostředí může záviset i na směru $\omega = \omega(\vec{k})$
- konkrétní tvar <u>disperzní relace</u> $\omega = \omega(\vec{k})$ závisí na typu vlnění a vlastnostech prostředí

Grupová rychlost

- předpokládejme závislost fázové rychlosti na frekvenci (vlnové délce, vlnočtu)
- interference 2 harmonických vln s nepatrně odlišnými frekvencemi a vlnočty

$$u_1 = u_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$u_2 = u_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

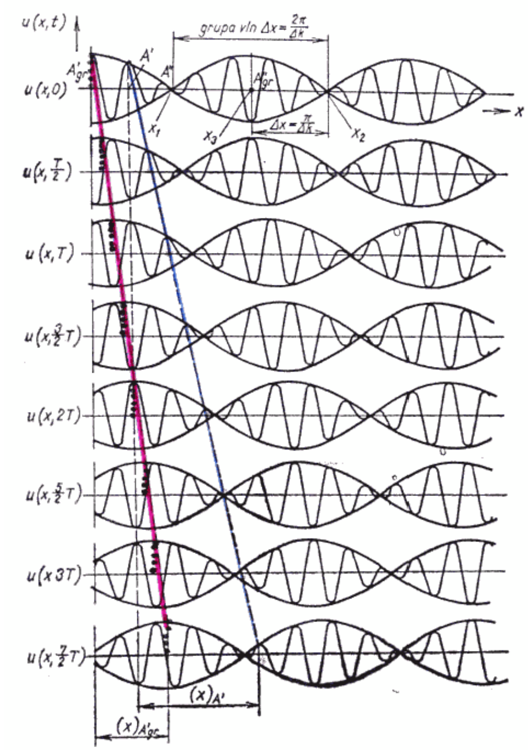
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = u_1 + u_2 = u_0\left[\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)\right] = \\ = \underbrace{2u_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)}_{A} \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \end{cases}$$

- zavedeme $\begin{Bmatrix} \omega_1 = \omega \\ \omega_2 = \omega + \Delta\omega \\ k_1 = k \\ k_2 = k + \Delta k \end{Bmatrix}$, kde $\begin{matrix} \Delta\omega << \omega \\ \Delta k << k \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} k_1 + k_2 \cong 2k \\ \omega_1 + \omega_2 \cong 2\omega \end{matrix}$

- pak lze psát $$u = \underbrace{2u_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)}_{A} \cos(kx - \omega t)$$

- výsledkem skládání je vlna s průměrnou frekvencí a vlnočtem, jejíž amplituda je modulovaná rozdílovými veličinami



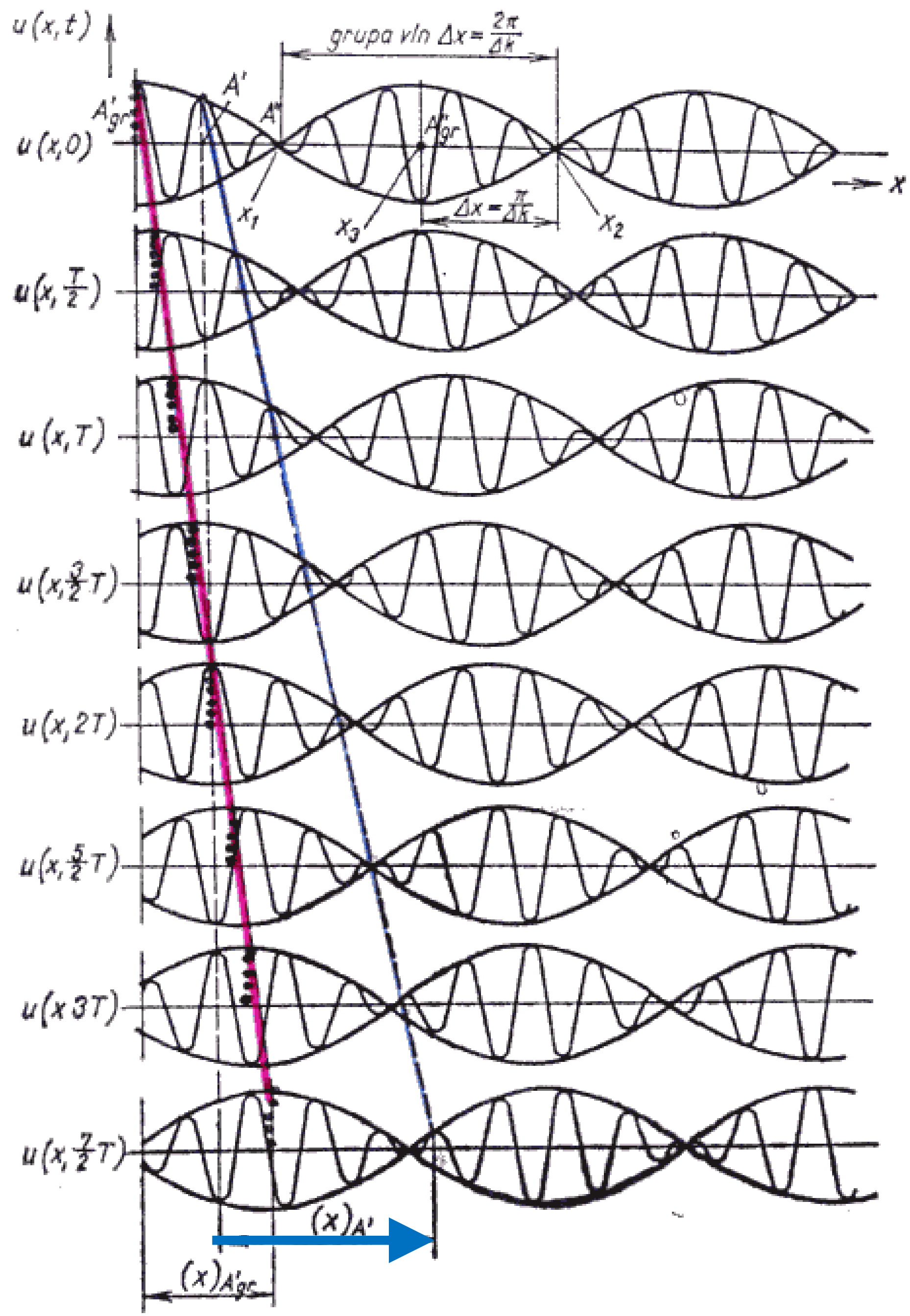
Grupová rychlost

- složené vlnění

$$u = \underbrace{2u_0 \cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)}_{A}\cos(kx - \omega t)$$

- místa stejné fáze (např. vrchol vlny) $kx - \omega t = k(x - ct) = k(x_0 - ct_0) = kx_0 - \omega t_0$ se šíří fázovou rychlostí $c = \omega / k$

- na obrázku značí modrá linie polohu vrcholu vybrané vlny s časovým odstupem poloviny periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- dále vidíme celkové posunutí vrcholu vlny za dobu $\frac{7}{2}T$

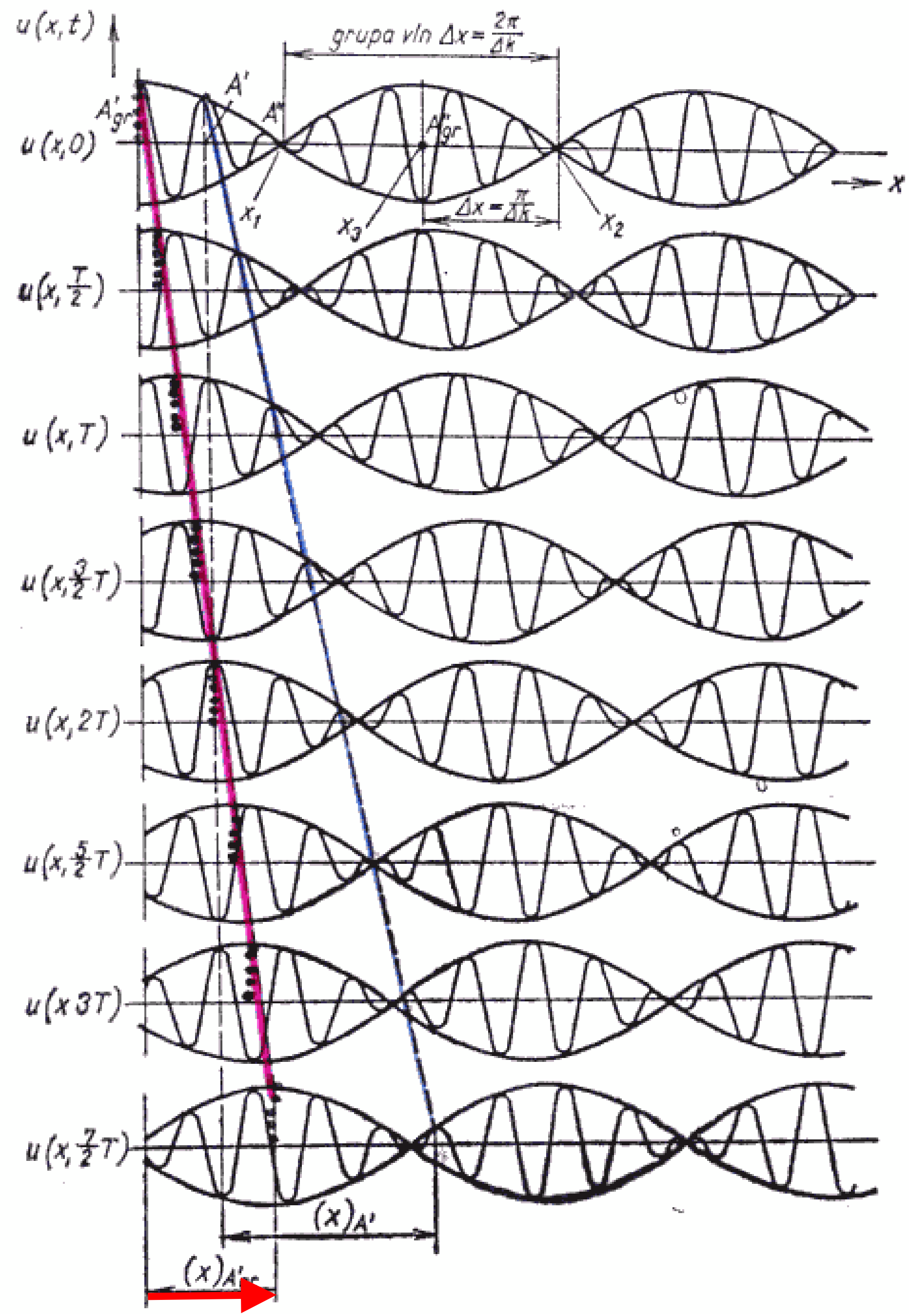


Grupová rychlost

- předp. disperzní zákon $\begin{cases} \omega = \omega(k) \\ \Delta\omega = \dfrac{d\omega}{dk}\Delta k \end{cases}$
- pak lze amplitudu vyjádřit takto

$$A = 2u_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) = 2u_0 \cos\left[\left(x - \frac{d\omega}{dk}t\right)\frac{\Delta k}{2}\right]$$

- maxima amplitudy $\left(x_n^{\max} - \dfrac{d\omega}{dk}t\right)\dfrac{\Delta k}{2} = \pi n$
- minima amplitudy $\left(x_n^{\min} - \dfrac{d\omega}{dk}t\right)\dfrac{\Delta k}{2} = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$
- minima dělí nekonečnou postupnou vlnu na skupiny (grupy) vln šířky $\Delta x = x_{n+1}^{\min} - x_n^{\min} = \dfrac{2\pi}{\Delta k}$
- na obrázku značí červená linie polohu maxima vybrané grupy s časovým odstupem poloviny periody $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- dále vidíme celkové posunutí maxima grupy za dobu $\dfrac{7}{2}T$



Grupová rychlost

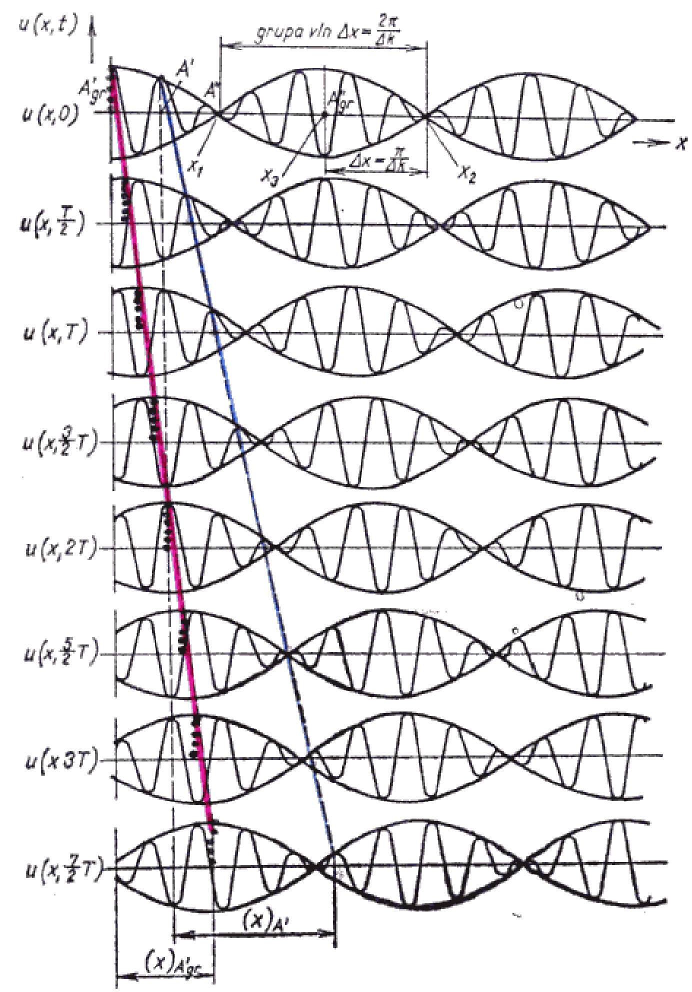
- hledáme rychlost grup (už jsme zjistili, že se nepohybují fázovou rychlostí)
- nalezli jsme $(x_n^{\min} - \frac{d\omega}{dk}t)\frac{\Delta k}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
- hranice mezi grupami jsou určeny rovnicí

$$x_n^{\min} = (2n+1)\frac{\pi}{\Delta k} + \underbrace{\frac{d\omega}{dk}}_{c_g}t$$

- hranice grup (a tedy i celé grupy) se šíří rychlostí $c_g = \frac{d\omega}{dk}$, kterou nazveme **grupová**
- naznačený výpočet lze zobecnit na více vln i na spojité rozložení frekvencí

Důležité závěry:

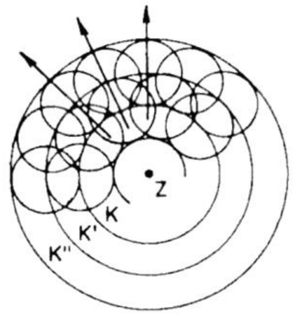
- grupová rychlost se běžně liší od fázové
- “balíčky” energie v jednotlivých grupách se šíří grupovou rychlostí
  - → informace se šíří grupovou rychlostí
  - → c_g nemůže přesáhnout rychlost světla

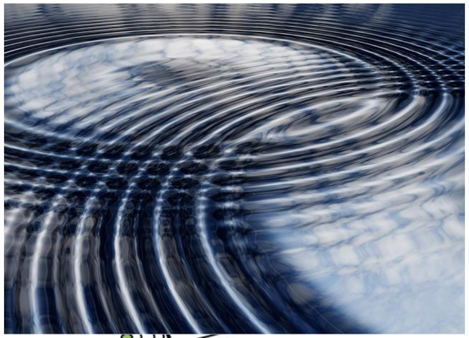


Huygensův princip. Vlnoplochy

homogenní a izotropní prostředí

- ve všech bodech fázová rychlost rychlost c
- vlnění vytvoří kouli/kružnici o poloměru ct
- čelní vlnoplocha – plocha, kam se vzruch v daném čase rozšíří



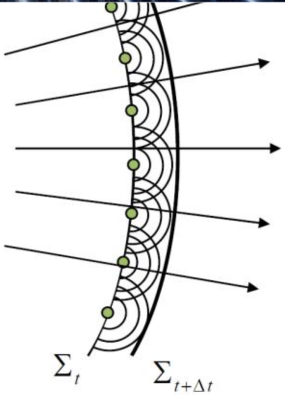


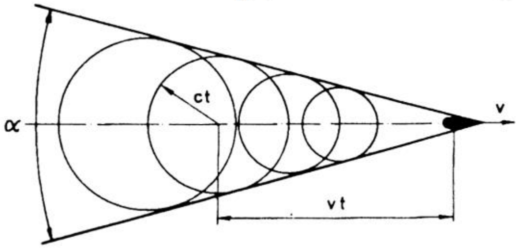
proč studovat šíření čela vlny?

- chování vlnění na překážkách

Huygensův-Fresnelův princip

- každý bod, kam čelo vlny dospěje v čase t, se stává zdrojem elementárního vlnění, kolem něhož se vytváří elementární kulová vlnoplocha $c\Delta t$, jejíž každý bod se opět stane zdrojem elementárního vlnění...
- skutečnou vlnoplochou v čase $t+\Delta t$ je vnější obálka elementárních vlnoploch
- výsledný stav vlnění je superpozicí všech elementárních vlnění





brázda za lodí $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{ct}{vt}=\frac{c}{v}$

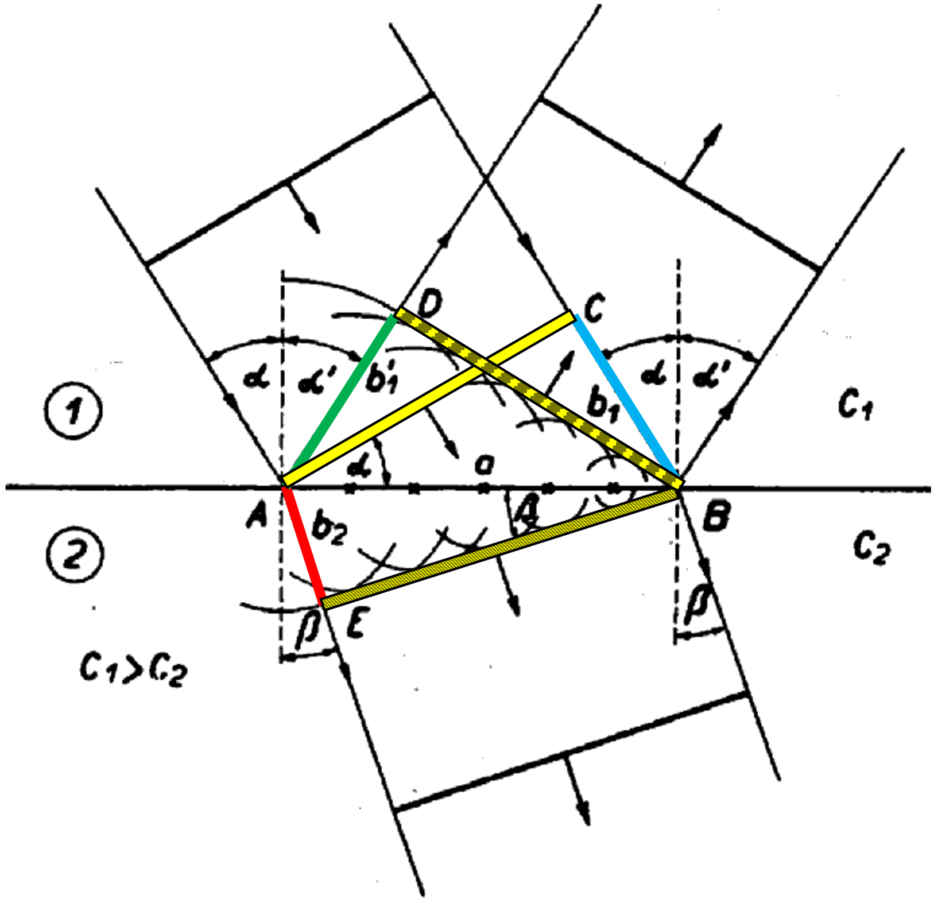
Lom a odraz vlnění

zákon odrazu

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}=\frac{a\sin\alpha'}{a\sin\alpha}=\frac{\boxed{b_1'}}{\boxed{b_1}}=\frac{c_1\Delta t}{c_1\Delta t}=1\Rightarrow\alpha=\alpha'$$

zákon lomu (Snellův zákon)

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{a\sin\beta}{a\sin\alpha}=\frac{\boxed{b_2}}{\boxed{b_1}}=\frac{c_2\Delta t}{c_1\Delta t}=\frac{c_2}{c_1}\Rightarrow\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{c_2}{c_1}$$



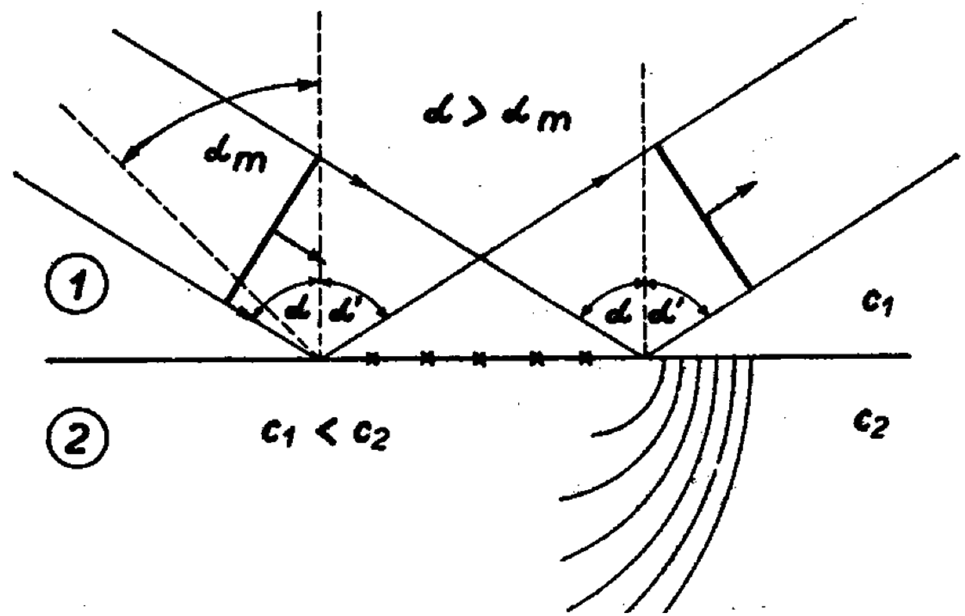
Willebrord Snellius (1580-1626, Holandsko)

- astronom a matematik
- jako první formuloval zákonitost (již dlouho známou) pomocí trigonometrických funkcí

Totální odraz

$c_1 < c_2$

- $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{c_2}{c_1} > 1 \Rightarrow \sin\alpha_m = \dfrac{c_1}{c_2} < 1$
- lom od kolmice
- pro úhly větší než α_m nenastane lom, vlna se pouze totálně odrazí



Příklad: ze vzduchu (c_1 = 340 m/s) do vody (c_2 = 1450 m/s) se lomí zvukové vlny, jen pokud úhel dopadu je menší než $\arcsin(340/1480) = 13°30'$, tedy téměř kolmo ke hladině $\Rightarrow$ zvuk ze vzduchu pod vodu proniká velmi omezeně

$c_1 > c_2$

- lom ke kolmici, do „pomalejšího“ prostředí
- nastane vždy (např. z kovových předmětů do vzduchu)

Dopplerův jev

- frekvence přijímaného vlnění závisí na vzájemném pohybu zdroje a pozorovatele
- nejprve předpokládáme, že prostředí je v klidu
- význačné případy:

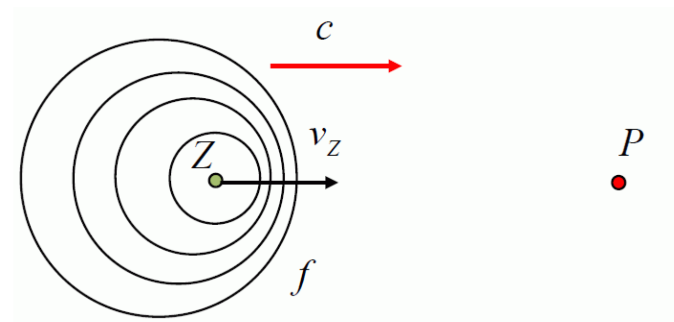
a) zdroj pohyblivý, pozorovatel v klidu

směrem k pozorovateli zhuštění vln

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - v_z T = \frac{c}{f} - v_z \frac{1}{f} = \frac{c - v_z}{f}$$

vnímaná frekvence

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = f \frac{c}{c - v_z}$$



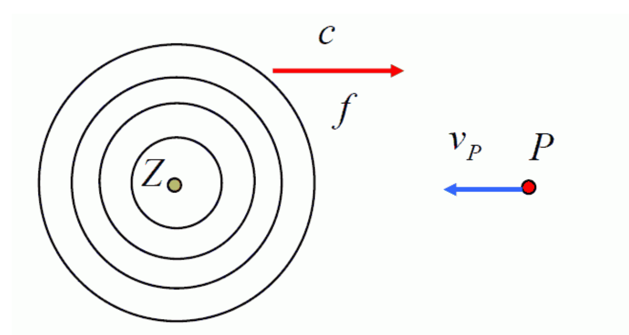
b) pozorovatel pohyblivý, zdroj v klidu

vůči pozorovateli má vlnění rychlost

$$c' = c + v_p$$

vnímaná frekvence

$$f' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v_p}{\frac{c}{f}} = f \frac{c + v_p}{c}$$



Dopplerův jev

c) zdroj pohyblivý, pozorovatel pohyblivý

směrem k pozorovateli zhuštění vln

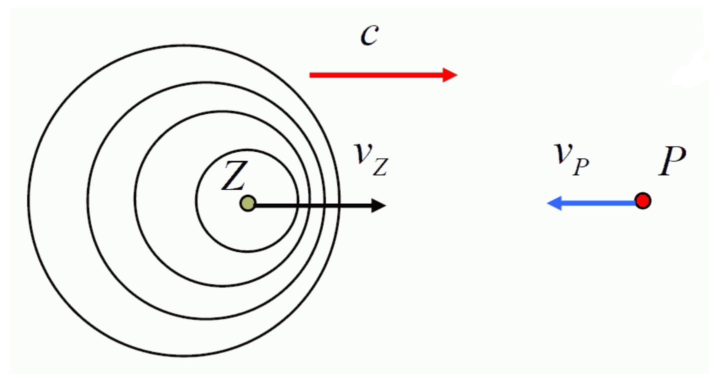
$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - v_Z T = \frac{c}{f} - v_Z \frac{1}{f} = \frac{c - v_Z}{f}$$

vůči pozorovateli má vlnění rychlost

$$c' = c + v_p$$

vnímaná frekvence

$$f' = \frac{c'}{\lambda'} = f\,\frac{c + v_P}{c - v_Z}$$

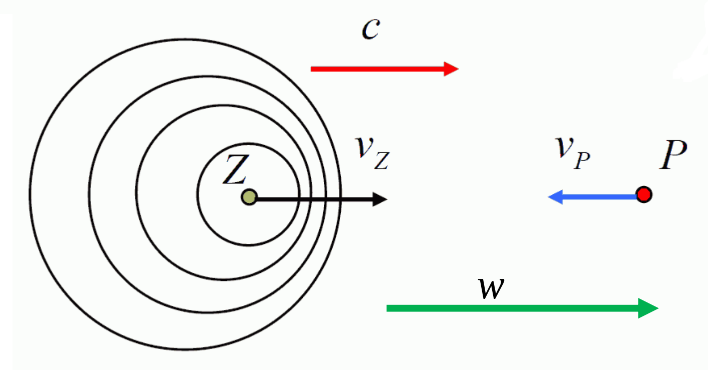


d) pohybuje se též prostředí rychlostí w

ekvivalentní $v_P \rightarrow v_P + w \wedge v_Z \rightarrow v_Z - w$

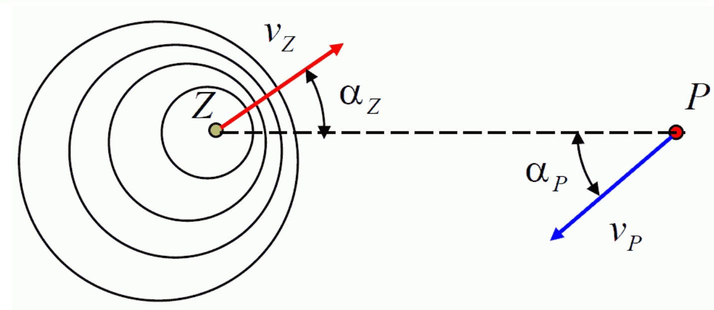
$$f' = f\,\frac{c + w + v_P}{c + w - v_Z}$$

Př: $\left.\begin{array}{r} v_P = 0 \\ v_Z = 0 \\ w \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f' = f$



e) zdroj i pozorovatel pohyb pod obecnými úhly

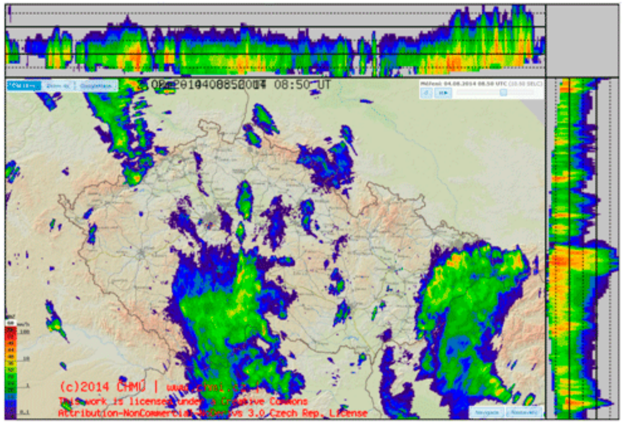
$$f' = f\,\frac{c + v_P \cos\alpha_P}{c - v_Z \cos\alpha_Z}$$



Využití Dopplerova jevu

- akustické vlny, elmg. vlny
- astronomie
  - Ch. A. Doppler (1803 – 1853, Rakousko-Uhersko)
  - barevný posuv ve spektrech dvojhvězd
  - rudý posuv spekter galaxií (Hubble)

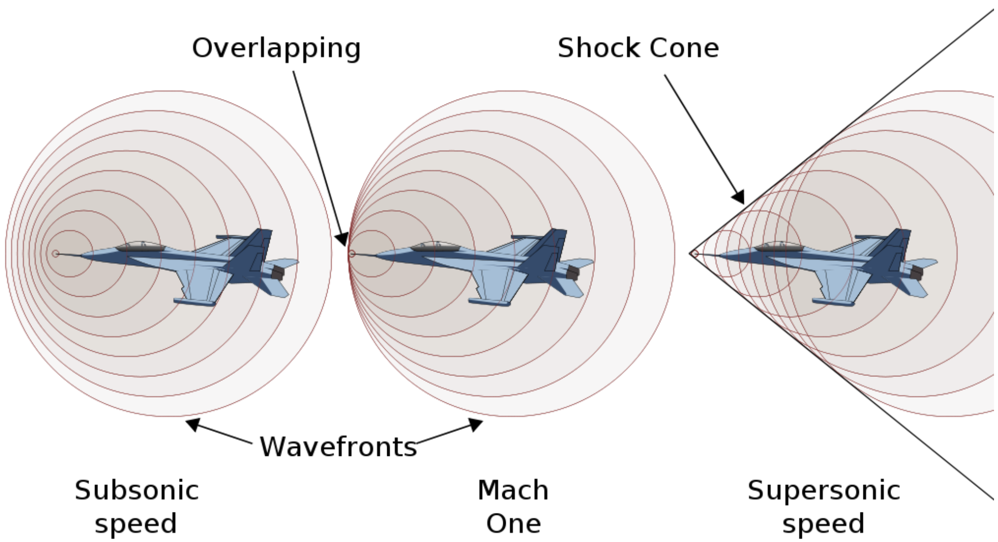
- radary
- sonary

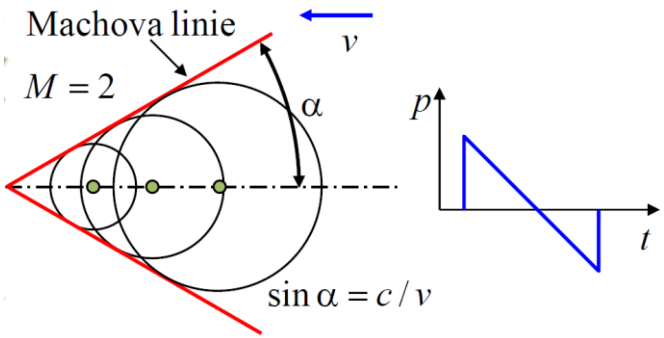


http://www.in-pocasi.cz/clanky/teorie/radar-srazky-6.8.2014/

- meteorologický dopplerovský radar
- lodní sonary
- měření rychlosti
  - letadla, ponorky, policie
  - rychlost proudění kapalin
    - krev (průchodnost artérií, odrazy od krvinek)
    - studium rychlostních profilů (testovací částice)

Aerodynamický třesk





By Chabacano (Concept: Image:Comportamiento ondas.JPG) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html), CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) or CC-BY-2.5 (http://creativecommons.org/licenses/by/2.5)], via Wikimedia Commons

By Ensign John Gay, U.S. Navy [Public domain], via Wikimedia Commons (http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d0/FA-18_Hornet_breaking_sound_barrier_%287_July_1999%29.jpg)

rázová vlna – skoková změna tlaku a hustoty, která se šíří prostředím

Machovo číslo $Ma = \frac{v}{c}$

http://www.youtube.com/watch?v=y-fOXqF-TnQ

http://www.youtube.com/watch?v=x0gvWhDgm_E

http://www.youtube.com/watch?v=BHBevPYVzaY