Jméno:	1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
16. 6. 2026

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba* $(x-5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, *nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

---

1. Uvažujme funkci $f(x) = \exp(x) - (2x+1)^2$ definovanou na $\mathbb{R}$.
   (a) [3 b.] Najděte limity funkce $f(x)$ v $+\infty$ a v $-\infty$.
   (b) [3 b.] Najděte maximální otevřené intervaly, na nichž je funkce f konvexní, a maximální otevřené intervaly, na nichž je konkávní.
   (c) [4 b.] Kolik řešení má rovnice $f(x) = 0$? (Nemusíte určovat hodnoty těch řešení, stačí jen určit jejich počet. Všimněte si, že jedno řešení je například $x = 0$.)

2. (a) [3 b.] Definujte, co je *hromadný bod* posloupnosti (a_n).
   (b) [3 b.] Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ a $(c_n)_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti splňující $a_n \le b_n \le c_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jestliže je číslo $H \in \mathbb{R}$ hromadným bodem (a_n) i (c_n), plyne z toho, že H je i hromadným bodem (b_n)?
   (c) [4 b.] Mějme posloupnost $(d_n)_{n=1}^\infty$ definovanou pomocí rekurentních rovností: $d_1 = 1$ a pro každé $n \ge 2$ platí $d_n = d_{n-1} + \frac{1}{n}$. Kolik má $(d_n)_{n=1}^\infty$ hromadných bodů a které body to jsou?

3. (a) [3 b.] Definujte, co znamená, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě $A \in \mathbb{R}$, a co znamená, že funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.
   (b) [3 b.] Zformulujte Bolzanovu větu (o nulových bodech spojité funkce). Nemusíte ji dokazovat.
   (c) [4 b.] Dokažte následující tvrzení:
   "Jestliže f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$ a jestliže existují body $A, B \in \mathbb{R}$ takové, že $f(A) > A$ a $f(B) < B$, tak nutně existuje bod $C \in \mathbb{R}$ takový, že $f(C) = C$."

4. (a) [3 b.] Definujme pro $x \in (0, +\infty)$ funkci
   $$g(x) = \int_0^x \exp(t^2)\, dt.$$
   Čemu se rovná derivace funkce $g(x)$ v bodě $x = 2$? (Zde není potřeba hledat vzorec pro samotnou funkci g, stačí jen určit její derivaci v tom konkrétním bodě $x = 2$.)
   (b) [3 b.] Zformulujte větu o substituci pro výpočet primitivní funkce. Nemusíte ji dokazovat, nezapomeňte ale uvést předpoklady kladené na funkce, které v té větě vystupují. Znáte-li více verzí této věty, zformulujte kteroukoliv z nich.
   (c) [4 b.] Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \exp(\sin(x))\sin(x)\cos(x)$.