Matematická analýza I.

Dalibor Pražák

Míša Šídová

Literatura uvedená v SIS

- Černý, R., Pokorný, M.: Základy matematické analýzy pro studenty fyziky 1, MATFYZPRESS, 2020
- Kopáček J.: Matematika pro fyziky I., MATFYZPRESS, 2004
- Kopáček J. a kol. : Příklady z matematiky pro fyziky I., MATFYZPRESS, 2002
- Jarník J.: Diferenciální počet I, ACADEMIA 1984
- Jarník J.: Diferenciální počet II, ACADEMIA 1984
- Jarník J.: Integrální počet I, ACADEMIA 1984
- Dĕmidovič V.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003
- http://www.mff.cuni.cz/prednasky/NMAF051">Videozáznamy přednášek

Obsah těchto zápisků

29. 9. 2022

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/051/

Úvod - značení

P, Q	výroky
A, B, M	množiny
x, y	prvky množin

$P \& Q$	P a zároveň Q
$P \vee Q$	P nebo Q
$P \Rightarrow Q$	P implikuje Q
$P \Leftrightarrow Q$	P je ekvivalentní Q
$\neg P$	negace P

$x \in M$	x je prvkem M
$\forall x \in A$	(pro) každé x z A
$\exists y \in B$	existuje alespoň jedno y z B
$\exists! y \in B$	existuje právě jedno y z B
$A \subset B$	A je podmnožina B

DEFINOVÁNÍ MNOŽIN

$\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$	množina prvků a_1 až a_n
$\{x \in M;\ \varphi(x)\}$	podmnožina prvků množiny M takových, že splňují vlastnost φ
$\emptyset$	prázdná množina

$A \cup B$	sjednocení množin
$A \cap B$	průnik množin
$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$	rozdíl množin

Reálná čísla

Věta A.1 [Aritmetika v $\mathbb{R}$]:

Existuje množina $\mathbb{R}$, prvky $0, 1 \in \mathbb{R}$ a operace "$\cdot$" (krát) a "$+$" (plus) takové, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

(i) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ KOMUTATIVITA SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ ASOCIATIVITA SČÍTÁNÍ

(iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ DISTRIBUTIVITA NÁSOBENÍ VZHLEDEM KE SČÍTÁNÍ

(iv) $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$ jakými všemi způsoby zůstává x iksem (neutrální prvky)

(v) $0 \cdot x = 0$; tedy $(x \cdot y = 0) \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$ o nule

(vi) $\forall x, z \in \mathbb{R}\ \exists! w \in \mathbb{R}: x + w = z$, značíme $w = z - x$ odčítání

(vii) $\forall x, z \in \mathbb{R}^{x \neq 0}\ \exists! w \in \mathbb{R}: w \cdot x = z$, značíme $w = \frac{z}{x}$ dělení

7 axiomů aritmetiky

Pozn. $-x$ je zkratka za $0 - x$

x^{-1} je zkratka za $\frac{1}{x}$

Axiomy (i) - (vii) $\overset{\text{implikují}}{\Longrightarrow}$ všechny známé pouční

Věta A.2 [Uspořádání $\mathbb{R}$]:

Na $\mathbb{R}$ je definována relace "$<$" (menší než) tak, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

(i) buď $x = y$ nebo $x < y$ nebo $x > y$ LINEARITA USPOŘÁDÁNÍ - každá 2 čísla lze porovnat nebo jsou stejná

(ii) $x < y \ \& \ y < z \Rightarrow x < z$ TRANZITIVITA

(iii) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ přičtením se rovnost nemění

(iv) $0 < x \ \& \ 0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y$ součin dvou kladných čísel je kladný

Pozn. $x \leq y$ zkratka pro $(x < y) \vee (x = y)$

Axiomy (i) - (iv) $\Rightarrow$ všechny další pouční

např. $x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$x < y \ \& \ z < w \Rightarrow x + z \leq y + w$

$x < 0 \ \& \ y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

Zkusím dokázat/odvodit $x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

pro $x > 0$ ... rovnou 4. axiom

pro $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ $\quad (-x) \cdot (-x) > 0$ 4. axiom

tj chci dokázat že $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$

$(-1 \cdot x) \cdot (-1 \cdot x) = (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot x$

tj chci dokázat $(-1) \cdot (-1) = 1$?

$(-1) \cdot (-1) = (-1)(1 - 2) = -1 + (-1) \cdot (-2)$

$(-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2$

$1 = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1)(-1)$

$1 = (-1)(-1) \cdot (2 - 1)$

$1 = (-1) \cdot (-1)$

$0 - 1 = -1$

$0 = -1 + 1$

není z axiomů

Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$ přirozená čísla

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0; -1; -2; \dots\}$ celá čísla

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R};\ \exists p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N}$ taková, že $x = \frac{p}{q}\}$ racionální čísla

INTERVALY s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ otevřený interval

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$ uzavřený interval

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \le b\}$ polouzavřené intervaly

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$

neomezené intervaly:

$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$

$[a; \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x\}$

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \le b\}$

ABSOLUTNÍ HODNOTA

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme absolutní hodnotu

symbol definice

$$|x| := \begin{cases} = x & \text{pro } x \ge 0 \\ = -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Platí $|x| \ge 0$

$|x| = 0 \iff x = 0$

$|x| = |-x|$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

vztah absolutní hodnoty k součtu – trojúhelníková nerovnost

na to je nejdřív potřeba se připravit

Lemma 1.1: Nechť $a \ge 0$, $b \in \mathbb{R}$ libovolné. Potom: $|b| \le a \iff -a \le b \le a$

to tak nějak intuitivně z představy číselné osy dává smysl

Důkaz: (rozborem případů)

1) $b \ge 0$ pak $|b| = b$ tedy dokazujeme $b \le a \iff -a \le b \le a$

- b i a jsou nezáporná čísla, tedy $-a \le b$ platí vždy
- $b \le a$ a $b \le a$ jsou zjevně ekvivalentní

2) $b < 0$ pak $|b| = -b$

tedy dokazujeme $-b \le a \iff -a \le b \le a$

- b je záporné, a nezáporné, tedy $b \le a$ platí vždy
- rovnosti $-b \le a$ a $-a \le b$ jsou ekvivalentní, protože přičítání znak nerovnosti nemění

$-a \le b$

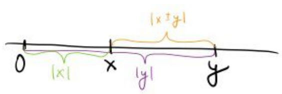
$0 \le b + a$

$-b \le a$

Věta 1.1 [Trojúhelníková nerovnost]

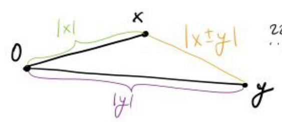
Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí (i) $|x \pm y| \le |x| + |y|$

(ii) $|x \pm y| \ge \big||x| - |y|\big|$



(i) ⊢⊣ ≤ ⊢⊣ + ⊢⊣

(ii) ⊢⊣ ≥ ⊢⊣ − ⊢⊣



??? je tohle správný obrázek?

Důkaz: (i) platí $|\pm y| = |y|$

tedy platí: $\underbrace{|\pm y|}_{|b|} \le \underbrace{|y|}_{a}$

dosazujeme do lemmatu výše

$|\pm y| \le |y| \iff -|y| \le \pm y \le |y|$

to samé se dá napsat i pro x resp. pro $|x| \le |x|$

$-|x| \le x \le |x|$

nerovnosti sečteme

$-|x| - |y| \le \underbrace{x \pm y}_{b} \le \underbrace{|x| + |y|}_{a}$

na to se opět podíváme jako na lemma výše

$\Rightarrow$ $|x \pm y| \le |x| + |y|$ a to je to, co jsme dokazovali

(ii) TRIK! $-y = x - (x+y)$

tedy použiju (i) téhle věty, které už je dokázané

$|-y| = |x - (x+y)|$

$|x - (x+y)| \le |x| + |-(x+y)|$

protože $|a| = |-a|$

$|x - (x+y)| \le |x| + |x+y|$

$|y| \le |x| + |x+y|$

$|y| - |x| \le |x+y|$

$|x| - |y| \ge -|x+y|$

analogicky prohozením x a y

$|x| - |y| \le |x+y|$

$-\underbrace{|x+y|}_{a} \le \underbrace{|x| - |y|}_{b} \le \underbrace{|x+y|}_{a}$

to zapadá do schématu lemmatu

$\big||x| - |y|\big| \le |x+y|$ což jsme dokazovali

ale je to jen $|x+y|$, ne $|x-y|$, což si zkusím sama na další straně

(ii) $-y = -x + (x-y)$

$|-y| = |-x + (x-y)|$ použiju část věty (i)

$|x + (x-y)| \leq |-x| + |x-y|$

$|-y| \leq |-x| + |x-y|$ $\quad |-y| = |y|$, $|-x| = |x|$

$|y| - |x| \leq |x-y|$ (1)

$|x| - |y| \leq |y-x|$ $\quad |y-x| = |-(-y+x)| = |-y+x|$

$|x| - |y| \leq |x-y|$ (2) $\quad$ (1) $-|x-y| \leq |x| - |y|$

$$-\underbrace{|x-y|}_{a} \leq \underbrace{|x|-|y|}_{b} \leq \underbrace{|x-y|}_{a}$$

$||x|-|y|| \leq |x-y|$ což jsme dokazovali

Věta B [Odmocnina v $\mathbb{R}$]:

1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé číslo. Pak $\forall a \in [0;\infty)\ \exists!\ b \in [0;\infty):\ b^n = a$
2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché. Pak $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists!\ b \in \mathbb{R}:\ b^n = a$

Značíme $b = \sqrt[n]{a}$, nazýváme n-tá odmocnina.

Pozn. $\sqrt{1} = \sqrt[2]{1} = 1$ $\qquad \sqrt{-1}$ v $\mathbb{R}$ není definována!

$\sqrt[3]{-1} = -1$

$\sqrt{x^2} = |x|$ tj. $\sqrt{x^2} \begin{cases} = x & \text{pro } x \geq 0 \\ = -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$

platí pro všechny sudé odmocniny

naproti tomu $\sqrt[n]{x^n} = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ LICHÉ a $\forall x \in \mathbb{R}$

Přednáška (2) 5.10. 2022

Věty A.1 – A.2 axiomy, nebudeme dokazovat
Věty B, C týkající se funkcí
Věty 1.1, 1.2 věty tvořící přednášku, budeme dokazovat

Věta 1.2: Existují iracionální čísla.

Důkaz: ?? (= značení, že se budeme snažit o důkaz sporem)
Věta B $\Rightarrow \exists x > 0$ takové, že $x^2 = 3$, ukážeme, že $x \notin \mathbb{Q}$

nechť $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$, BÚNO (bez újmy na obecnosti) p, q nesoudělné (kdyby ne, zkrátíme)
$qx = p$
$q^2 3 = p^2 \rightarrow$ tedy 3 dělí p^2
$p = 3k \quad p^2 = 9k^2 = 3q^2$
$3k^2 = q^2 \Rightarrow$ 3 dělí q^2
z pomocné úvahy $\Rightarrow$ 3 dělí q
což znamená, že p, q nejsou nesoudělná, ale to byl předpoklad ↯

pomocná úvaha 3 dělí $p^2 \Rightarrow$ 3 dělí p
důkaz: lze psát $p = 3k + l \quad k \in \mathbb{Z}, l \in \{0, 1, 2\}$
$p^2 = (3k+l)^2 = 9k^2 + 6kl + l^2$
$\Rightarrow$ 3 dělí l^2
rozbor případů: $l = 0 \quad l^2 = 0$
$\left.\begin{array}{l} l = 1 \quad l^2 = 1 \\ l = 2 \quad l^2 = 4 \end{array}\right\}$ nejsou dělitelné 3
nutně $l = 0$, což znamená $p = 3k \Rightarrow 3 \mid p$

Věta A3 [Vlastnosti $\mathbb{N}$]:
(i) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}: x < n$ Archimedova vlastnost $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: n \cdot \varepsilon > 1$ Eudoxova vlastnost
Pozn. (jiná formulace)
(ii) nechť $M \subset \mathbb{N}$ splňuje 1) $1 \in M$
2) $\forall n \in \mathbb{N}: n \in M \Rightarrow n+1 \in M$
potom $M = \mathbb{N}$ (1) princip indukce
(2) jiná formulace: každá $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$ má nejmenší prvek

(3) indukce ještě jinak: Nechť pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a formuli $\psi(n)$ (vlastnost přirozených čísel) platí:
1) $\psi(n_0)$
2) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$
Potom $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \psi(n)$.

Př. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: \underbrace{n^2 \leq 2^n}_{\text{formule}}$
$n_0 = 4$

Věta 1.3: Každý $I = (a, b)$ obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Důkaz: (budeme ho dělat pouze pro iracionální, racionální by byla podobně)
1. stačí umět najít v každém intervalu jedno iracionální číslo (pak zkrátím interval a hledám znovu a tak dokola)
2. BÚNO $I \subset [0, \infty)$ – nechť $I = (a, b) \subset (-\infty, 0] \rightarrow$ přejdu k $\tilde{I} = (-b, -a)$ $x \in \mathbb{Q} \iff -x \in \mathbb{Q}$
– nechť $0 \in (a, b) \rightarrow$ přejdu k $\tilde{I} \in (0, b)$

budu dokazovat $\exists y_1 \in (a, b)$, $y_1 \notin \mathbb{Q}$, navíc $0 \leq a < b$
IDEA: uvažuji čísla $\frac{m}{n}\sqrt{3}$ $m \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$ n pevné, dost velké
fixuji $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{\sqrt{3}}{n} < b - a$, tj $\frac{\sqrt{3}}{b-a} < n$
nechť $m \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $\frac{m}{n}\sqrt{3} \geq b$

položme $y_1 = \frac{m-1}{n}\sqrt{3} > b$

pozoruji: $m \geq 2$
$y_1 \in (a, b)$, neboť $\frac{m-1}{n}\sqrt{3} < b$ & $y_1 = \underbrace{\frac{m}{n}\sqrt{3}}_{\geq b} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{n}}_{> a - b} > a$
$y_1 \notin \mathbb{Q}$

Přednáška 2

5.10.2022

Def.: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Potom

Číslo $x \in M$ se nazve **maximum (největší prvek)**, pokud $\forall y \in M: \ y \leq x$. $\quad x = \max M$

Číslo $x \in M$ se nazve **minimum (nejmenší prvek)**, pokud $\forall y \in M \quad y \geq x$. $\quad x = \min M$

Číslo $K \in \mathbb{R}$ se nazve **horní odhad M**, pokud $\forall x \in M: x \leq K$.

Číslo $L \in \mathbb{R}$ se nazve **dolní odhad M**, pokud $\forall x \in M: x \geq L$.

Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazve **shora omezená**, má-li nějaký horní odhad.

Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazve **zdola omezená**, má-li nějaký dolní odhad.

Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazve **omezená**, je-li shora i zdola omezená.

Př. $M = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R}, \ 0 \leq x < 1\}$

zdola omezená $(L = -1)$

shora omezená $(K = 1)$

$x = 0$ minimum

maximum neexistuje

Př. $M = \mathbb{N}$

zdola omezená

minimum $x = 1$

maximum neexistuje

Def.: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$ se nazve **supremum množiny M**, značíme $S = \sup M$, jestliže:

(i) $\forall x \in M: \ x \leq S$

(ii) $\forall S' \in \mathbb{R}, \ S' < S \quad \exists y \in M: \ y > S'$

Supremum zobecňuje maximum.
$x = \max M \ \Rightarrow \ x = \sup M$

Pozn. (i) $\Leftrightarrow$ S je horní odhad M

(ii) $\Leftrightarrow$ $\forall S' < S$ není horní odhad

} supremum je nejmenší horní odhad

existuje nejvýše jedno supremum

Věta A4 [O úplnosti $\mathbb{R}$]: Nechť množina $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, shora omezená. Pak $\exists S \in \mathbb{R}$ takové, že $S = \sup M$.

[= axiom suprema]

ekvivalentní

Def. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$ se nazve **infimum množiny M**, značíme $s = \inf M$, jestliže

(i) $\forall x \in M: \ x \geq s$

(ii) $\forall s' \in \mathbb{R}, \ s' > s \quad \exists y \in M: \ y < s'$.

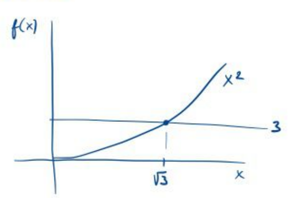
pozn. infimum je největší dolní odhad

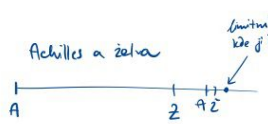
Infimum zobecňuje minimum.
$x = \min M \ \Rightarrow \ x = \inf M$

Věta A4': Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, zdola omezená, pak $\exists s \in \mathbb{R}$ takové, že $s = \inf M$.

Illustrace:

6.10.2022





v $\mathbb{R}$ se grafy protnou v $x = \sqrt{3}$

v $\mathbb{Q}$ by se grafy neprotnuly

Def. Komplexní čísla $\mathbb{C} = \{z = x + yi;\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$

↳ ekvivalentní zápis

reálná část $\operatorname{Re} z = x$

imaginární část $\operatorname{Im} z = y$

Def. Rozšířená reálná čísla $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Aritmetiku a uspořádání v $\mathbb{R}^*$ definuji takto:

- $\forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty$, zároveň $-\infty < +\infty$ — uspořádání
- $\forall x \in \mathbb{R}: x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, dále $+\infty + \infty = +\infty$; $-\infty - \infty = -\infty$ — sčítání
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0: x(\pm\infty) = \pm\infty$, dále $(\pm\infty)(+\infty) = (\pm\infty)$
  $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0: x(\pm\infty) = \mp\infty$, dále $(\pm\infty)(-\infty) = \mp\infty$ — násobení
- $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{x}{\pm\infty} = 0$ — dělení

POZOR – není definováno:

$+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$

$0(\pm\infty)$

$\frac{x}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Proč?

Protože aritmetika limit by jinak nebyla hezká

Funkce

Def. X, Y ... množiny

funkce z X do Y ... předpis, který pro každé $x \in X$ určí jediné $y \in Y$

píšeme $f: X \to Y$

$x \mapsto f(x)$ $\quad f(x) = y$

Potom pro $M \subset X$, $N \subset Y$ definuji

$f(M) = \{y \in Y,\ \exists x \in M: f(x) = y\}$ — obraz množiny M

$f^{-1}(N) = \{x \in X;\ f(x) \in N\}$ — vzor množiny N

Funkce f je prostá v X, jestliže $\forall x, y \in X,\ x \neq y: f(x) \neq f(y)$

Funkce f zobrazuje X na Y, jestliže $f(X) = Y$ neboli $\forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$

Funkce je vzájemně jednoznačná $\overset{\text{jestliže}}{:}$ je prostá a na. $\Rightarrow$ lze definovat $f_{-1}: Y \to X$ (inverzní funkci)

Pokud $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, lze definovat složené zobrazení (superpozici) $g \circ f: X \to Z$

$x \mapsto g(f(x))$

Pozn.: lze psát $f: X \to Y$, i když f není definováno úplně všude v X.

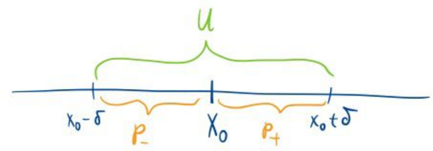
pak Definiční obor $D_f = \{x \in X;\ f(x) \text{ je definováno}\}$

Obor hodnot $H_f = f(D_f)$ ... obraz definičního oboru

KAP. 2 : REÁLNÉ FUNKCE

LIMITA A SPOJITOST

Def. (Okolí bodu) Nechť $\delta > 0$. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme



$U(x_0,\delta) = (x_0-\delta; x_0+\delta)$ kruhové okolí

$P(x_0,\delta) = (x_0-\delta; x_0) \cup (x_0; x_0+\delta)$ prstencové okolí

$U_+(x_0,\delta) = [x_0; x_0+\delta)$ pravé } kruhové okolí

$U_-(x_0,\delta) = (x_0-\delta; x_0]$ levé

$P_+(x_0,\delta) = (x_0; x_0+\delta)$ pravé } prstencové okolí

$P_-(x_0;\delta) = (x_0-\delta; x_0)$ levé

Dále definujeme: $U(+\infty;\delta) = U_-(+\infty;\delta) = \left(\frac{1}{\delta}; +\infty\right]$

$P(+\infty,\delta) = P_-(+\infty;\delta) = \left(\frac{1}{\delta}; +\infty\right)$

okolí nekonečna $U(-\infty;\delta) = U_+(-\infty;\delta) = \left[-\infty; -\frac{1}{\delta}\right)$

$P(-\infty;\delta) = P_+(-\infty;\delta) = \left(-\infty; -\frac{1}{\delta}\right)$

nedefinujeme $U_+(+\infty;\delta)$, $P_+(+\infty;\delta)$, $U_-(-\infty;\delta)$; $P_-(-\infty;\delta)$

Pozn.
- $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow U(x_0,\delta_1) \subset U(x_0;\delta_2)$ tj menší δ ⇒ menší okolí
- rozdíl mezi U a P je bod x_0, tj platí $U(x_0,\delta) = P(x_0,\delta) \cup \{x_0\}$
  $P(x_0,\delta) = U(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$
- pro $x_0 \in \mathbb{R}$ platí $U(x_0,\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < \delta\}$ (viz lemma 1.1)
  $P(x_0,\delta) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-x_0| < \delta\}$
- píšeme $U(x_0)$, $P(x_0)$, pokud na $\delta > 0$ nezáleží
  „Na jistém $U(x_0)$ platí…" $\Leftrightarrow$ $\exists \delta > 0$ takové, že na $U(x_0,\delta)$ platí…

Limita

Def.: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(x_0,\delta)$. Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0, jestliže:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): [x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon)]$$

(závorky pro přehlednost, důležité pořadí kvantifikátorů)

Značíme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ nebo $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$.

Terminologie: $A \in \mathbb{R}$ … vlastní limita
$A = \pm\infty$ … nevlastní limita

Pozn.
- tvrdíme, že pro x blízké (ale různé od) x_0 ⇒ $f(x)$ blízké nebo rovné $f(x_0)$
- nezávisí na $f(x_0)$ - s tím vlastně nepracujeme, v bodě x_0 funkce nemusí být definována

Př. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ tj chci dokázat $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in P(2,\delta) \Rightarrow x^2 \in U(4,\varepsilon)$

$\delta < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$

píšeme $x^2-4 = (x-2)(x+2) = (x-2)(x-2+4)$

$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| \leq |x-2| \cdot |x-2+4|$

$\leq |x-2| \cdot (|x-2|+4)$

$\varepsilon > 0$ je dáno, položme $\delta = \min\{1; \frac{\varepsilon}{5}\}$ – to nám zajistí, že platí $\delta \leq 1$ & $\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$

$$|x^2-4| \leq \underbrace{|x-2|}_{\substack{|x-2|<\delta \\ \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}}} \cdot \Big(\underbrace{|x-2|}_{\substack{|x-2|<\delta \\ \Rightarrow |x-2|<1}} + 4\Big)$$

$\Rightarrow |x-2|+4 < 5$

DCV

Př. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$

Přednáška ③ 6.10.2022

Věta 2.1 (Princip oddělení) Nechť $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \neq x_1$. Pak $\exists \delta > 0$ taková, že $U(x_0,\delta) \cap U(x_1,\delta) = \emptyset$ (okolí jsou disjunktní), speciálně pro $x_0 \notin U(x_1,\delta)$, $x_1 \notin U(x_0,\delta)$.

Důkaz: Různé případy

1) $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$; položme $\delta = \dfrac{|x_1 - x_0|}{3} > 0$

dá se dokázat sporem

$y \in U(x_0,\delta) \cap U(x_1,\delta)$: $\quad |x_0 - x_1| = |(x_0 - y) - (x_1 - y)|$

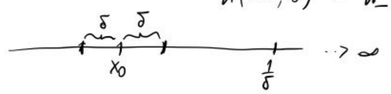
2) $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 = -\infty$, tj. $U(-\infty;\delta) = [-\infty; -\frac{1}{\delta})$
$U(x_0,\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ } stačí zaručit $-\frac{1}{\delta} < x_0 - \delta$

i) $x_0 > 0$ stačí položit $\delta = \frac{x_0}{2}$

ii) $x_0 \leq 0$ položme $\delta = \min\left\{1; -\frac{1}{x_0 - 1}\right\} \Rightarrow \delta \leq 1$ & $-\frac{1}{\delta} < x_0 - 1$

pokud $\delta < 1$
pak $x_0 - 1 < x_0 - \delta$

3) $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 = +\infty$ $\quad U(x_0;\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$U(+\infty;\delta) = U_-(+\infty;\delta) = (\frac{1}{\delta}; \infty]$



$x_0 + \delta < \frac{1}{\delta}$

pro $x_0 < 0$ postačí zvolit $\delta \leq |x_0|$ pak $x_0 + \delta \leq 0$ a $\frac{1}{\delta} > 0$

pro $x_0 = 0$ stačí zaručit $\delta < 1$ pak $0 + \delta = \delta$ a $\delta < \frac{1}{\delta}$

pro $x_0 > 0$ chci $\delta < \frac{1}{x_0 + \delta}$ $\quad \delta < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_0+\delta} > \frac{1}{x_0 + 1}$

$\delta \leq \frac{1}{x_0+1} < \frac{1}{x_0+\delta}$

$\delta = \min\left\{1, \frac{1}{x_0+1}\right\}$ → pak tohle platí ↗

DCV

Př $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$

pro $x_0 \in \mathbb{R}$ jsem to udělala na stránce, kde začíná Přednáška ⑤

$x_0 = +\infty$ $\quad f(x) = x \quad f(x_0) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\varepsilon > 0$ dáno

tvrzení: $\exists \delta > 0$: $x \in P(+\infty;\delta) \Rightarrow x \in U(+\infty;\varepsilon)$

$\frac{1}{\delta} < x < +\infty \qquad \frac{1}{\varepsilon} < x$

položíme-li $\delta = \varepsilon$, pak implikace říká

$\frac{1}{\varepsilon} < x < +\infty \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x$

což zřejmě platí

$x_0 = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\varepsilon > 0$ dáno

tvrzení: $\exists \delta > 0$: $x \in P(-\infty;\delta) \Rightarrow x \in U(-\infty;\varepsilon)$

$-\infty < x < -\frac{1}{\delta} \qquad x < -\frac{1}{\varepsilon}$

položme $\delta = \varepsilon$ pak $-\infty < x < -\frac{1}{\varepsilon}$ je silnější tvrzení než $x < -\frac{1}{\varepsilon}$

Přednáška ④

12. 10. 2022

Def. Reálná funkce $f(x)$ se na $M \subset D_f$ nazve

$$\left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \\ \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \end{array}\right\} \text{ pokud pro každé } x, y \in M,\ x < y : \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) < f(y) \\ f(x) > f(y) \\ f(x) \le f(y) \\ f(x) \ge f(y) \end{array}\right.$$

ryze monotónní ($f(x) < f(y)$, $f(x) > f(y)$)

monotónní ($f(x) < f(y)$, $f(x) > f(y)$, $f(x) \le f(y)$, $f(x) \ge f(y)$)

Def.: Funkce $f(x)$ se nazve:

- **sudá**, pokud $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ & $f(-x) = f(x)$
- **lichá**, pokud $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ & $f(-x) = -f(x)$
- **p-periodická**, pokud $x \in D_f \Rightarrow x+p \in D_f$ & $f(x) = f(x+p)$

Def. Funkce $f(x)$ se nazve na množině $M \subset D_f$:

- **shora omezená**, pokud $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in M : f(x) \le K$
- **zdola omezená**, pokud $\exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : f(x) \ge L$
- **omezená**, je-li zde shora i zdola omezená

  tj pokud $\exists K, L \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : L \le f(x) \le K$

  ekvivalentně pokud $\exists C > 0\ \forall x \in M : |f(x)| \le C \iff -C \le f(x) \le C$

stačí zvolit C takové, že: $K \le C$ & $L \ge -C$

jasné

Úmluva: když se řekne reálná funkce, myslí se $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebereme do hry nekonečna)

z minula: definice limity
princip oddělení

Důsledky principu oddělení (věta 2.1)

① limita je nejvýše jedna

$\boxed{??}$ nechť $\underbrace{f(x) \to A,\ x \to x_0}_{(*)}$ & $\underbrace{f(x) \to B,\ x \to x_0}_{(**)}$ kde $A \neq B$

Věta 2.1: $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{U}(A,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(B,\varepsilon) = \emptyset$

$(*)$ $\exists \delta_1 > 0$ taková, že $x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

$(**)$ $\exists \delta_2 > 0$ taková, že $x \in P(x_0, \delta_2) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(B,\varepsilon)$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pak BÚNO $\delta \le \delta_0$, $\delta_0 > 0$ je takové že $P(x_0, \delta) \subset D_f$

Pak $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(B,\varepsilon)$ ↯

② limita nemusí být definována

např. Dirichletova funkce $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

tvrzení: $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} D(x)$ pro $x_0 \in \mathbb{R}$ tj. $f(x) \not\to A,\ x \to x_0$ pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$ libovolné pevné

budeme chtít dokazovat $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 : \underbrace{D(P(x_0,\delta))}_{\text{obsahuje } \{0,1\}} \not\subset \mathcal{U}(A,\varepsilon)$ ⇒ stačí volit ε takové, že $0 \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon) \vee 1 \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

(jsou to funkční hodnoty v $P(x_0;\delta)$) – to víme z věty 1.3 – každý interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel

Přednáška (4)

12. 10. 2022

Def. (Jednostranná limita) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P_+(x_0)$ (respektive $P_-(x_0)$).
Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme limita $f(x)$ v bodě x_0 zprava (respektive zleva), jestliže:

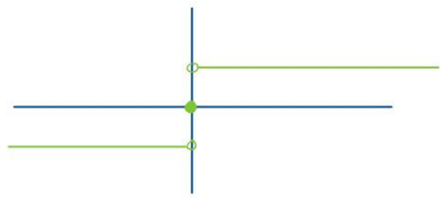
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x \in P_+(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$$

resp. $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x \in P_-(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$$

Značíme $A = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ (zprava)

resp. $A = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ (zleva)

Př funkce signum $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$



Tvrdím: $\lim\limits_{x \to 0\pm} \operatorname{sgn} x = \pm 1$

Důkaz (zprava) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ takové, že $x \in P_+(0; \delta) \Rightarrow \operatorname{sgn}(x) \in \mathcal{U}(1; \varepsilon)$

tedy $x \in (0; \delta) \Rightarrow |\underbrace{\operatorname{sgn} x}_{=1} - 1| < \varepsilon$

$\hookrightarrow x > 0$

$\Rightarrow$ platí pro každé ε a každé δ

Př $\lim\limits_{x \to 0\pm} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \pm\infty$

Důkaz (zleva): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ takové, že $x \in P_-(0; \delta) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \in \mathcal{U}(-\infty; \varepsilon)$

$(-\delta; 0)$ $\quad$ $(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$

$-\delta < x < 0$ $\quad$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} < -\dfrac{1}{\varepsilon}$

ε dáno; položme $\delta = \varepsilon^3$

$-\varepsilon^3 < x < 0$ $\qquad$ ε je kladné $\to$ $-\varepsilon$ záp. obrací znaménko

$\sqrt[3]{-\varepsilon^3} < \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ x je záporné $\to$ $\sqrt[3]{x}$ taky obrací znaménko

$-\varepsilon < \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ takže celkově se nezmění

$-\dfrac{1}{\varepsilon} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

tohle se dalo udělat protože ta funkce je lichá a rostoucí

Věta 2.2 Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existuje a rovná se A

(2) $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ existují a rovnají se téměř A

Důkaz:

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \boxed{x \in P(x_0; \delta)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \boxed{x \in P_+(x_0; \delta)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$

& $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \boxed{x \in P_-(x_0; \delta)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$

liší se to jen tady

(1) $\Rightarrow$ (2) protože $\mathcal{U}_\pm(x_0, \delta) \subset \mathcal{U}_\pm(x_0; \delta)$

(2) $\Rightarrow$ (1) dáno $\varepsilon > 0$ dle (2+) $\exists \delta_1 > 0 : \ x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$

dle (2−) $\exists \delta_2 > 0 : \ x \in P(x_0; \delta_2) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$

položíme $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$

nechť $x \in P(x_0; \delta) \Rightarrow x \in P_+(x_0; \delta) \vee x \in P_-(x_0; \delta)$

(a+dy) $\Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \varepsilon)$

Věta 2.3 (Aritmetika limit – 1. verze)

Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$, $x \to x_0$, kde $B \neq A$, $B, A \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom:

(1) $f(x) + g(x) \to A + B$

(2) $f(x) - g(x) \to A - B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

(4) pokud $B \neq 0$, pak $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$

všechno pro $x \to x_0$

Přednáška (4) — 12. 10. 2022

Lemma 2.1

(1) Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Pak $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0;\delta)$.

(2) Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = B \in \mathbb{R}^*$, $B \neq 0$. Pak $f(x)$ je „odražená od nuly" na jistém $P(x_0;\delta)$.

Důkaz:

(1) cíl: $\exists\delta>0$ takové, že $f(x)$ omezená na $P(x_0,\delta)$

tj. $\exists\delta>0\ \ \exists C>0,\ |f(x)|\leq C\ \ \forall x\in P(x_0;\delta)$

víme $f(x)\to A,\ x\to x_0$

volme např. $\varepsilon=1$ ... $\exists\delta>0:\ f(x)\in\mathcal{U}(A;1) = (A-1;A+1)$

$\forall x\in P(x_0;\delta)$

$|f(x)|\leq C,\ C>0$ dost velké

(2) cíl: $\exists\delta>0\ \ \underbrace{\exists\Delta>0 \text{ takové, že } |f(x)|\geq\Delta}_{=\text{odražený od nuly}},\ x\in P(x_0;\delta)$

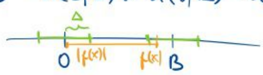
víme $f(x)\to B\neq 0$

věta 2.1: $\exists\Delta>0$ takové, že $\mathcal{U}(B;\Delta)\cap\mathcal{U}(0;\Delta)=\emptyset$

z limity víme $\exists\delta>0:\ x\in P(x_0;\delta)\Rightarrow f(x)\in\mathcal{U}(B;\Delta)$

(ε může být libovolné, tedy klidně $\varepsilon=\Delta$)

protože $\mathcal{U}(B;\Delta)\cap\mathcal{U}(0;\Delta)=\emptyset$

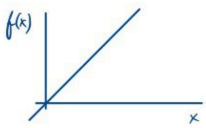


$|f(x)|\geq\Delta$

Přednáška (5) — 13. 10. 2022

užitečné triviality (D.CV.)

$\lim_{x\to x_0} x = x_0$ ($f(x)=x$)



$\lim_{x\to x_0} c = C$

c ... konstantní funkce
C ... konstanta $\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} x = x_0$ zkusme dokazovat

$f(x)=x$

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta\geq0:\ x\in P(x_0;\delta)\Rightarrow x\in\mathcal{U}(f(x_0);\varepsilon)$

$\hookrightarrow x\in\mathcal{U}(x_0;\varepsilon)$

položme $\delta=\varepsilon$ pak $P(x_0;\varepsilon)\subset\mathcal{U}(x_0;\varepsilon)$

$\forall\varepsilon>0$ $\square$

Nechť $f(x)=\tilde{f}(x)$ na jistém okolí $P(x_0,\delta)$. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\tilde{f}(x)$

$\lim_{x\to x_0} c = C \qquad f(x)=c$

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ x\in P(x_0;\delta)\Rightarrow f(x)\in\mathcal{U}(f(x_0);\varepsilon)$

$f(x)\in\mathcal{U}(c,\varepsilon)$

$f(x)=c$

$c\in\mathcal{U}(c;\varepsilon)$

to platí pro $\forall\varepsilon>0$ bez ohledu na δ

Věta 2.3 (Aritmetika limit – 1. verze)

$x_0\in\mathbb{R}^*$

Nechť $f(x)\to A,\ g(x)\to B,\ x\to x_0$, kde $B\neq A$, $B,A\in\mathbb{R}$. Potom:

(1) $f(x)+g(x)\to A+B$
(2) $f(x)-g(x)\to A-B$
(3) $f(x)\cdot g(x)\to A\cdot B$
(4) pokud $B\neq0$, pak $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{A}{B}$

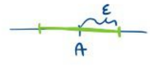
všechno pro $x\to x_0$

Důkaz:

víme
(*) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in\mathcal{U}(A;\varepsilon)$
(**) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow g(x)\in\mathcal{U}(B;\varepsilon)$

od (1): cílem: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ x\in P(x_0;\delta)\Rightarrow|f(x)+g(x)-(A+B)|<\varepsilon$

odhady: $|f(x)+g(x)-(A+B)| = |f(x)-A+g(x)-B|$
$\leq|f(x)-A|+|g(x)-B|$



$\varepsilon>0$ dáno (*) $\exists\delta_1\geq0$ takové, že $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in P(x_0;\delta_1)$
(**) $\exists\delta_2>0$ takové, že $|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in P(x_0;\delta_2)$

položme $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ $\quad x\in P(x_0;\delta)\Rightarrow|f(x)+g(x)-(A+B)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Přednáška 5

13.10.2022

ad (3) TRIK: $f(x)\cdot g(x) - A\cdot B + Ag(x) - Ag(x) = (f(x)-A)\cdot g(x) + A(g(x)-B)$

$$\Rightarrow \quad |f(x)g(x) - AB| \leq |f(x)-A|\cdot|g(x)| + |A|\cdot|g(x)-B|$$

$\varepsilon > 0$ dáno cílem najít $\exists \delta > 0$ takové, že $x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow |f(x)g(x) - AB| < \varepsilon$

(**) $\exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0;\delta_1) \Rightarrow |g(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$

tohle jsme si zvolili, protože se to hodí, a protože definice limity funguje pro jakékoliv ε, tak tady za ε můžeme dát tohle

lemma 2.1 $\exists C > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0;\delta_2) \Rightarrow |g(x)| \leq C$

(*) $\exists \delta_3 > 0 \quad x \in P(x_0;\delta_3) \Rightarrow |f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$

JEŠTĚ JEDNOU PROJÍT

položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ ... $x \in P(x_0;\delta)$

$$\Rightarrow \quad |f(x)g(x) - AB| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2C}\cdot C}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|A|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon \qquad \underbrace{\frac{|A|}{|A|+1}}_{\leq 1}$$

ad (4)' $g(x) \to B,\ B \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{g(x)} \to \dfrac{1}{B}$ pro $x \to x_0$ tedy cílem: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow \left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{B}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{g(x)B}\right| = \frac{1}{|g(x)B|}\cdot|B - g(x)|$$

lemma 2.1 (odraženost od nuly) $\exists \delta_1 > 0 \quad \exists \Delta > 0 : x \in P(x_0;\delta_1) \Rightarrow |g(x)| \geq \Delta \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{|g(x)|} \leq \dfrac{1}{\Delta}$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\cdot\underbrace{|B - g(x)|}_{< \varepsilon\Delta|B|}$$

(**) $\exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0;\delta_2) \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon\cdot\Delta\cdot|B|$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tedy $x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow \left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{B}\right| < \dfrac{1}{|B|}\cdot\dfrac{1}{\Delta}\cdot\varepsilon\Delta|B| = \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\cdot\varepsilon\Delta|B| = \varepsilon\cdot\underbrace{\frac{\Delta}{g(x)}}_{\leq 1} \leq \varepsilon$$

ad (4) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ dle bodu (3) je limita $A\cdot\dfrac{1}{B} = \dfrac{A}{B}$

$f(x)$: limita A $\dfrac{1}{g(x)}$: limita $\dfrac{1}{B}$ vše pro $x \to x_0$

Př $\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \qquad x^2 = x\cdot x \qquad \lim_{x\to 2} x = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2} x^2 = 2\cdot 2 = 4$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x+1} = 1 \qquad x+1 \to 0+1 = 1$ věta o aritmetice limit podstatně usnadňuje počítání limit

$\dfrac{1}{x+1} \to \dfrac{1}{1} = 1$

Věta 2.4 Nechť $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0;\delta)$. Nechť $g(x) \to 0$, $x \to x_0$. Potom $f(x)g(x) \to 0$, $x \to x_0$.

Důkaz: cílem je ukázat $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow |f(x)g(x) - 0| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ dáno
$f(x)$ je omezená na $P(x_0;\delta)$, tj. $\exists C \geq 0\ \exists \delta_1 > 0\ \ x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow |f(x)| \leq C$
$g(x) \to 0$ $\quad \exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0;\delta_2) \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{C}$ ← to jsme si zas vymysleli aby to došlo vyšlo

položme $\delta = \min\{\delta_1;\delta_2\}$ ... $x \in P(x_0;\delta)$

$$\Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| = \underbrace{|f(x)|}_{\leq C} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{C}} < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

Pozn.: platí i jednostranné verze vět 2.3 a 2.4, tj. např. • $f(x) \to A$, $g(x) \to B$, $x \to x_0+ \Rightarrow f(x)g(x) \to AB$, $x \to x_0+$

ZKUSIT DOMA IDEÁLNĚ

Spojitost

Def. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $\mathcal{U}(x_0)$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > \ \exists \delta > 0 \quad x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0);\varepsilon)$$

Ekvivalentní zápisy: $f(\mathcal{U}(x_0;\delta)) \subset \mathcal{U}(f(x_0);\varepsilon)$ anebo $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Věta 2.5 (Vztah limity a spojitosti) Následující výroky jsou ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v bodě x_0
(2) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existuje a je rovna $f(x_0)$

Věta 2.5 se taky dá zapsat
$f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$

Důkaz:
(1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \boxed{x \in \mathcal{U}(x_0,\delta)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0);\varepsilon)$
(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \boxed{x \in P(x_0;\delta)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0);\varepsilon)$
jediný rozdíl

(1) $\Rightarrow$ (2) je zřejmé, neboť $P(x_0;\delta) \subset \mathcal{U}(x_0,\delta)$
(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{U}(x_0;\delta) = P(x_0;\delta) \cup \{x_0\}$ – tj. jediné, co mi chybí ve formuli, je informace o bodě x_0
jenže kdybych měla $x = x_0$, $f(x_0)$ vždy padne do libovolného $\mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$
takže to platí taky

Př. polynom $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ je spojitý v $\forall x \in \mathbb{R}$
např. $p(x) = x^2 + 2x + 3$ použitím věty o aritmetice limit dostaneme, že limita v bodě x_0 je $x_0^2 + 2x_0 + 3$
což je funkční hodnota v bodě x_0 → spojitost plyne z věty 2.5

Př. racionální funkce $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x)$ ... polynomy, je spojitá v každém $x_0 \in \mathbb{R}$ takovém, že $q(x_0) \neq 0$.
důkaz: $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \longrightarrow \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = R(x_0)$ dle věty o aritmetice limit a dle spojitosti polynomu

Přednáška (5) 13.10. 2022

Věta 2.6 (O limitě složené funkce) Nechť $f(x) \to y_0$, $x \to x_0$, nechť $g(y) \to A$, $y \to y_0$,
(*) kde $x_0, y_0, A \in \mathbb{R}^*$. Nechť platí alespoň jeden z následujících předpokladů:

(a) $g(y)$ je spojité v bodě y_0 (mohou platit i oba současně)

(b) $\exists \delta > 0$ taková, že $f(x) \neq y_0$ pro $\forall x \in P(x_0;\delta)$

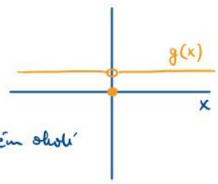
Potom: $g(f(x)) \longrightarrow A$, $x \to x_0$

Př $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ (na každém prstencovém okolí bodu 0 je rovna 1)



přesto $f(g(x)) \to 1$, $x \to 0$

↖ tohle se stalo, když jsme vynechali předpoklady (a), (b)

Přednáška (6) 19.10. 2020

Příklady spojitých funkcí:

(1) polynom, racionální funkce spojité v $\forall x \in D_f$

(2) e^x, $\cos x$, $\sin x$ spojité v $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\ln x$ spojitý v $\forall x_0 \in (0;\infty)$

(3) $\sqrt{x}$ spojitá v $\forall x \in (0;\infty)$

(3) **důkaz** $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ x \in U(x_0;\delta) \Rightarrow \sqrt{x} \in U(\sqrt{x_0};\varepsilon)$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad \sqrt{x_0} - \varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \varepsilon$

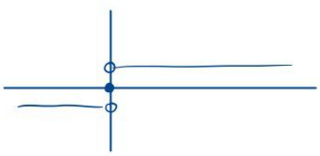
$\underbrace{(\sqrt{x_0} - \varepsilon)^2}_{x_1} < x < \underbrace{(\sqrt{x_0} + \varepsilon)^2}_{x_2} \Rightarrow x_1 < x < x_2$

přepíšu si sem tohle $x_0 - \delta < x < x_0 + 2$

stačí volit $\delta > 0$ takovou, že $U(x_0;\delta) \subset (x_1;x_2)$

(5)

Tvrzení: Funkce signum je spojitá všude mimo $x_0 = 0$



sgn x nemá v nule limitu

$\Rightarrow$ určitě není ani spojitá

(6) Dirichletova funkce $D(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(*) Návrat k větě 2.6

Důkaz: cílem: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow g(f(x)) \in U(A;\varepsilon)$

$\varepsilon > 0$ dáno vnější funkce: $\exists \eta > 0: \ y \in \overset{(*)}{P}(y_0;\eta) \Rightarrow g(y) \in U(A;\varepsilon)$

↖ chtělo by to tohle narvat sem

problém: $P(y_0) \subset U(y_0)$ ale $U(y_0) \not\subset P(y_0)$

vnitřní funkce: $\exists \delta > 0: \ x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow f(x) \in \underset{(**)}{U}(y_0;\eta)$

rozdělím na případy:

(a) funkce je spojitá $(g(y_0) = A)$, tj lze psát místo (*) $U(y_0;\eta)$

(b) BÚNO $\delta > 0$ tak malá, že $f(x) \neq y_0 \quad x \in P(x_0;\delta)$

místo (**) lze psát $P(y_0;\eta)$

Př $\sqrt{x^3 - 3x + 1} \to \sqrt{3}$, $x \to 2$

vnější funkce je spojitá → platí věta 2.6 (a)

limita vnitřní funkce je rovna hodnotě funkce v bodě, tj $2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$

Př $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$, $x \to 0$?

Přednáška ⑥ 19.10.2022

Věta 2.7 (Aritmetika limit – obecná verze). Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde $A, B, x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom:

(1) $f(x) + g(x) \to A + B$

(2) $f(x) - g(x) \to A - B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$

vše pro $x \to x_0$, <u>pokud má výraz vpravo v $\mathbb{R}^*$ smysl</u>.

Důkaz – některé případy: **1.** $A, B \in \mathbb{R}$ … viz věta 2.3

2. $A = B = +\infty$ $\qquad f(x) + g(x) \overset{?}{\to} A + B = +\infty + \infty = +\infty$

$\varepsilon > 0$ dáno : $\exists \delta_1 : x \in P(x_0; \delta_1) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(+\infty; 2\varepsilon)$

$$f(x) > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$\exists \delta_2 : x \in P(x_0; \delta_2) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(+\infty; 2\varepsilon)$

$$f(x) > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ … $x \in P(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) + g(x) > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$ tj. $f(x) + g(x) \in \mathcal{U}(+\infty; \varepsilon)$

3. $\left.\begin{matrix} A \in \mathbb{R} \\ B = +\infty \end{matrix}\right\} \quad f(x) + g(x) \to A + B = +\infty$

$\varepsilon > 0$ dáno $\qquad$ Lemma 2.1 říká $\exists C > 0, \exists \delta_1 > 0 : |f(x)| \le C$

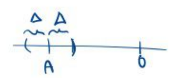
$$-C < f(x) < C \qquad \forall x \in P(x_0; \delta_1)$$

$\exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0; \delta_2) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}\left(+\infty; \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon C}\right)$ $\quad$ tj. $g(x) > \frac{1 + \varepsilon C}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + C$

položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ … $x \in P(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) + g(x) > \frac{1}{\varepsilon} + C - C = \frac{1}{\varepsilon}$ tj. $f(x) + g(x) \in \mathcal{U}(+\infty; \varepsilon)$

4. $A \in (-\infty; 0)$ $\quad B = +\infty$ $\qquad f(x) \cdot g(x) \to A \cdot (+\infty) = -\infty$

$\varepsilon > 0$ dáno $\quad$ Lemma 2.1 (2) $\Rightarrow$ $\exists \Delta > 0$ takové, že $0 \notin \mathcal{U}(A; \Delta)$ protože $A < 0$ tak $A + \Delta < 0$



$\exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0; \delta_1) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A; \Delta)$ $\qquad$ speciálně $f(x) < A + \Delta < 0$

$\exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0; \delta_2) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(+\infty; \underbrace{-\varepsilon \underbrace{(A + \Delta)}_{\text{záp.}}}_{\text{kladné}})$

$$\underset{\text{kladné}}{g(x)} > \underset{\text{kladné ale menší}}{\frac{1}{-\varepsilon(A + \Delta)}}$$

položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$x \in P(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < \frac{A + \Delta}{-\varepsilon(A + \Delta)} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\underset{\text{víc záporné}}{f(x)} < \underset{\text{míň záporné}}{A + \Delta}$$

obě strany této nerovnosti to zezáporní, ale pravá bude blíž k nule – větší

$$|f(x)| > |A + \Delta|$$

Př. $x \to +\infty$; $\dfrac{1}{x^2 + 1} \to \dfrac{1}{(+\infty)^2 + 1} = \dfrac{1}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$

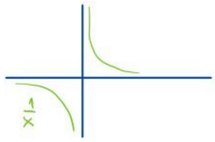
Př. $x \to -\infty$; $x^3 + x^2 \to (-\infty)^3 + (-\infty)^2 = -\infty + \infty$ není definováno $\to$ větu 2.7 nelze použít

závěr NENÍ „limita neexistuje", závěr je „JSEM NEŠIKA"

lepší způsob: vytknu vedoucí člen (x^3) $\quad x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right) = (-\infty)^3\left(1 + \frac{1}{-\infty}\right) = (-\infty)(1 + 0) = \underline{\underline{-\infty}}$

Pozn.: nemá smysl $+\infty - \infty$; $-\infty + \infty$; $0 \cdot (\pm\infty)$; $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\dfrac{x}{0}$

Pozn.: dělení nulou



pro $x=0$ nevím, jestli je to v $+\infty$ nebo v $-\infty$

Věta 2.8 (Limita typu $\frac{1}{\pm 0}$) Nechť $f(x) \to 0$, $x \to x_0$.

(1) je-li $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to \infty$, $x \to x_0$

(2) je-li $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$, $x \to x_0$.

Pozn. platí i s jednostrannými limitami a pravým/levým okolím – často se používá.

Důkaz: (jen (2)) $\varepsilon > 0$ dáno $\exists \delta > 0 : |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in P(x_0;\delta)$

BÚNO můžu vzít δ tak, že $f(x) < 0$ na $P(x_0;\delta)$

dohromady $-\varepsilon < f(x) < 0 \iff \frac{1}{f(x)} < -\frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{f(x)} \in \mathcal{U}(-\infty;\varepsilon)$

Př. $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, $x \to 0$ 2.8(1): $x^2 \to 0$, $x \to 0$ (věta o aritmetice limit)

$x^2 > 0$ na $P(0,\delta)$

Př. $\frac{1}{x^2+x} \to -\infty$, $x \to 0_-$ věta 2.8(2) levostranná verze $f(x) = x^2 + x \to 0$, $x \to 0_-$

$f(x) = \underbrace{x}_{<0}\underbrace{(x+1)}_{>0}$ na $P(0,\delta)$ pro $\delta < 1$ $\Rightarrow$ celkově záporné

Limita a nerovnost

Věta 2.9 (O zachování nerovnosti v limitě) Nechť $f(x) \to a$, $x \to x_0$. Nechť $f(x) \le A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a \le A$.

Jiná formulace: Jestliže $f(x) \le A$ na $P(x_0)$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) \le A$ pokud tato limita existuje

Důkaz: $\boxed{?!}$ předpokládejme $a > A$

zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že A leží nalevo od $\mathcal{U}(a,\varepsilon)$, tj. $A < a - \varepsilon$

TOHLE JSEM NEVNÍMALA

$\exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0;\delta_1) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(a,\varepsilon)$, zajímá mě hlavně $f(x) > a - \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0;\delta_2) \Rightarrow f(x) \le A$

položme $\delta = \min\{\delta_1;\delta_2\}$ ... $x \in P(x_0;\delta)$ $f(x) \le A$ & $f(x) > a - \varepsilon$

ale v předpokladech $A < a - \varepsilon \Rightarrow$ spor $\lightning$

Pozn.: platí i s obrácenou nerovností

neplatí ostrá nerovnost – např. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $f(x) < 1$ na každém $P(+\infty)$ ale limita v ∞ je 1

Věta 2.10 (Věta o dvou policajtech) Nechť $f(x), g(x), h(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0)$.

(1) Nechť $g(x) \le f(x) \le h(x)$ na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to a$, $h(x) \to a$, $x \to x_0$, kde $a \in \mathbb{R}$ (konečné). Potom $f(x) \to a$, $x \to x_0$.

(2) Nechť $g(x) \le f(x)$ na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to +\infty$, $x \to x_0$. Pak $f(x) \to +\infty$, $x \to x_0$.

(3) Nechť $f(x) \le g(x)$ na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to -\infty$, $x \to x_0$. Pak $f(x) \to -\infty$, $x \to x_0$.

Důkaz: ad (1) $\varepsilon > 0$ dáno $\exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0,\delta_1) \Rightarrow g(x) \in (\mathcal{U},\varepsilon)$ tedy $a - \varepsilon < g(x)$

$\exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow h(x) \in (\mathcal{U},\varepsilon)$ tedy $a + \varepsilon > h(x)$

$\exists \delta_3 > 0 : x \in P(x_0;\delta_3) \Rightarrow g(x) \le f(x) \le h(x)$

položme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ $x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow a - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < a + \varepsilon$

$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$

$x \in P(x_0;\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(a,\varepsilon)$

Př. $\dfrac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor + 1} \to 1, \quad x \to +\infty$

kde $\lfloor y \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq y\}$ ... celá část čísla y

zřejmě platí: $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

tedy: $x^2 \leq \lfloor x^2 \rfloor + 1 \leq x^2 + 1$

$$\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2+1}}_{\text{tohle má za limitu zjevně } 1} \leq \frac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor + 1} \leq \underbrace{\frac{x^2+1}{x^2}}_{= 1 + \frac{1}{x^2} \to 1,\ x \to \infty}$$

věta 2.10 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor + 1} = 1$

Př. $\cos x + x \to -\infty, \quad x \to -\infty$

víme $\cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

tedy $\cos x + x \leq \underbrace{1 + x}_{\text{má limitu } -\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, takže i na jistém $P(-\infty)$

Věta 2.10 (3) $\Rightarrow \cos x + x$ má taky limitu $-\infty$

Věta 2.11 Nechť $f(x)$ je monotónní v $I = (a, b)$. Potom $\exists \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to b-} f(x)$.
Tyto limity jsou vlastní $\Leftrightarrow$ $f(x)$ je příslušným způsobem omezená na I.

Důkaz: provedeme pro $f(x)$ neklesající, $\exists \lim\limits_{x \to b-} f(x)$

položme $M = f(I) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I : y = f(x)\}$

M je shora omezená $\Leftrightarrow$ $f(x)$ je shora omezená na I

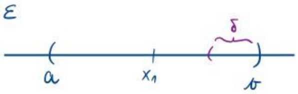
existuje supremum M $\quad \sup M = A$

tvrzení: $f(x) \to A,\ x \to b_-$

$\varepsilon > 0$ dáno $\quad A - \varepsilon < A \quad$ z definice suprema: $\exists y_1 \in M : y_1 > A - \varepsilon$

je to neklesající funkce: $\exists x_1 \in I : f(x_1) > A - \varepsilon$

volme $\delta > 0$ takové, že x_1 leží nalevo od $P_-(b, \delta)$



pro $x \in P(b, \delta)$: $f(x) > f(x_1)$ & $f(x_1) > A - \varepsilon$

$f(x) > A - \varepsilon$ zároveň $f(x) \leq A$ (A je supremum)

$A - \varepsilon < f(x) < A \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_-(A, \varepsilon)$ tedy $f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

pro nějaké $x \in P(b, \delta)$

to je to samé jako že $f(x) \to A,\ x \to b$

TADY CHYBÍ PŘEDNÁŠKA

Věta 2.16 (Darboux)
Věta 2.17 (o spojitosti inverzní funkce) } $\Rightarrow$ důkaz věty B o existenci odmocniny $\sqrt[n]{y} = (X^n|_I)_{-1}$

$I = (0, \infty)$ pro n sudé
$I = \mathbb{R}$ pro n liché

důkaz v zápiscích nebo nahraný jako videoprezentace – podívat se na to
co se nepřednášelo nebude na zkoušce

KAP. 3: ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

– samostudium

„Kapitolu 2 jsme dokončili minule, kapitolu 3 jsem dokončil právě teď."

KAP. 4: DERIVACE

Def. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $\mathcal{U}(x_0)$. **Derivací** $f(x)$ v bodě x_0 rozumíme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}^* . \qquad \text{ekvivalentně} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (x = x_0+h)$$

- Značíme $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$
- Terminologie : $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ vlastní derivace
  $f'(x_0) = \pm\infty$ nevlastní derivace
- Pozn. $f(x) = g(x)$ na jistém $\mathcal{U}(x_0,\delta)$ $\rightarrow$ $f'(x) = g'(x)$
- geometricky : směrnice tečny 
- $x \mapsto f'(x)$ ... derivací vzniká opět „funkce“ $D_{f'} \subset D_f$
  $H_{f'} \subset \mathbb{R}^*$ (kvůli tomuhle je to funkce v uvozovkách)

∘ $c' = 0$ $\quad f(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \quad \text{pro } \forall h \neq 0 \qquad \text{a limita 0 je samozřejmě 0}$$

∘ $(x^n)' = n x^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ $\qquad x' = 1$

$\qquad x^{2\,\prime} = 2x$

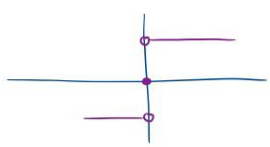
∘ $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \left(\frac{-m}{x^{m+1}}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ $\qquad x^{-1\,\prime} = -\frac{1}{x^2}$

∘ $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ hodí se vzorečky $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\frac{\cos\overbrace{(x+h)}^{\alpha} - \cos\overbrace{(x)}^{\beta}}{h} = \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -2\underbrace{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\to \sin x}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \longrightarrow \sin x, \quad h\to 0$$

∘ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

∘ $(e^x)' = e^x$

∘ $(\operatorname{sgn} x)' = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$ 

$$\operatorname{sgn} x \Big|_{x=0} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sgn}(x+h)-\operatorname{sgn} x}{h} = \frac{\operatorname{sgn} h}{h} = \frac{1}{|h|} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|} = \infty$$

věta 2.8

je sice do nuly, ale je nulový

Platí $x\cdot\operatorname{sgn} = \frac{x}{\operatorname{sgn} x} = |x| \quad \forall x \neq 0$

Přednáška (9)

Def. Derivace $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva):

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Značíme $f'_+(x_0)$, $f'(x)\big|_{x=x_0+}$

Př. $|x|' = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$

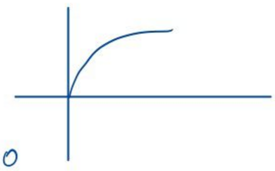
$$|x|'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{|0-h|-|0|}{h} \overset{h>0}{=} \frac{h}{h} = 1$$

$$|x|'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{|0-h|-|0|}{h} \overset{x<0}{=} \frac{-h}{h} = -1$$

$$|x|'_+ \neq |x|'_-$$

Př. $(\sqrt{x})'_+(0) = +\infty$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$



Pozn.: Z věty 2.2 plyne, že $\exists f'(x_0) \iff \exists f'_+(x)\ \exists f'_-(x)$ a zároveň $f'_+(x) = f'_-(x)$

POZOR $f(x)$ spojité $\not\Rightarrow \not\Leftarrow$ $\exists f'(x)$

neplatí ani jedno

Věta 4.1 Nechť $\exists f'(x_0)$ vlastní. Pak $f(x)$ je spojitá v bodě x_0.

Důkaz: Díky větě 2.5 o limitě a spojitosti stačí ukázat $f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

TRIK
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0),\ x\to x_0} + \underbrace{\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{derivace – konečné číslo (máme vlastní derivaci v předpokladech)}} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0,\ x\to x_0}}_{\to 0,\ x\to x_0}$$

platí i jednostranná verze

kdyby byla derivace nekonečno, je to blbý, protože ho násobíme s nulou $(x-x_0)$ a to se nedělá

tady vidíme v praxi ten problém s nevlastníma derivacema

celým tím jsme řekli $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ a víme že to platí $\iff$ je spojitá

doufám

Věta 4.2 Nechť $\exists f'(x_0), g'(x_0)$ vlastní. Potom:

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

(3) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

(4) je-li $g(x_0) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{1}{g(x_0)^2}\left(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\right)$

Důkaz: ad 3

$$(f\cdot g)'(x_0) = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

↑ TRIK přidat odebrat

$$= \frac{\underbrace{f(x)}_{\to f(x_0)\ \text{(věta 4.1)}}\left(g(x)-g(x_0)\right)}{x-x_0} + \frac{g(x_0)\left(f(x)-f(x_0)\right)}{x-x_0}$$

$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to g'(x_0)$, $\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$

(4)' $\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad g(x_0) \neq 0$

$$\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)\frac{1}{x-x_0} = \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}\,\frac{1}{x-x_0} = \underbrace{-\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\to -\frac{1}{g(x_0)^2}} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

bod (4) vyplývá z (4)' a (3)

$$\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g} = -f\cdot\frac{g'}{g^2} + f'\frac{1}{g} = -f\frac{g'}{g^2} + f'\frac{g}{g^2} = \frac{1}{g^2}(f'g - fg')$$

POZOR! předpoklad „vlastní" derivace nelze obecně vynechat
zejména (3), (4) nemusí platit, přestože dávají formálně smysl

v případě vlastních derivací to bezpečně funguje, nevlastní jsou důvod být ostražitý

Př: $(e^x \cdot \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Př: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Př: $(x^n)' = n x^{n-1}$: dokažme indukcí dle n

1) $(x^1)' = 1\cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

$\frac{(x+h)-x}{h} = \frac{h}{h} \to 1$

2) víme $(x^n)' = n x^{n-1}$

$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)'x + x^n (x)' = n x^{n-1}\cdot x + x^n \cdot 1 = n x^n + x^n = \underline{\underline{n+1\, x^n}}$ $\square$

Př: $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \left(\frac{-m}{x^{m+1}}\right)$

dle (4)' víme $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-m\, x^{m-1}}{x^{2m}} = -m\, x^{m-1-2m} = -m\, x^{-m-1} = \underline{\underline{\frac{-m}{x^{m+1}}}}$ $\square$

z posledních dvou příkladů vyplývá $(x^p)' = p\, x^{p-1}, \quad p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Věta 4.3 (Derivace složené funkce) Nechť $\exists f'(x_0), g'(y_0)$ vlastní, kde $y_0 = f(x_0)$. Pak $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Př. $(\sqrt{x^2+1})'$

Př. $(x^x)'$

Př. $(|\sin x|)' = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ taková že $\sin x \neq 0$

$g(y) = |y| \quad g'(y) = \operatorname{sgn} y, \ y \neq 0$

$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$

zkusme najít derivaci v nule z definice

$$|\sin x|'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|\sin(x-0)| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{x} = \pm 1$$

→ limita zprava je různá od limity zleva → limita neexistuje, ani derivace neexistuje

obecně: $|f(x)|' = \operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x)$, $f(x) \neq 0$

Lemma 4.1: Nechť $\exists f'(x_0) \neq 0$ (může být nevlastní). Pak $\exists \delta > 0$ takové, že $f(x) \neq f(x_0)$ pro $x \in P(x_0; \delta)$.

Důkaz lemmatu: Položme $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$ (zavedli jsme si takovouhle funkci)

Víme $\varphi(x) \to A \in \mathbb{R}^*$, $A \neq 0$, $x \to x_0$ (zároveň $A = f'(x)$)

Lemma 2.1 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \varphi(x) \neq 0$, $x \in P(x_0, \delta)$ (odraženost od nuly)

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\varphi(x) \neq 0} \underbrace{(x - x_0)}_{\neq 0} \text{ na } P(x_0; \delta)$$

tj. $f(x) = f(x_0) +$ něco nenulového $\Rightarrow f(x) \neq f(x_0)$

Důkaz věty: chceme ukázat $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \longrightarrow g'(y_0) \cdot f'(x_0)$, $x \to x_0$, $y_0 = f(x_0)$

1. předpokládejme derivaci vnitřní funkce nenulovou $f'(x_0) \neq 0$
z lemmatu 4.1 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \neq f(x_0)$ pro $x \in P(x_0; \delta)$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\to g'(y_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)}$$

(z věty o limitě složené funkce) (jasné z definice)

vnější funkce: $g'(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$

vnitřní funkce $f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$ (věta 4.1 o vlastní derivaci a spojitosti)
$f(x) \neq f(x_0)$ (lemma 4.1)

krása všechno funguje

pro ten druhý případ $f'(x_0) = 0$ nejde tento postup použít

2. předpokládejme $f'(x_0) = 0$
$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=0}$$

všimneme si, že pravá strana toho, co chceme dokázat, bude nulová
→ stačí dokázat, že i levá

položme $\varphi(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ $\quad \varphi(y) \to g'(y_0) \in \mathbb{R}, \; y \to y_0$

lemma 2.1 má-li funkce konečnou limitu, je na jistém okolí omezená
$\varphi(y)$ omezená na jistém $P(y_0)$, tj $\exists K > 0, \; \eta > 0$ takové, že
$|\varphi(y)| \leq K \quad \forall y \in P(y_0; \eta)$
(*) $|g(y) - g(y_0)| \leq K |y - y_0| \quad \forall y \in U(y_0; \eta)$
plati i v kruhovém okolí, protože pro $y = y_0$ triviální

$f(x)$ spojité v x_0 (věta 4.1 o vlastní derivaci a spojitosti)
$\Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in P(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0); \eta)$ $\quad f(x_0) = y_0$, za jakékoliv ε jsme dali η
$f(x) \in U(y_0; \eta)$

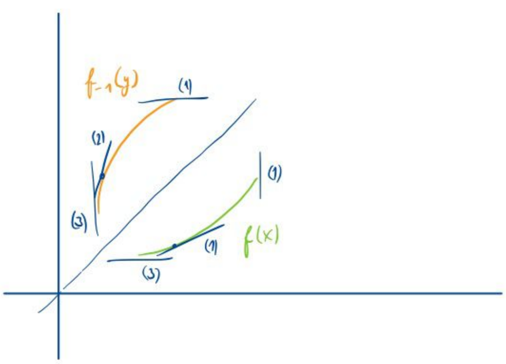
Celkem $\forall x \in P(x_0; \delta)$ platí:
$$\left| \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \right| = \frac{|g(f(x)) - g(f(x_0))|}{|x - x_0|} \overset{(*)}{\leq} \frac{K |f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$
$$\leq K \underbrace{\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|}$$
toto v limitě půjde do nuly, protože to je přesně $f'(x)$ a z předpokladu $f'(x) = 0$

Zkouška

- povolený taháček se vzorečky na písemku
- jinak jen papír a tužka a žádné el. zařízení

Věta 4.4 (Derivace inverzní funkce). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f(x)$ je spojité a ryze monotónní v I. Nechť $J = f(I)$, $f_{-1}(y) : J \to I$ je funkce inverzní. Nechť $y_0 \in J$ je vnitřní bod. Potom:

(1) Je-li $f'(f_{-1}(y_0)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $(f_{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f_{-1}(y))}$
(2) Je-li $f'(f_{-1}(y_0)) = \pm\infty$, pak $(f_{-1})'(y_0) = 0$
(3) Je-li $f'(f_{-1}(y_0)) = 0$, pak $(f_{-1})'(y_0) = +\infty$, resp. $-\infty$ v případě funkce rostoucí, resp. klesající.



Důkaz: $Q(y) = \dfrac{f_{-1}(y) - f_{-1}(y_0)}{y - y_0} \longrightarrow \; ?, \quad y \to y_0$ (*)

TRIK: $y = f(f_{-1}(y)), \quad \forall y \in \mathcal{U}(y_0, \delta)$
$\mathcal{U}(y_0,\delta) \subset J$ ← protože vnitřní bod

(*) $$\frac{f_{-1}(y) - f_{-1}(y_0)}{f(f_{-1}(y)) - f(f_{-1}(y_0))} = \frac{1}{\Psi(f_{-1}(y))}, \quad \text{kde} \quad \Psi(f_{-1}(y)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

↑ tohle jsme teď zavedli

$x = f_{-1}(y) \qquad x_0 = f_{-1}(y_0)$

Věta o aritmetice limit a věta o limitě složené funkce:

$$\Psi(x) \longrightarrow f'(x), \quad x \to x_0$$

vnitřní funkce je $f_{-1}(y)$ je spojitá, takže $f_{-1}(y) \to f_{-1}(y_0)$, $y \to y_0$
a je prostá, takže $f_{-1}(y) \neq f_{-1}(y_0)$ na jistém $P(y_0)$

ad 3 $\Psi(f_{-1}(y)) \to 0, \quad y \to y_0$

věta 2.8 $\Psi(x) > 0, \; x = x_0, \; f(x)$ rostoucí
resp. < 0 — " — klesající

a tedy $\Psi(f_{-1}(y)) > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\Psi(f_{-1}(y))} \longrightarrow +\infty, \quad y \to y_0$
resp $<$ resp. $-\infty$

Př. $$\left(\sqrt[n]{y}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in (-1,1)$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

KAP. 5 : PRIMITIVNÍ FUNKCE

Úmluva: v celé kap. I, J jsou otevřené intervaly

Def.: $F(x)$ se nazve primitivní funkcí k $f(x)$ v I, pokud $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$.
Značím $\int \underbrace{f(x)}_{\text{integrand}} dx = F(x)$

Př. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ v $\mathbb{R}$, $n \geq 0$ celé

speciálně $\int 1 \, dx = x$
$\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2$

Př. $\int \frac{1}{x^n} \, dx$

Př. $\int \frac{1}{x} \, dx$

je důležité psát v jakém intervalu primitivní funkce platí

Př. $\int e^x \, dx = e^x$

Př. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$ v $(-1, 1)$

$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$

Věta 5.1 (Linearita integrálu) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $\int a f(x) + b g(x) \, dx = a \int f(x) \, dx + b \int g(x) \, dx$ v I, pokud zde existují integrály vpravo

(2) Pokud $a \neq 0$ $\int f(y) \, dy = F(y)$ v J, pak také $\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$ v I,
je-li I takové, že $\{ax+b, x \in I\} \subset J$

Důkaz Nechť $\int f(x) \, dx = F(x)$, $\int g(x) \, dx = G(x)$ v I

(1) derivace pravé strany ... $(aF(x) + bG(x))' = a F'(x) + b G'(x) = a f(x) + b g(x)$ ... integrand levé strany

(2) víme $F'(y) = f(y)$ $\forall y \in J$

Derivace pravé strany: $\left(\frac{1}{a} F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} F'(ax+b) \cdot (ax+b)' = \frac{1}{a} F'(\underbrace{ax+b}_{\in J \, \forall x \in I}) \cdot a = f(ax+b)$ pro $\forall x \in I$

používáme větu o derivaci složené fce

Př. $\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int 1 \, dx}_{x} - \frac{1}{2} \underbrace{\int \cos 2x \, dx}_{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x$ v $\mathbb{R}$

víme $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
$(\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x))$

Věta 5.2 (Integrace per partes) Nechť $\exists u'(x), v'(x)$ vlastní pro $\forall x \in I$. Existuje-li integrál vpravo, potom:

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \quad v\ I.$$

Důkaz: Nechť $\int u(x)v'(x)\,dx = H(x)$ v I

věta 4.2 derivování součinu

derivace pravé strany $\quad (u(x)v(x) - H(x))' = (u(x)v(x))' - H'(x) = u'(x)v(x) + \cancel{u(x)v'(x)} - \cancel{u(x)v'(x)}$

$= u'(x)v(x)$ ... integrand levé strany

Př. $\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \underbrace{\int \frac{1}{2}x\,dx}_{\frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$

$u'(x) = x \quad u(x) = \frac{x^2}{2}$

$v(x) = \ln x \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

pro $\forall x \in (0, \infty)$

Př. $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$ a teď si ukážeme, že to sice neumíme spočítat, ale umíme odvodit rekurentní vzorce

$$= \int \underbrace{1}_{u'(x)}\underbrace{(1+x^2)^{-n}}_{v(x)}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x\cdot\frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$

← figl! přičtu a odečtu jedničku

$u(x) = x$

$v'(x) = -n(1+x^2)^{-n-1}\cdot 2x$

$= -2nx(1+x^2)^{-n-1}$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\underbrace{\int\underbrace{\frac{\cancel{1+x^2}}{(1+x^2)^{\cancel{n+1}}}}_{\frac{1}{(1+x^2)^n}}}_{I_n} - 2n\underbrace{\int\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}_{I_{n+1}}$$

$$-2n\,I_{n+1} = I_n - \frac{x}{(1+x^2)^n} - 2n\,I_n$$

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$$

Věta 5.3 (První věta o substituci) Nechť $\int g(y)\,dy = G(y)$ v J, nechť $\forall x \in I$ platí $f(x) \in J$ a $\exists f'(x)$ vlastní. Potom platí

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = G(f(x)) \quad v\ I.$$

Důkaz: víme $G'(y) = g(y), \ \forall y \in J$

dle věty 4.3 (derivace složené fce) $\quad (G(f(x)))' = G'(\underbrace{f(x)}_{\in J})\cdot f'(x) = g(f(x))\cdot f'(x)$

... integrand nalevo $\square$

Př. $\int x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$ v $\mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$

$g(y) = e^y \quad \int e^y = e^y = G(y)$

Př. $\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\cdot\cos x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ v $\mathbb{R}$

$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1-\sin^2 x)^2$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$g(y) = (1-y^2)^2 = 1 - 2y^2 + y^4 \quad \int g(y)\,dy = x - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5$

funguje obecně pro liché mocniny sinu a cosinu
(aspoň mám pocit, že něco takového říkal, když jsem nedávala pozor)

Přednáška 11 — 10.11.2022

Věta 5.4 (Druhá věta o substituci) Nechť $f(x)$ je definováno v I, nechť $\varphi(t): J \to I$ vzájemně jednoznačné a nechť $\exists \varphi'(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $\forall t \in J$. Jestliže

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = g(t) \text{ v } J, \quad \text{pak} \quad \int f(x)\,dx = g(\varphi^{-1}(x)) \text{ v } I.$$

__Důkaz__ víme $g'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $\forall t \in J$

$$\text{věta 4.4 (1)} \Rightarrow \quad (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}, \quad \forall x \in I$$

$$(g(\varphi^{-1}(x)))' = g'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = g'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$$

$$= f(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{x}) \cdot \cancel{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{\cancel{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}} = \underline{\underline{f(x)}} \quad \text{-- integrand levé strany}$$

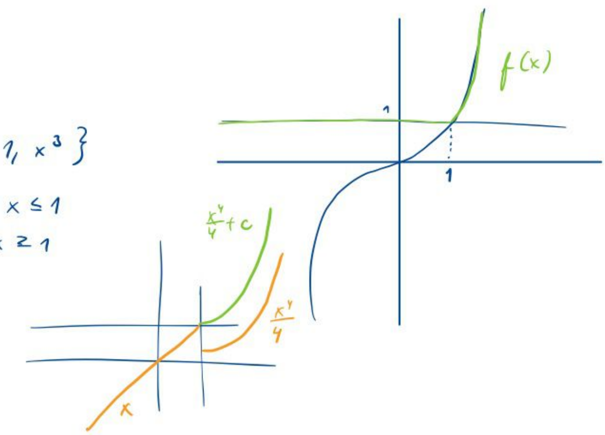
Př. (lepení primitivních funkcí)

$$\int f(x)\,dx, \quad \text{kde } f(x) = \max\{1, x^3\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \le 1 \\ x^3 & \text{pro } x \ge 1 \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = x \quad \text{v } (-\infty; 1)$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} \quad \text{v } (1, \infty)$$



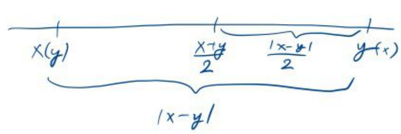
Přednáška 12 — 16.11.2022

Pozn. funkce $|\ |$, max a min lze vzájemně nahradit:

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

$$\min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}$$



Př. Lepení primitivních funkcí (zobecnění)

$$\int f(x)\,dx = ? \qquad f(x) = \max\{1, x^3\} = \underbrace{\frac{1+x^3}{2} + \frac{|1-x^3|}{2}}$$

z tohoto tvaru je vidět, že je funkce spojitá

v bodě $x = 1$ primitivní funkce „slepíme"

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x < 1 \\ 1 & \text{pro } x = 1 \\ \frac{x^4}{4} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{konstanta, kterou to lepíme}} & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

tvrdíme

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{v } \mathbb{R}$$

tj. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ — to jdeme dokazovat na další stránce pro $x \neq 1$ je to jasné, tak jsme to definovali

zbývá tedy $F'(1) = f(1) = 1$

$F'(1) = 1$

možnosti: 1) přímo z definice – limita zprava a zleva v bodě 1

2) pomocí lemmatu 6.2 (které bude dokázáno později)

$$\begin{matrix} & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \end{matrix}$$

1) $F'_+(1) = ?$ $\quad \lim_{h \to 0+} \frac{F(1+h) - F(1)}{h}$ $\quad \dfrac{\frac{(1+h)^4+3}{4} - \frac{1^4+3}{4}}{h} = \frac{(1+h)^4 - 1}{4h} = \frac{\cancel{1} + 4\cancel{h} + 6h^{\cancel{2}} + 4h^{\cancel{3}\,2} + h^{\cancel{4}\,3} - \cancel{1}}{4\cancel{h}}$

$$= 1 + \frac{3}{2}h + h^2 + \frac{1}{4}h^3 \longrightarrow \underline{\underline{1}}, \ h \to 0+$$

$F'_-(1) = ?$ $\quad \lim_{h \to 0-} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h \to 0-} 1 = \underline{\underline{1}}$

Funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$:

$f(x) : I \to \mathbb{C}$

$f_1(x), f_2(x) \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = \mathrm{Re}(f(x))$

$f_2(x) = \mathrm{Im}(f(x))$

$\Rightarrow$ jde po složkách definovat limita, spojitost, derivace

integrál $\int f(x)\,dx = F(x)$ v $I \iff F'(x) = f(x)$ tj. $(\mathrm{Re}\, F(x))' = f_1(x)$

$(\mathrm{Im}\, F(x))' = f_2\, x$

Př. $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

$$\int e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \frac{1}{\alpha+\beta i}\,e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$\Leftrightarrow$

rozklad na reálnou a imaginární část

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)$$

užitečné vzorce, prej propočítat

Integrační konstanta

$F(x) = c \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 0$ $\qquad$ připsání konstanty primitivní funkci nevadí

$\Leftarrow$ tato implikace na druhou stranu údajně není tak jasná a ještě si ji dokážeme v kap. 6

Doplňky ke kapitole 5:

rozklad a integrace racionálních funkcí

typové substituce

$\downarrow$

určitě nahrané vysvětlení

KAP. 6 : HLUBŠÍ VLASTNOSTI
spojitosti a derivace

Úmluva: v této kapitole bude I, J značit intervaly libovolného typu

opak.:
$f(x)$ je omezená v I $\Leftrightarrow$ je zde omezená zdola i shora, tj. když $\exists K, L \in \mathbb{R} \ \forall x \in I: \ L \leq f(x) \leq K$
$\Leftrightarrow \exists C > 0 \ \forall x \in I: \ |f(x)| \leq C$

Lemma 2.1: $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0, \delta)$

Lemma 6.1: Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Pak $f(x)$ je omezená na jistém $\mathcal{U}(x_0)$.

Důkaz: víme $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

ε dáno, víme, že $\exists \delta > 0: \ x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \Rightarrow \underbrace{f(x_0) - \varepsilon}_{L} < f(x) < \underbrace{f(x_0) + \varepsilon}_{K}$

z tohohle už je vidět, že je omezená

Pozn. platí jednostranné verze

Věta 6.1: Nechť $f(x)$ je spojitá v omezeném uzavřeném intervalu I. Pak je $f(x)$ omezená v I.

Důkaz: a) pomocí posloupností (kapitola 7)

b) „plíživý důkaz" (podrobně viz zápisky)

fce je omezená na jistém pravém okolí bodu a
a taky je omezená na jistém okolí každého bodu z intervalu, ale doskáčeme až k b?
vezměme $M = \{y \in [a, b] \ ; \ f(x)$ je omezená na $[a, y]\}$
$x_1 := \sup M$
sporem ukážeme, že musí platit $x_1 = b$

Pozn.: předpoklady věty nelze oslabit – protipříklady:

$I = [0, \infty)$	$f(x) = x$	neomezený I
$I = (0, 1]$	$f(x) = 1/x$	otevřený I
$I = [-1, 1]$	$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$	nespojitost

Přednáška (12)

16. 11. 2022

Věta 6.2 Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném neuzavřeném intervalu I. Pak $f(x)$ zde nabývá maxima i minima.

Důkaz: a) standardní pomocí posloupností
b) převedení na předchozí větu 6.1

b) BÚNO pro maximum   položme $M = f(I) = \{ f(x); x \in I \}$
$S = \sup M$

věta 6.1 říká, že M je omezená, tedy i shora omezená $\Rightarrow$ $S \in \mathbb{R}$
tvrdíme $\exists x_0 \in I$ takový že $f(x_0) = S$ (tojest, že supremum patří do množiny, a tedy se rovná maximu)
$f(x) \leq S \quad \forall x \in I$ plyne z vlastností suprema – dokazuju, že musí platit rovnost, a to sporem

← rovnost neplatí, platí pouze ostrá nerovnost – co se stane dál?

důkaz: [??] nechť $f(x) < S$ pro $\forall x \in I$
pomocná funkce $\varphi(x) = \frac{1}{S - f(x)}$, $x \in I$ $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ spojité v I (jmenovatel $\neq 0$)

mějme $k > 0$ libovolné, pak $S - \frac{1}{k} < S = \sup M$
supremum je nejmenší horní odhad $\Rightarrow$ $\exists x \in I: \; f(x) > S - \frac{1}{k}$
$\frac{1}{k} > S - f(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) > k$

k bylo libovolné, úplně jakékoliv $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ je shora neomezená v I – spor s větou 6.1 $\lightning$

Pozn. předpoklady opět nelze obecně vynechat

- $I = (0, 1)$ $f(x) = x$ $\nexists$ max, min
- $I = [-1, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $\nexists$ max, min
- $I = [0, \infty)$ $f(x) = \frac{x \sin x}{x+1} = \frac{x}{x+1} \sin x$ $\exists$ nekonečně mnoho lokálních extrémů, ale neexistují globální

Přednáška (13)

23. 11. 2022

Def. Nechť $f(x): I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 vzhledem k I:

- globální maximum, pokud: $f(x_0) \geq f(x), \; \forall x \in I$
- lokální maximum, pokud $\exists \delta > 0: f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U(x_0; \delta) \cap I$
- ostré lokální maximum, pokud $\exists \delta > 0: f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in P(x_0; \delta) \cap I$

Analogicky se definuje globální minimum, lokální minimum a ostré lokální minimum.

Souhrnný název je EXTRÉM (= maximum nebo minimum)

POZOR obecně neplatí $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0$ lokální extrém

Př. $f(x) = |x|$ (ostré) globální minimum v $x = 0$, ale derivace v tomto bodě neexistuje, tedy ani není nulová

Př. $f(x) = x^3$ $I = [-1, 1]$ má nulovou derivaci v $x = 0$, ale nemá tam žádný extrém
$x = 1$ je globální maximum vůči I, ale derivace v něm není nulová
(ekvivalentně $x = -1$)

Věta 6.3 Nechť $f(x): I \to \mathbb{R}$. Je-li $x_0 \in I$ vnitřní bod, $f'(x_0)$ existuje a je nenulová, potom x_0 není extrém (ani lokální) $f(x)$ vůči I.

Důkaz: víme $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$ BÚNO předpokladejme $f'(x_0) < 0$

Pak z lemmatu 2.1 víme, že $\exists \delta > 0: x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$

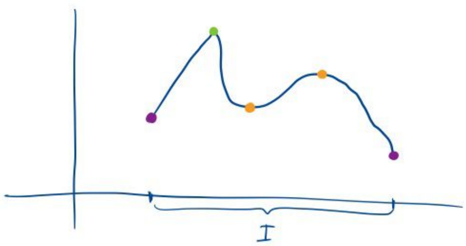
nechť navíc $P(x_0, \delta) \subset I$, neboť bod x_0 je vnitřní

2 úvahy:

1) $x \in P_+(x_0, \delta) \Rightarrow x - x_0 > 0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \quad f(x) < f(x_0)$
$x > x_0$
$\Rightarrow x_0$ není lokální minimum

2) $x \in P_-(x_0, \delta) \Rightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad f(x) > f(x_0)$
$x < x_0$
$\Rightarrow x_0$ není lokální maximum $\square$

Body podezřelé z extrému



body, kde derivace neexistuje

body, kde je derivace nulová

krajní body intervalu

Pro zatýkání podezřelých je ale nejdříve potřeba vědět, zda byl vůbec spáchán zločin – zda nějaký extrém vůbec existuje

Věty o střední hodnotě

Věta 6.4 (Rolle) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$. Nechť $f(a) = f(b)$. Nechť existuje derivace $f'(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Potom:

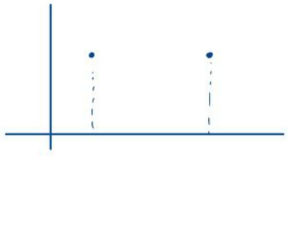
$$\exists c \in (a, b) \text{ taková, že } f'(c) = 0$$

Důkaz: označme $K = f(a) = f(b)$

2 případy

1) nechť $f(x) = K$ $\forall x \in (a, b)$ pak $f'(x) = 0$ pro $\forall x \in (a, b)$ c libovolné z (a, b)

2) nechť $\exists \tilde{x} \in (a, b)$ takové, že $f(\tilde{x}) \neq K$ BÚNO berme $f(\tilde{x}) > K$



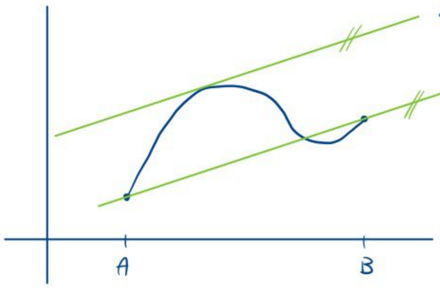
mějme $c \in [a, b]$ je globální maximum (víme, že existuje, z věty 6.2)

pak $f(c) \geq f(\tilde{x}) > K \Rightarrow c \in (a, b)$, tj. c je vnitřní bod $[a, b]$

Z věty 6.3 $f'(c) = 0$ (c je extrém, takže jeden z předpokladů věty 6.3 neplatí; předpoklady jsou vnitřní bod, existence derivace a nenulovost derivace)

Přednáška 13 — 23.11.2022

Věta 6.5 (Lagrange) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a,b]$ a nechť $\exists f'(x)\ \forall x \in (a,b)$.
Pak $\exists c \in (a,b)$ takové, že
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Důkaz: TRIK – převedení na Rolleovu větu

pomocná fce $\varphi(x) = f(x) - L(x-a), \quad x \in [a,b]$

kde $L = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (konstanta)

$\varphi(x)$ je evidentně spojitá

$\varphi(a) = f(a)$

$\varphi(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$

$\Rightarrow \varphi(x)$ splňuje předpoklady Rolleovy věty

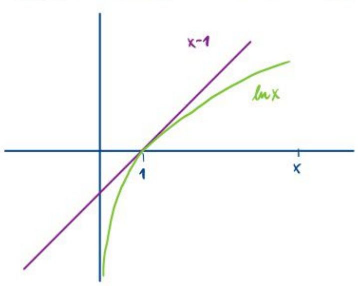
Takže z Rolleovy věty $\exists c \in (a,b) : \varphi'(c) = 0$

neboli $f'(c) = L$

$\varphi'(c) = f'(c) - L$

Př. $\ln x < x-1 \quad \forall x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) > 0 \quad \forall x > 1$

$\psi(x) = x - 1 - \ln x$



aplikujeme Lagrangeovu větu na $\psi(x)$ na intervalu $[1,x]$

$$\frac{\psi(x)-\psi(1)}{x-1} = \psi'(c)$$

$$\frac{\psi(x)-(0)}{x-1} = \psi'(c)$$

$$\psi(x) = \underbrace{(x-1)}_{\text{tohle je kladné}}\ \psi'(c)$$

$c \in [1,x]$

$\psi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$\psi'(c) = 1 - \frac{1}{c}$

$c > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} < 1$

$\Rightarrow \psi'(c) > 0$

taky kladné

$\Rightarrow \psi(x)$ je kladné $\square$

Věta 6.6 Nechť $\exists \delta > 0$ takové, že $f(x)$ je spojitá v $\mathcal{U}(x_0, \delta)$, nechť $\exists f'(x)$ vlastní pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$.
Potom:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x), \quad \text{existuje-li limita na pravé straně} =$$

Pozn. platí jednostranné verze (spojitost zprava, limita a derivace v pravém okolí; nebo vše v levém)

Důkaz: provedeme pro pravostrannou verzi

Víme: $f(x)$ je spojitá v intervalu $(x_0, x_0+\tilde{\delta})$
existuje derivace $\forall x \in (x_0, x_0+\tilde{\delta})$
$f'(x) \to L$, $x \to x_0+$

cíl: ukázat, že $f'(x_0)$ existuje a rovná se L
čili ukázat (✳)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \quad x \in P_+(x_0, \delta) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathcal{U}_+(L, \varepsilon)$$

nechť $\varepsilon > 0$ dáno : chceme dokázat : $\exists \delta > 0 : \forall c \in P_+(x_0, \delta)$ platí $f'(c) \in \mathcal{U}_+(L, \varepsilon)$
BÚNO $\delta < \tilde{\delta}$

buď $x \in (x_0, x_0+\tilde{\delta})$ libovolné

pak pustíme Lagrangeovu větu na interval $[x_0, x]$

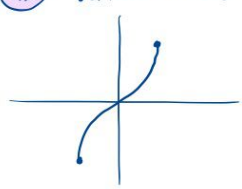
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$$

$c \in (x_0, x) \subset (x_0, x_0+\delta)$

tedy $f'(c) \in \mathcal{U}_+(L, \varepsilon)$
tím pádem i (✳) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathcal{U}_+(L, \varepsilon)$

což je přesně to, co jsme na začátku chtěli

Př derivace arcsin v bodě $x = 1$



víme:
$\arcsin(x)$ spojité na $\mathcal{U}_-(1, \delta)$
známe derivaci na vnitřních bodech: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
věta 6.6 říká: jde-li $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ zlimitit, limita je derivace v bodě $x = 1$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$$

$$x \to 1- \qquad \sqrt{1-x^2} \to 0+ \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty$$

Př $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
spojitá v $\mathbb{R}$
co derivace?

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

do vzorce nelze dosadit ± 1
(rovněž plyne z věty 4.3
– derivace složené funkce
– bylo by tam výrazy zlobivý nekonečno)

takže co s $f'(\pm 1)$

$$f'(\pm 1) = \lim_{x \to \pm 1} f'(x) = \lim_{x \to \pm 1} \underbrace{\frac{2x}{3}}_{\to \frac{2}{3}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}_{\to \infty} = +\infty$$

Důsledky Lagrangeovy věty

① $F(x)$ spojitá v I (libovolný interval) a $F'(x)$ je nulová pro každý vnitřní bod $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ $F(x)$ je konstantní

Důkaz: položme $K := F(x_0)$, $x_0 \in I$ libovolné pevné

tvrdíme, že $F(x) = K \quad \forall x \in I$

nechť $x \in I$, BÚNO $x \neq x_0$, užijme Lagrangeovu větu na $[x_0, x]$, resp. $[x, x_0]$

$\Rightarrow \exists c$ mezi x a x_0 tž. $F(x) - F(x_0) = F'(c) \cdot (x - x_0)$

c leží mezi body x a x_0 $\Rightarrow$ musí to být vnitřní bod intervalu I

o vnitřních bodech vím, že jejich derivace je nula $F'(c) = 0$

$$F(x) - F(x_0) = 0 \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow F(x) = F(x_0) = K \qquad \square$$

② $F_1(x)$, $F_2(x)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ v otevřeném I $\Rightarrow$ $\exists K$ takové, že $F_2(x) = F_1(x) + K$ $\forall x \in I$

Důkaz: použije se ① na $F := F_2 - F_1$

$\boxed{\text{DOMÁCÍ CVIČENÍ}}$

Lemma 6.2 (O lepení primitivní funkce) Nechť $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou spojité v bodě x_0. Potom už $F'(x_0) = f(x_0)$, a tedy $\int f(x)\,dx = F(x)$ v celém (a,b).

Důkaz: převedení na větu 6.6 (limita derivací)

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} F'(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

věta 6.6

splňujeme: spojitost v x_0

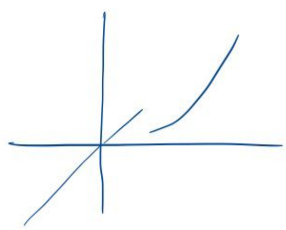
existuje $F'(x)$ na jistém $P(x_0)$

protože $F'(x) = f(x)$ na jistém $P(x_0)$

věta o limitě spojité funkce

Př. stará známá $f(x) = \max\{1, x^3\}$

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x & v\ (-\infty, 1) \\ \frac{x^4}{4} & v\ (1, \infty) \end{cases}$$



položme $F(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \frac{x^4}{4} & x > 1 \end{cases}$

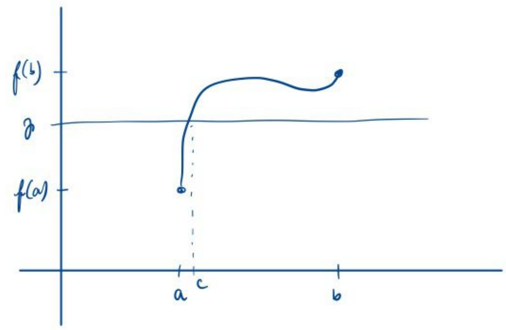
$F(x)$ spojitá v bodě 1 $\Rightarrow$ $F'(1) = f(1)$ a tedy $\int f(x)\,dx = F(x)$ na celém $\mathbb{R}$

použito lemma 6.2 pro podložení toho tvrzení, že ten integrál funguje v celém $\mathbb{R}$

Připomenutí: I je interval obecného typu v $\mathbb{R}$

Def. Řekneme, že $f(x)$ má v I **Darbouxovu vlastnost** (je **darbouxovská**), jestliže platí následující implikace:

pokud y leží mezi $f(a)$ a $f(b)$, kde $a, b \in I$, pak $\exists c$ mezi a, b takové, že $f(c) = y$



Věta 2.6 říká přesně tohle: že pokud je funkce spojitá v I, je darbouxovská v I.

Lemma 2.2 $\longrightarrow$ je-li funkce darbouxovská, pak zobrazuje interval na interval
$f(x)$ darbouxovská v I $\Rightarrow$ $f(I)$ je interval

Věta 6.7: Nechť $f(x)$ je spojitá v otevřeném I, nechť existuje $f'(x)$ vlastní $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ je darbouxovská.

Důkaz: nepřednáší se a nezkouší se

Poznámky:
- neplatí $f(x)$ spojitá $\not\Rightarrow$ $f'(x)$ spojitá, ale platí alespoň $f(x)$ spojitá $\Rightarrow$ $f'(x)$ je darbouxovská
- funkce není darbouxovská $\Rightarrow$ nemá primitivní funkci; př. $\operatorname{sgn} x$

Věta 6.9 (l'Hospitalovo pravidlo) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\exists f'(x), g'(x)$ vlastní a navíc $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in P(x_0, \delta)$.
Nechť dále platí buď (a) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ $x \to x_0$
(b) $|g(x)| \to +\infty$, $x \to x_0$

Potom: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$ má-li pravá strana smysl.

Př. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} \overset{?}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x) - x\cos x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{3x} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

použijeme l'Hospitala typ $\frac{0}{0}$

$\cos x - (-x\sin + \cos x)$

otazníček proto, že když to píšu, ještě nevím, jestli má pravá strana smysl

Př. $$\lim_{x \to 0+} x^a \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\underbrace{x^{-a}}_{\text{jmenovatel} \to +\infty}} \overset{?}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^a \cdot x}{-a \cdot x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^a}{-a} = \underline{\underline{0}}$$

a pevné kladné

l'Hospital $\frac{\text{něco}}{\infty}$

Věta 6.8 (Cauchy) Nechť $f(x), g(x)$ jsou spojité v $[a,b]$. Nechť existují derivace $f'(x), g'(x)$ vlastní pro $\forall x \in (a,b)$ (pro každý vnitřní bod) a navíc $g'(x) \neq 0$. Pak $\exists c \in (a,b)$ takové, že:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Důkaz:

krátký triková: TRIK – pomocná funkce

$$\psi(x) = \left(\underline{f(x)} - f(a)\right)\left(g(b)-g(a)\right) - \left(f(b)-f(a)\right)\left(\underline{g(x)}-g(a)\right)$$

vidíme: $\psi(x)$ je spojitá v $[a,b]$ (věta 2.14)

$\psi(a) = 0 - 0 = 0$

$\psi(b) = 0 - 0 = 0$

$\psi'(x) = \left(g(b)-g(a)\right) f'(x) - \left(f(b)-f(a)\right) g'(x)$

Z Rolleovy věty 6.4: $\hookrightarrow \exists c \in (a,b)$ takové, že $\psi'(c) = 0$

$\psi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c)\left(g(b)-g(a)\right) = g'(x)\left(f(b)-f(a)\right)$

Což už je skoro to na začátku, ale ještě potřebuju ověřit pár podmínek (nesmím dělit nulou)

$g'(x) \neq 0$ – v předpokladech platí

$g(b)-g(a) \neq 0$ $\qquad g(b)-g(a) = \underbrace{g'(d)}_{\neq 0 \text{ předpoklady}} \underbrace{(b-a)}_{\neq 0 \text{ pokud má interval nějakou délku}}$ platí

Lagrangeova věta

pořádný ale dlouhý důkaz: v zápiscích

Přednáška (14) 27. 11. 2022

Důkaz l'Hospitala

označme $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak cílem ukázat $\frac{f(x)}{g(x)} \to L$, $x \to x_0$

1. $x \to x_0+$, $x_0 \in \mathbb{R}$, varianta a), tj. $f(x), g(x) \to 0$, $x \to x_0$

podobně jako věta 6.6

$\varepsilon > 0$ dáno víme, že $\exists \delta : c \in P_+(x_0, \delta) \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} \overset{(*)}{\in} \mathcal{U}(L, \varepsilon)$ $\forall c \in P_+(x_0, \delta)$

$c \in (x_0; x_0 + \delta)$

TRIK: dodefinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$, což nemá na limitu vliv

buď $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ libovolné; pak dle Cauchyho věty 6.8: (použitá na interval $[x_0, x]$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \overset{(*)}{\in} \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

$$c \in (x_0, x) \Rightarrow c \in P_+(x_0, \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon) \quad \square$$

2. $x \to +\infty$, varianta a), tj. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

TRIK převedeme na předchozí případ (už umíme l'Hospitala ve vlastních bodech; s jeho pomocí teď dokážeme l'Hospitala v nekonečnu)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \to 0+} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{x \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(\frac{-1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(\frac{-1}{y^2}\right)}}$$

lemma 2.3 (ekvivalentní substituce)

l'Hospital z bodu 1.

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}_{\text{tohle je to, co jsme chtěli dostat}} \quad \square$$

3. varianta b) – náčrt důkazu pro pravostrannou limitu $x \to x_0+$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$, $x \to x_0$

$$\frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)}$$

nechť $x_0 < x < y$

Cauchyho věta 6.8 $\Rightarrow \exists c \in (x, y)$

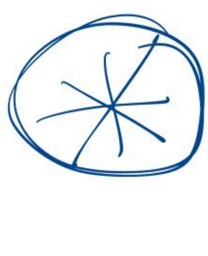
když $y = x+h$ pak se to rovná

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$f(x) - f(y) = \frac{f'(c)}{g'(c)} (g(x) - g(y))$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underset{(*)}{\frac{f(y)}{g(x)}} + \underset{\text{jde do } L}{\frac{f'(c)}{g'(c)}} \left(1 - \underset{(**)}{\frac{g(y)}{g(x)}}\right)$$

cesta k závěru: fixuji y blížko x_0 $\rightarrow$ i c je blížko x_0



x je blížko x_0 $\Rightarrow$ $|g(x)|$ je velmi velké (to je předpoklad varianty b))

$\Rightarrow$ (*) a (**) jdou do nuly

tenhle důkaz nebude zkoušet

Téma: Monotonie / konvexita a znaménko derivace

Věta 6.10 (Monotonie a znaménko derivace) Nechť $f(x)$ je spojité v I, nechť $f'(x) > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0) pro každé $x \in I$ vnitřní. Pak $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) na celém I.

Důkaz: nechť $x_1 < x_2 \in I$ libovolné
aplikujme větu 6.5 (Lagrange) na $[x_1, x_2]$ $\Rightarrow$ $\exists c \in (x_1, x_2)$: $\underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{>0} = \underbrace{f'(c)}_{\text{vnitřní bod}} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$

$I \to f'(c) > 0$

$f(x_2) > f(x_1) \Longleftarrow > 0$

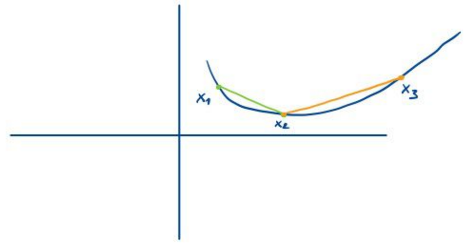
Př. $f(x) = x^n$ spojitá v $I = [0, \infty)$ $\Rightarrow$ funkce je rostoucí
$f'(x) = n x^{n-1} > 0 \quad \forall x > 0$ – tj. jen pro vnitřní body

věta 6.10 $\Rightarrow$ funkce je striktně rostoucí na $[0, \infty)$ (až do nuly)

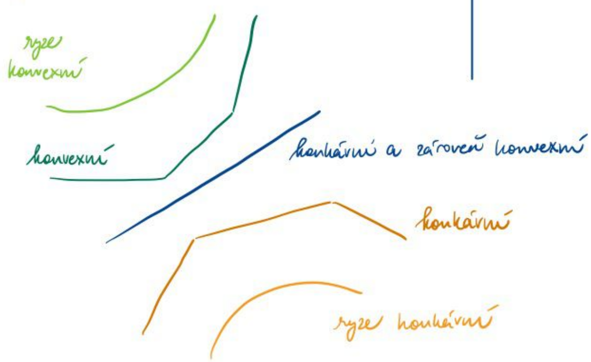
Def.: Funkce $f(x)$ se nazve **ryze konvexní** v I, jestliže pro $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$ platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

$\uparrow$
směrnice sečny procházející body x_1, x_2



Analogicky:
$\leq$ konvexní
$\geq$ konkávní
$>$ ryze konkávní



Věta 6.11 (Konvexita a monotonie derivace) Nechť $f(x)$ je spojité v I, nechť $\exists f'(x)$ vlastní všude uvnitř I a nechť $f'(x)$ je zde rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající). Potom $f(x)$ je v I ryze konvexní (resp. konvexní, konkávní, ryze konkávní).

Důkaz: nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ libovolné
dle věty 6.5 (Lagrange) $\quad \exists c_1 \in (x_1, x_2)$ takové, že $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1)$

$\exists c_2 \in (x_2, x_1)$ takové, že $\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$

vidíme $c_1 < c_2$
derivace rostoucí $\Rightarrow$ $f'(c_1) < f'(c_2)$ $\Rightarrow$ stejná nerovnost platí mezi členy nalevo $\Leftrightarrow$ ryzí konvexita

Věta 6.12 (Konvexita a znaménko druhé derivace) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $\exists f'(x)$ vlastní všude uvnitř I a nechť zde platí $f''(x) > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0). Pak $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní, konkávní, ryze konkávní) v celém I.

Důkaz: kombinace předchozích vět

označme $\tilde{I}$ vnitřek I $\quad f''(x) = (f'(x))' > 0 \quad$ v $\tilde{I}$

věta 6.10 $\Rightarrow$ $f'(x)$ je rostoucí na celém $\tilde{I}$

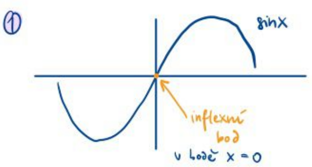
věta 6.11 $\Rightarrow$ $f(x)$ je ryze konvexní v celém I

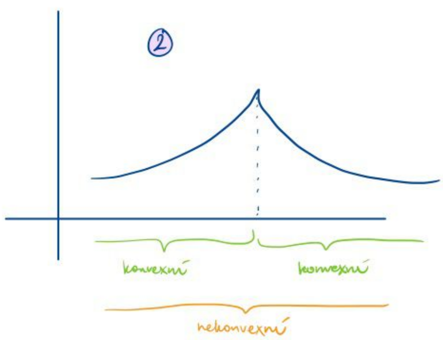
Def. Řekneme, že x_0 je **inflexní bod** funkce $f(x)$, pokud:

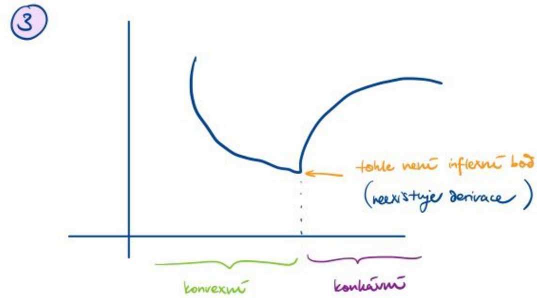
(i) $\exists f'(x_0)$ (i nevlastní)

(ii) $\exists \delta > 0$ takové, že $f(x)$ je na jednom z intervalů $(x_0, x_0+\delta)$, $(x_0-\delta, x_0)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní

Obrázkové příklady







KAP. 7: POSLOUPNOSTI

Def. **Posloupnost** je funkce $a(n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přičemž místo $a(n)$ píšeme a_n. Značíme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nebo $\{a_n\}$.

Př. zadání posloupnosti
- vzorcem $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = (-1)^n \quad c_n = \frac{n^n}{n!}$
- rekurentně $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \geq 1$

$a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \geq 1$ (Fibonacciho posloupnost)

Def.: Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve **limita posloupnosti** $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon).$$

Značíme $a_n \to a$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Terminologie: je-li $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že $\{a_n\}$ **konverguje**

je-li $a = \pm\infty$, říkáme, že $\{a_n\}$ **diverguje do** $\pm\infty$

Pozorování: $a_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0$ platí $a_n \in U(a,\varepsilon)$ pro všechna n až na konečný počet výjimek

Př. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ – zákl. vlastnost reálných čísel

$a_n = (-1)^n$ limita neexistuje $\quad \pm\infty$ to být nemůže, posloupnost je omezená

pro spor předpokládejme $\{a_n\} \to A$

dodělat doma ideálně

Pozn. (i) Nechť $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $b \neq 0$. Pak

$$a_n + b_n \longrightarrow a + b$$
$$a_n b_n \longrightarrow ab$$
$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b},$$

má-li pravá strana smysl

(ii) Pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$: $\alpha \leq a_n \leq \beta$ a $a_n \to a$, pak $\alpha \leq a \leq \beta$.

(iii) Pokud $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \leq a_n \leq c_n$ a navíc $b_n \to a$, $c_n \to a$, pak limita a_n existuje a rovná se a.

(iv) Pokud $a_n \to 0$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená, pak $a_n b_n \to 0$.

Důkaz: domácí cvičení asi

Def. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se nazývá omezená, pokud existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < k$.

Def. Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se nazývá rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n < a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_n \leq a_{n+1}, \quad a_n \geq a_{n+1}, \quad a_n > a_{n+1}).$$

Pozn. konstantní posloupnost je neklesající a nerostoucí zároveň.

Věta 7.1 Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz: $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$

tedy z definice ε dáno $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

položme $\tilde{c} = \max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$

pak $\forall n \geq n_0$ $|a_n| < \tilde{c}$ – víme, že všechny členy od nějakého dál jsou omezené

ještě nic nevíme o členech a_n $n < n_0$ – ale víme, že je jich jen konečně mnoho

položme $c = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0-1}|, \tilde{c}\}$

pak už platí $a_n < c$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Věta 7.2. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Pak $\{a_n\}$ má limitu. Pokud je navíc $\{a_n\}$ omezená, pak konverguje.

Důkaz: BÚNO předpokládejme $\{a_n\}$ neklesající, tedy $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$

definujme $M := \{a_n, \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

M je omezená $\Leftrightarrow$ když $\{a_n\}$ je omezená

1) zaprvé předpokládejme, že M je omezená

je omezená a neprázdná $\Leftrightarrow$ $\exists \sup M \in \mathbb{R}$; označme $S := \sup M$
chtěli bychom ukázat $a_n \to S$

$S = \sup M \iff$ (i) $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq S$
(ii) $\forall S' < S \ \exists n \in \mathbb{N}$: $a_n > S'$

ε dáno podle (ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $a_{n_0} > S - \varepsilon$
pro $\forall n \geq n_0$: $S - \varepsilon < a_{n_0} \underset{\text{neklesající}}{\leq} a_n \underset{\substack{\text{supremum množiny} \\ \forall n \in \mathbb{N}}}{<} S \iff \forall n \geq n_0 \quad a_n \in \mathcal{U}(S, \varepsilon)$
$\iff a_n \to S$

2) zadruhé předpokládejme, že M není omezená
chtěli bychom ukázat $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

nechť $K > 0$ dáno posloupnost není (shora) omezená, takže jistě $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $a_{n_0} > K$
posloupnost je neklesající $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > K \iff a_n \to +\infty$

Pro rostoucí / nerostoucí / klesající posloupnost by se dokázalo podobně.

Def.: Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{a_n\}$, pokud $\forall \varepsilon > 0$ nastává $a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon)$ pro nekonečně mnoho hodnot $n \in \mathbb{N}$.

Př. $\{a_n\} = (-1)^n$ má hromadné body -1 a $+1$.

$\{\sin n\}_{n \in \mathbb{N}}$ každé číslo z $[-1, 1]$ je hromadným bodem ... poměrně těžké dokázat

Pokud $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$, pak a je jediným hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.

Důkaz : DOMA! aneb jak se na přednášce to konstatujeme, ale nedokazujeme, berme to jako fakt

Def. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že posloupnost $\{b_n\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$ (= podposloupnost vybraná z $\{a_n\}$), pokud existuje nějaká rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}$ taková, že $b_n = a_{k_n}$.

Věta 7.3 (O podposloupnosti a hromadném bodu) Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy když z $\{a_n\}$ lze vybrat podposloupnost, jejíž limita je a.

Důkaz. dokazujeme dvě implikace

1) „$\Rightarrow$" a je hromadný bod $\{a_n\}$ cílem najít podposloupnost s limitou a, tj najít posloupnost $\{k_n\}$

ε je dáno $\Rightarrow$ $\exists$ nekonečně mnoho prvků $\{a_n\}$, pro které platí $a_n \in U(a,\varepsilon)$

zvolme jeden z nich jako první člen podposloupnosti

(indukce)

předpokládejme, že už jsme našli $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1}$ takové, že platí $a_{k_i} \in U(a, \frac{1}{i})$

dále chceme nalézt $k_n > k_{n-1}$ takové, že $a_{k_n} \in U(a, \frac{1}{n})$

z definice hromadného bodu pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ plyne, že existuje nekonečně mnoho prvků $\{a_n\}$ pro které platí $a_{k_n} \in U(a, \frac{1}{n})$, tedy existuje nekonečně mnoho indexů k_n, pro které to platí

takových k_n je nekonečně mnoho a jsou to přirozená čísla $\Rightarrow$ některé z nich je jistě větší než k_{n-1}

$\{a_{k_n}\}$ je pak vybraná posloupnost z $\{a_n\}$, pro niž platí $a_{k_n} \in U(a, \frac{1}{n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tedy $a_{k_n} \to a$, $n \to \infty$

2) „$\Leftarrow$" víme, že existuje $k_1 < k_2 < \dots < k_i \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty}$

dodělat

Věta 7.4 (Bolzano–Weierstrass) Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je omezená. Pak má hromadný bod v $\mathbb{R}$.

Důkaz: nechť $L \le a_n \le K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

definujme si $M := \{x \in \mathbb{R},\ x \le a_n$ pro nekonečně $n\}$ (všechna reálná čísla, která mají nad sebou nekonečně mnoho prvků posloupnosti)

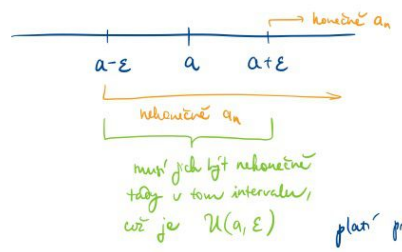
M je jistě omezená – dolní závora $= L$
– horní závora $= K$

věta A.4 $\rightarrow$ $\exists a \in \mathbb{R}$ takové, že $a = \sup M$, tj. platí
(i) $\forall x \in M : x \le a$
(ii) $\forall a' < a \ \exists x \in M : x > a'$

tvrdíme, že a je hromadný bod $\{a_n\}$
tak se na to podívejme

$\varepsilon > 0$ dáno $\quad a+\varepsilon \notin M \quad \Rightarrow \quad a_n < a+\varepsilon$ platí $\forall n$ až na konečně výjimek – tj. jen konečné množství prvků posloupnosti je větší než $a+\varepsilon$

$a-\varepsilon < a$
$a' < a \quad \Rightarrow \quad \exists x \in M : x > a - \varepsilon$



platí pro libovolné $\varepsilon \Rightarrow$ <u>a je hromadný bod</u> $\square$

Důsledek: Nechť $\{x_n\}$ splňuje $x_n \in [a,b] \ \forall n \in \mathbb{N}$. Pak existuje podposloupnost $\exists \tilde{x}_n$ a bod $\exists x_0 \in [a,b]$ takové, že $\tilde{x}_n$ konverguje k x_0, $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$

Důkaz: $\{x_n\}$ omezená, dle věty 7.4 existuje hromadný bod $\{x_n\}$, označíme ho x_0
dle věty 7.3 existuje podposloupnost $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$
zbývá ukázat, že $x_0 \in [a,b]$ $\quad a \le \tilde{x}_n \le b \quad$ v limitě se zachovává neostrá nerovnost (věta 2.9 pro funkce)

Věta 6.1: $f(x)$ spojitá v $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ je zde omezená

Důkaz: ?? $\quad f(x)$ není omezená $\Leftrightarrow \forall K > 0 \ \exists x \in [a,b] \ \ |f(x)| > K$

... sestavíme posloupnost
$K = 1 \quad \exists x_1 \in [a,b] \quad |f(x_1)| > 1$
$K = 2 \quad \exists x_2 \in [a,b] \quad |f(x_2)| > 2$
$K = 3 \quad \exists x_3 \in [a,b] \quad |f(x_3)| > 3$
... ...

$\Rightarrow \exists \{x_n\} \quad x_n \in [a,b] \quad |f(x_n)| > n$, zřejmě ??? $f(x_n) \rightarrow +\infty$

dle předchozího důsledku $\exists$ podposloupnost $\{\tilde{x}_n\}$ taková, že $\tilde{x}_n \rightarrow x_0 \in [a,b]$

není mi nějak úplně jasný, kde jsme vzali x_0

dle Heineho věty (trochu podvádíme) $\quad f(\tilde{x}_n) \rightarrow f(x_0) \in \mathbb{R}$
ale zároveň $\quad f(\tilde{x}_n) \rightarrow \infty$ $\quad$ ↯
(podposloupnost $f(x_n) \rightarrow \infty$)

Věta 6.2 $f(x)$ je spojitá v $[a,b]$ $\longrightarrow$ má zde globální maximum (a minimum)

Důkaz: $M := \{ f(x);\ x \in [a,b] \}$ $\quad S = \sup M \in \mathbb{R}$ (věta 6.1)

$\exists x_0 \in [a,b]$ takové, že $f(x_0) = S$; x_0 je maximum

užívám bod (ii) z vlastností suprema nasledovně: $S' = S - \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists x_n \in [a,b]$ takové, že $S - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq S$ ← (i) vlastnost suprema

(*) $f(x_n) \to S$ (věta o 2 policajtech)

$\exists$ podposloupnost $\{\tilde{x}_n\}$ $\quad \tilde{x}_n \to x_0 \in [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} f(\tilde{x}_n) \to f(x_0) \\ (*)\ f(\tilde{x}_n) \to S \end{array}\right\} f(x_0) = S$$

Def. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence** (je cauchyovská) jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad m,n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \;.$$

Věta 7.5 Následující tvrzení jsou ekvivalentní: (1) posloupnost $\{a_n\}$ konverguje
(2) posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská.

Důkaz: $\{a_n\}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\exists a \in \mathbb{R}$ taková, že $a_n \to a$, tj. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon)$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\quad \varepsilon > 0$ dáno $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2})$, tj. $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

nechť $m,n \geq n_0$ $\quad a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n) = (a_m - a) - (a_n - a)$

věta 1.1 o trojúhelníkové nerovnosti $\quad |a_m - a_n| \leq \underbrace{\underbrace{|a_m - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}}_{< \varepsilon}$

(2) $\Rightarrow$ (1) platí B-C formule

1. tvrzení: $\{a_n\}$ je omezená $\quad$ vezměme si $\varepsilon = 1$ $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m,n > n_0$ platí:

$|a_m - a_n| < 1$

speciálně $|a_n - a_{n_0}| < 1 \quad \forall n \geq n_0$

$$\underbrace{a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1}_{\text{omezenost}} \quad \forall n \geq n_0$$

2. $\exists a \in \mathbb{R}$ hromadný bod (z věty 7.4 o omezenosti a hromadném)

3. tvrdíme $a_n \to a$ (pak jsme hotovi)

$\varepsilon > 0$ dáno . užijeme B-C formuli pro $\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

a je hromadný bod $\Rightarrow$ $\underset{(*)}{a_m \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2})}$ pro nekonečně mnoho indexů m

když je jich nekonečně mnoho, jistě existuje nějaké $m \geq n_0$, pro které to platí
toto m fixujeme

$n \geq n_0$ dáno : $\quad a_n - a = a_n - a_m + a_m - a = (a_n - a_m) + (a_m - a)$

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_m|}_{\underset{(*)}{< \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{|a_m - a|}_{\underset{(*)}{< \frac{\varepsilon}{2}}}$$

$|a_n - a| < \varepsilon$ a je limita a_n $\square$

Poznámky
- 7.2 ($\{a_n\}$ omezená a monotónní $\Rightarrow$ konverguje)
- 7.4 ($\{a_n\}$ omezená $\Rightarrow$ má konečný hromadný bod)
- 7.5 ($\{a_n\}$ splňuje B-C podmínku $\Rightarrow$ konverguje)

} všechny užívají axiom suprema a prakticky jsou s ním ekvivalentní

$\boxed{\text{ÚPLNOST } \mathbb{R}}$

Př. Najděte limitu rekurentně zadané posloupnosti : $x_1 = 0 \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad \forall n \geq 1$

1. pokud limita existuje ($x_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$), pak $\underbrace{\begin{array}{l} x_{n+1} \to a \\ \sqrt{2 + x_n} \to \sqrt{2 + a} \end{array}}_{a = \sqrt{2 + a}}$ (Heineho věta)

2. dokážeme omezenost a monotonii posloupnosti

$a^2 - a - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a =$ buď -1 nebo 2 (pokud existuje a je konečná, musí se rovnat jednomu z těchto čísel)

Věta 7.6 (Heineho pro limitu) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(x_0)$. Potom je ekvivalentní:

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující (i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_n \neq x_0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

platí, že $f(x_n) \to A$

Důkaz: (1) ⇒ (2) nechť $\{x_n\}$ splňuje (i), (ii); cíl: $f(x_n) \to A$
tj. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U(A, \varepsilon)$

$\varepsilon > 0$ dáno

víme dle (1) $\exists \delta > 0 : \underset{(*)}{x \in P(x_0, \delta)} \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$

dle (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in U(x_0, \delta)$ (v definici limity jsme položili $\varepsilon = \delta$)
(ii) dokonce $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \underset{(*)}{x_n \in P(x_0, \delta)}$, neboť $x_n \neq x_0$

Tedy skutečně $f(x_n) \in U(A, \varepsilon)$ pro $\forall n \geq n_0$.

(2) ⇒ (1) převedeme na $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$

nechť neplatí (1) ... $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in P(x_0, \delta)$ takový, že $f(x) \notin U(A, \varepsilon)$

fixujme toto ε

užíváme zbytek formule pro $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \Rightarrow \exists x_n \in P(x_0, \frac{1}{n})$ takové, že $\underset{(*)}{f(x_n) \notin U(A, \varepsilon)}$

sestavili jsme takovou posloupnost, že pro ni platí (i) a (ii), ale $f(x_n) \not\to A$ (*)

□

Př. $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} = f\left(\frac{1}{n}\right)$, kde $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$

$x \to 0 \qquad e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \to e^1$

Heineho věta ... $x_0 = 0 \quad A = e$
$x_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad \frac{1}{n} \neq 0$ předpoklady splněny

Věta [bez čísla a bez důkazu] (Heineho pro spojitost v bodě) $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 ⇔ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \to x_0$ je $f(x_n) \to f(x_0)$.

Př. $a_n \to a \Rightarrow \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow \sqrt{2 + a}$, kde $x_n = a_n$ a $f(x) = \sqrt{2+x}$, $f(x)$ tedy spojitá v a.

Věta 7.7 (Heineho pro spojitost v intervalu) Nechť $f(x)$ je definována v I. Potom je ekvivalentní:

(1) $f(x)$ je spojitá v I

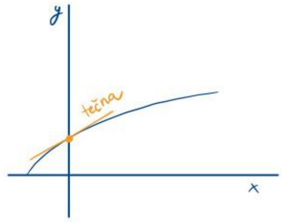
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující (i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_0 \in I$, $x_n \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$

platí $f(x_n) \to f(x_0)$.

Důkaz: nepřednáší se a nezkouší se

KAP. 8: TAYLORŮV POLYNOM

Motivační příklad: chceme spočítat $\sqrt{1+x}$ přibližně pro x malé



první odhad – podle tečny $\quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

ale chtěli bychom to ještě přesněji

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + cx^2$$

idea: volme c tak, aby $f''(0) = p''(0)$

$$-\frac{1}{4} = 2c$$

$$c = -\frac{1}{8}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$p'(x) = \frac{1}{2} + 2cx$$

$$p''(x) = 2c$$

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Def. (Derivace vyšších řádů) k-tá derivace se značí $f^{(k)}(x)$ nebo $\frac{d^k f(x)}{dx^k}$ a definuje se:

(i) $f^{(0)}(x) = f(x)$
(ii) $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$.

Speciálně $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$.

Def. $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval. $f(x)$ je třídy C^n v I, značíme $f(x) \in C^n(I)$, jestliže $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ jsou spojité v I.

Speciálně $f \in C^0(I)$ (neboli $f \in C(I)$) značí, že $f(x)$ je spojitá v I.

Def. Nechť funkce $f(x), g(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je malé o od $g(x)$ pro $x \to x_0$, značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, jestliže $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, $x \to x_0$.

$x \in P(x_0, \delta)$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

Řekneme, že $f(x)$ je velké O od $g(x)$ pro $x \to x_0$, značíme $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, jestliže

$$\exists C > 0, \exists \delta > 0 \text{ takové, že } |f(x)| \leq C|g(x)|, \ x \in P(x_0, \delta)$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C \quad \forall x \in P(x_0, \delta)$$

$$\exists C > 0 \ \exists \delta > 0$$

Řekneme, že $f(x)$ je řádově rovno $g(x)$ pro $x \to x_0$, jestliže $\frac{f(x)}{g(x)} \to L$, $x \to x_0$, kde $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Značíme $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon \qquad \forall x \in P(x_0, \delta)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$$

Př. $\ln(x) = o(\sqrt{x})$, $x \to \infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \square$

Př. $\sin x - x = o(x^2),\ x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

Př.
$$\left.\begin{aligned} \sin x &\sim x \\ \ln(1+x) &\sim x \end{aligned}\right\} x \to 0$$

Def. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ celé pevné definujeme:

$$Q_{x_0,k}(x) = \frac{1}{k!}(x-x_0)^k$$

Speciálně
$$Q_{x_0,0}(x) = 1$$
$$Q_{x_0,1}(x) = x - x_0$$
$$Q_{x_0,2}(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2$$

Lemma 8.1 Pro funkce $Q_{x_0,k}(x)$ platí

(1) $Q_{x_0,k}(x)$ je polynom stupně k

(2) $(Q_{x_0,0}(x))' = 0,\quad (Q_{x_0,k}(x))' = Q_{x_0,k-1}(x),\quad \forall k \geq 1$

(3) $Q^{(\ell)}_{x_0,k}(x_0) = \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases}$ kde $k \geq 0$, $\ell \geq 0$ libovolné

Důkaz: (1) jasné

(2) $(1)' = 0$ $\qquad \left(\frac{1}{k!}(x-x_0)^k\right)' = \frac{1}{k!}k(x-x_0)^{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$

(3) $Q^{(k)}_{x_0,k}(x_0) = Q_{x_0,0}(x_0) = 1$ dle bodu (2)

$$Q^{(\ell)}_{x_0,k}(x_0) = \begin{cases} \ell > k & \text{jasné (zderivovalo se to až „za" } Q_{x_0,0}(x)) \\ \ell < k & Q_{x_0,s}(x_0) = \frac{1}{s!}\underbrace{(x_0-x_0)}_{=0}{}^{s}, \quad s = k-\ell > 0 \end{cases}$$

Přednáška 18 — 8.12.2022

Def. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $\mathcal{U}(x_0)$. Potom funkce

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

se nazývá n-tý Taylorův polynom funkce $f(x)$ o středu x_0.

Značíme $T^f_{x_0,n}(x)$.

Pozn. Dá se napsat též

$$T^f_{x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \cdot Q_{x_0,k}(x)$$

Z lemmatu 8.1 plyne, že $f(x)$ a $T^f_{x_0,n}(x)$ se shodují hodnotami všech derivací řádu $k \le n$ v bodě x_0.

Přednáška 19 — 14.12.2022

Věta 8.1 (O Taylorovu polynomu) Nechť $f \in C^n(\mathcal{U}(x_0))$. Pak $f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$. Navíc $T^f_{n,x_0}(x)$ je jediný polynom stupně $\le n$ mající tuto vlastnost.

Důkaz: BÚNO $x_0 = 0$

označme $p(x) = T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)\, Q_k(x)$ $\qquad$ [$Q_k(x)$ jsou zde $\frac{x^k}{k!}$]

dle lemmatu 8.1 $\quad Q_k^{(l)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{pro } l=k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$$p^{(l)}(0) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \cdot Q_k^{(l)}(0) = f^{(l)}(0)$$

1) aproximační vlastnost $\qquad$ cíl: $\frac{f(x)-p(x)}{x^n} \to 0, \quad x \to 0$

metoda: l'Hospital $\frac{"0"}{0}$ $\quad \frac{f'(x)-p'(x)}{n x^{n-1}} \to \frac{f''(x)-p''(x)}{n(n-1)x^{n-2}} \quad \dots$ provede se n-krát

$$\to \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)}{n!} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{jde do nuly (Taylorův polynom se shoduje až do n-té derivace)} \\ \longrightarrow \text{nenulové číslo} \end{array}$$

$= \underline{0}$ $\square$

2) jednoznačnost

cíl: nechť $q(x)$ polynom stupně $\le n$ takový, že $\frac{f(x)-q(x)}{x^n} \to 0, \ x \to 0$

chceme ukázat, že pak už nutně $q(x) = p(x)$

$$\frac{\cancel{f(x)}^{\,p(x)} - q(x)}{x^n} = \underbrace{\frac{f(x)-q(x)}{x^n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{f(x)-p(x)}{x^n}}_{\to 0} \longrightarrow 0, \ x \to 0$$

nechť $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

pro spor předpokládejme $\exists s \in \{1,2,\dots,n\}: \ q_s \ne p_s$

pro nejmenší takové s

$$p(x) - q(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)x^k = (a_s - b_s)x^s + \sum_{k=s+1}^{n}(a_k-b_k)x^k$$

$$\frac{p(x)-q(x)}{x^s} = (a_s - b_s) + \sum_{k=s+1}^{n}(a_k - b_k)x^{k-s}, \quad k-s > 0$$

$\to a_s - b_s, \ x \to 0 \ ; \ a_s - b_s \ne 0$

zároveň však

$$\frac{p(x)-q(x)}{x^s} = \underbrace{\frac{p(x)-q(x)}{x^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{x^{n-s}}_{\to 0} \longrightarrow 0, \ x \to 0$$

Př. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0$

Př. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{n-tý člen}} + o(x^{2n+2})$

Př. $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n), \quad x \to 0$

Věta 8.2 (Derivace a integrál Taylorova polynomu) Předpokládejme, že $F(x) \in C^{n+1}(\mathcal{U}(x_0))$; nechť $F'(x) = f(x)$ (tj. $\int f(x)\,dx = F(x)$) na $\mathcal{U}(x_0)$. Potom:

(1) $\left(T^F_{n+1,x_0}(x)\right)' = T^f_{n,x_0}(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$

(2) $\int T^f_{n,x_0}(x)\,dx = T^F_{n+1,x_0}(x) + c$ v $\mathcal{U}(x_0)$ při správné volbě c (neplatí pro libovolnou c)

Důkaz: (1) $T^F_{n+1,x_0} = \sum_{k=0}^{n+1} F^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k,x_0}(x)$

$$\left(T^F_{n+1,x_0}\right)' = \sum_{k=0}^{n+1} \underset{\uparrow\ \text{konstanta}}{F^{(k)}(x_0)} \left(Q_{k,x_0}(x)\right)' = \begin{cases} =0, & k=0 \\ \sum_{k=1}^{n+1} F^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k-1,x_0}(x) = \underbrace{\sum_{l=0}^{n} F^{(l+1)}(x_0)\ Q_{l,x_0}(x)}_{=} \end{cases}$$

$$F^{(l+1)} = (F')^{(l)} = f^{(l)} \Rightarrow \sum_{l=0}^{n} f^{(l)}(x_0)\, Q_{l,x_0}(x) = T^f_{n,x_0}(x)$$

(2) $T^f_{n,x_0}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\ Q_{k,x_0}(x)$

$$\int T^f_{n,x_0}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \underset{\downarrow\ (f^{(-1)})^{(k+1)} = F^{(k+1)}}{f^{(k)}(x_0)} \underbrace{\int Q_{k,x_0}(x)\,dx}_{Q_{k+1,x_0}(x)} = \sum_{k=0}^{n} F^{(k+1)}(x_0)\ Q_{k+1,x_0}(x) + c = \sum_{l=1}^{n+1} F^{(l)}(x_0)\ Q_{l,x_0}(x) + c$$

$l = k+1$ je třeba volit $c = F(x_0)$

pak $= T^F_{n+1,x_0}(x)$ □

Př. $\cos(x) = (\sin(x))'$

Př. $\ln(1+x) = \int \frac{1}{x+1}\,dx, \quad x \in (-1, \infty)$

pro x malé nalézt T. pol.

$$(x+1)^{-1} \overset{T}{=} 1 - x + x^2 - x^3 \dots = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$T^{\ln(1+x)}_{n+1,0} = c + \int \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

↳ v tomto případě $c = 0$

$c = \ln(1+0)$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0$$

Věta 8.3 (operace s malým o pro $x \to 0$)

(1) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$, $x \to 0$, $m \geq n$. Pak $af(x) + bg(x) = o(x^n)$, $x \to 0$.

(2) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $x \to 0$. Pak $a x^m f(x) = o(x^{m+n})$, $x \to 0$.

(3) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$, $x \to 0$. Pak $f(x)g(x) = o(x^{n+m})$, $x \to 0$.

(4) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) \sim x^m$, $x \to 0$, $m \geq 1$. Potom $f(g(x)) = o(x^{m \cdot n})$, $x \to 0$.

Důkaz: rozepsáním definic

(1) $\frac{f(x)}{x^n} \to 0$, $x \to 0$ $\qquad a f(x) + b g(x) = o(x^n)$

$\frac{g(x)}{x^m} \to 0$, $x \to 0$ $\qquad \underbrace{a}_{a} \underbrace{\frac{f(x)}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{b}_{b} \underbrace{\frac{g(x)}{x^m}}_{\to 0} \cdot \underbrace{x^{m-n}}_{\substack{m-n \geq 0 \\ x^{m-n} \to 0}} = 0$ $\square$

(2)

(3)

Definice a věta o aritmetice limit

(4) víme $\frac{f(y)}{y^n} \to 0$, $y \to 0$ (*) $\qquad g(x) \sim x^m \quad \frac{g(x)}{x^m} \to c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$

cíl: $\frac{f(g(x))}{x^{m \cdot n}} \to 0$, $x \to 0$

upravme $\frac{f(g(x))}{(g(x))^n} \cdot \underbrace{\left(\frac{g(x)}{x^m}\right)^n}_{\to c^n}$ (aritmetika limit / složená funkce)

TRIK

ještě přepíšeme DALŠÍ TRIK

$$\frac{f\left(\frac{g(x)}{x^m} \cdot x^m\right)}{\left(\frac{g(x)}{x^m} \cdot x^m\right)^n} \qquad \underbrace{\underbrace{\frac{g(x)}{x^m}}_{\to c \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{x^m}_{\to 0}}_{\to 0} \; \ldots \text{ vnitřní funkce}$$

$\frac{g(x)}{x^m} \cdot x^m \neq 0$ na jistém $P(0)$

$x^m \neq 0$ jasné

$\frac{g(x)}{x^m} \neq 0$ z nenulové limity vyplývá odraženost od nuly na jistém $P(0)$

mohu použít větu o limitě složené funkce

vnitřní f. $\to 0$ to je jakoby to y (*)

$$\frac{f\left(\frac{g(x)}{x^m} x^m\right)}{\frac{g(x)}{x^m} x^m} \to 0$$

též platí (2') $f(x) = o(x^n) \Rightarrow \frac{f(x)}{x^m} = o(x^{n-m}),\ x \to 0.$

Důkaz: DOMÁCÍ CVIČENÍ

Př. Malé o na počítání limit

$$x \to 0 \quad \frac{x^3}{\underbrace{\sin x \ln(1+x^2)}_{f(x)}}$$

víme $\sin x = x + o(x)$

$\ln(1+y) = y + o(y) \Rightarrow \ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$

$$f(x) = \big(x + o(x)\big)\big(x^2 + o(x^2)\big) = x^3 + \underbrace{\underbrace{x^2 o(x)}_{o(x^3)} + \underbrace{x\, o(x^2)}_{o(x^3)} + \underbrace{o(x)\, o(x^2)}_{o(x^3)}}_{o(x^3)} = x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{x^3}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} \longrightarrow \underline{\underline{1}},\ x \to 0$$

$\frac{o(x^3)}{x^3}$ dle definice $\to 0$

Pozn.: $f(x) = x^3 + o(x^3)$

aproximuje funkci s chybou řádu x^3 $\Rightarrow$ dle věty 8.1 to musí být Taylorův polynom stupně 3 funkce $f(x)$

Př. $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt[4]{1+x^4}\right)$

$$= \lim_{y\to 0+} \underbrace{\frac{1}{y}\left(\sqrt{1+\frac{1}{y^2}} - 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}} + 2\sqrt[4]{1+\frac{1}{y^4}}\right)}_{f(y)}$$

$$f(y) = \frac{1}{y^2}\left(\sqrt{1+y^2} - 3\sqrt[3]{1+y^3} + 2\sqrt[4]{1+y^4}\right)$$

víme: $(1+x)^a = 1 + ax + o(x),\ x\to 0$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

$$(1+y^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3) = 1 + o(y^2)$$

můžu to do toho schovat, tyhle aproximace stačí

$$(1+y^4)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}y^4 + o(y^4) = 1 + o(y^2)$$

$$f(y) = \frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{2}y^2 + o(y^2) - 3\left(1+o(y^2)\right) + 2\left(1+o(y^2)\right)\right) = \frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{2}y^2 + o(y^2) - 3 + o(y^2) + 2 + o(y^2)\right)$$

$$= \frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) = \frac{1}{2} + \frac{o(y^2)}{y^2} = \frac{1}{2} + \underbrace{o(1)}_{\to 0} \longrightarrow \frac{1}{2},\ y\to 0$$

Dále se budeme zabývat tímto problémem:

$$T^f_{n,x_0}(x) \longrightarrow f(x),\ n\to\infty,\ x \text{ pevné}$$

Spoiler: pravda to vždy být nemusí

Def.: $f \in C^n(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $x, x_0 \in I$ pevná.

$R_{n+1}(x) = f(x) - T^f_{n,x_0}(x)$ .... Taylorův zbytek po n-tém členu.

lépe: $R^f_{n+1,x_0}(x)$

Věta 8.4 (o odhadu zbytku Taylorova polynomu) Nechť $f(x) \in C^{n+1}(I)$, I je otevřený interval, $x, x_0 \in I$ jsou pevné body. Pak

(1) $\exists\, \theta$ mezi x, x_0 takové, že $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Lagrangeův tvar zbytku

(2) $\exists\, \theta$ mezi x, x_0 takové, že $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-\theta)^n(x-x_0)$ Cauchyho tvar zbytku

↳ obecně jiné než v (1)

Důkaz: pomocná funkce $\varphi(t) = f(x) - T_{n,t}^{f}(x)$, $t \in [x_0, x]$ obojí pevné!

pak: $\varphi(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}^{f}(x) = R_{n+1}(x)$

$$\varphi(x) = f(x) - \underbrace{T_{n,x}^{f}(x)}_{\text{v daném bodě se rovná } f(x)} = 0 \quad (*)$$

pomocný výpočet $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi' = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \cdot \frac{1}{k!} \cdot (x-t)^k \right)' = \left(f(x) - f(t) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(t) \frac{1}{k!} (x-t)^k}_{\text{budeme derivovat jako součin}} \right)'$

$$= 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(f^{(k+1)}(t) \frac{1}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} \right)$$

$$= \underbrace{- f'(t) - \sum_{l=2}^{n+1} \left(\frac{f^{(l)}(t)}{(l-1)!} (x-t)^{l-1} \right)}_{\text{sloučíme } f'(t) \text{ vlastně pro } l=1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right)$$

rozsahy stejné

$$- \sum_{l=1}^{n+1} \frac{f^{(l)}(t)}{(l-1)!} (x-t)^{l-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} = \underbrace{- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n}$$

všechno ostatní se požere

Teď použijeme Cauchyho větu 6.8 o střední hodnotě

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(\theta)}{\psi'(\theta)} \quad \theta \text{ někde mezi } x, x_0$$

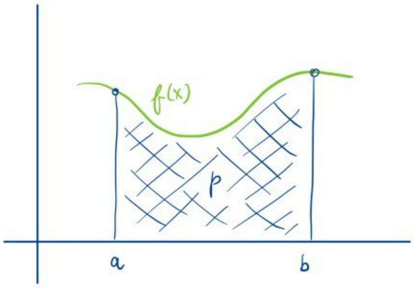
volíme $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$, resp $\psi(t) = t$ a tvrdíme, že tím dostaneme Lagrangeův, resp. Cauchyho tvar

Lagrange levá strana: $\frac{\overset{(*)}{R_{n+1}}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$

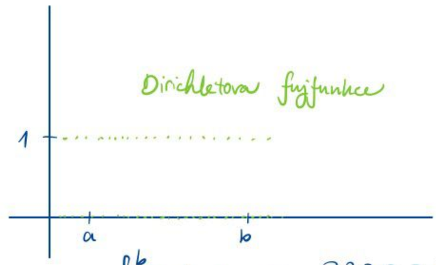
pravá strana: $\frac{-\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!} \cancel{(x-\theta)^n}}{-(n+1) \cancel{(x-\theta)^n}} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$

Cauchy – DOMÁCÍ CVIČENÍ

KAP. 9: RIEMANNŮV INTEGRÁL



$$\int_a^b f(x)\,dx = P$$



$$\int_a^b D(x)\,dx = ??????$$

Cílem této kapitoly: zadefinovat přesně $\int_a^b f(x)\,dx$; budeme mít
- Newtonův integrál
- Riemannův integrál pro spojité $f(x)$

Rozumné požadavky: $\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$ linearita

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad c\in(a,b)$$ integrálová aditivita

$$f(x)\geq 0 \text{ v } (a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$f(x)\geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$ monotonie integrálu

tady jedna přednáška chybí

Přednáška (22) — 22. 12. 2022

Riemannův integrál
- nevýhody – umí jen omezené funkce na omezeném uzavřeném intervalu
- výhody – názorný význam je odvozený z definice ↓

Úvaha: Nechť P je plocha pod grafem. z obrázku $\Rightarrow$ $s(D,f) \le P$

zasupremováním: $(R)\underline{\int_a^b} f \le P$

analogicky $(R)\overline{\int_a^b} f \ge P$

$\Rightarrow$ je-li funkce riemannovsky integrovatelná, $(R)\int_a^b = P$

Lemma 9.2: Funkce je riemannovsky integrovatelná na (a,b) právě tehdy když

$$\forall \eta > 0 \quad \exists D: \quad S(D,f) - s(D,f) < \eta. \qquad \text{podmínka P.R.}$$

Věta 9.1 Je-li funkce omezená a monotónní v $[a,b]$ $\Rightarrow f \in R(a,b)$ (je riemannovsky integrovatelná)

Lemma 9.3 Nechť f je spojitá v $[a,b]$. Potom je zde stejnoměrně spojitá, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \in [a,b]: \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon .$$

Pozn. „obyčejná" spojitost v I $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\forall x \in I \quad \exists \delta > 0}_{\text{rozdíl v pořadí kvantifikátorů}} \quad \forall y \in I \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Důkaz: $\boxed{22}$ předpokládejme, že funkce je spojitá v $[a,b]$ a formule neplatí

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x,y \in I: \quad |x-y| < \delta \quad \wedge \quad |f(x)-f(y)| \ge \varepsilon$$

fixujeme ε zbytek formule užijeme pro $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

tj. $\exists x_n, y_n \in [A,B] \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(x_n) - f(y_n)| \underset{(*)}{\ge} \varepsilon$

platí pro $\forall n$

BÚNO nechť x_n konverguje k $x_0 \in [a,b]$ (důsledek věty 7.4)

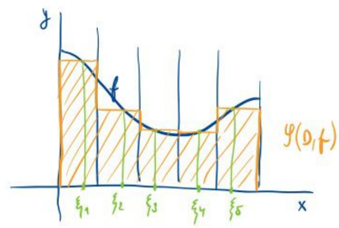
pak tedy $y_n \to x_0$ (neboť $x_n - y_n \to 0$)

Heineho věta: $f(x_n) \to f(x_0)$, $f(y_n) \to f(x_0)$ dle věty o aritmetice limit $f(x_n) - f(y_n) \underset{(*)}{\to} 0$ ↯

Def. Normou dělení D rozumíme $\|D\| = \max\{|x_i - x_{i-1}|\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. – značí jemnost dělení

Dále definujeme $\mathcal{S}(D,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, kde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Formálně: ξ_i patří k tomu dělení D a nazývají se kóty – „kótované dělení".



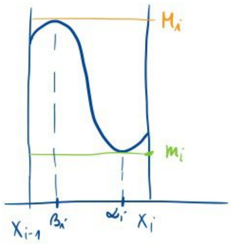
$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i$$
$$s(D,f) \le \mathcal{S}(D,f) \le S(D,f)$$
pro $\forall D$

Věta 9.2 (Riemannův integrál spojité funkce) Nechť $f \in C([a,b])$. Potom $f \in R(a,b)$. Navíc je-li D^m libovolná posloupnost dělení taková, že $\|D^m\| \to 0$, pak $S(D^m, f), \mathcal{S}(D^m, f), s(D^m, f) \longrightarrow (R)\int_a^b f$.

Důkaz: 1) lemma 9.2 → třeba ověřit podmínku P.R. nechť $\eta > 0$ dáno

lemma 9.3 pro $\varepsilon = \frac{\eta}{b-a}$ $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in (a,b)$ $|x-y| < \delta \underset{(*)}{\Rightarrow} |f(x) - f(y)| < \frac{\eta}{b-a}$

nechť D je dělení takové, že $\|D\| < \delta$



dle věty 6.2 $\exists \alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i] : f(\alpha_i) = m_i, \; f(\beta_i) = M_i$

infimum, ale zároveň minimum; supremum, ale zároveň maximum

vyplývá ze spojitosti funkce na uzavřeném intervalu

pak vidíme: $|\beta_i - \alpha_i| \le |x_i - x_{i-1}| \le \|D\| < \delta$

$(*) \Rightarrow |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \frac{\eta}{b-a}$ $\quad M_i - m_i < \frac{\eta}{b-a}$

$$S(D,f) - s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{< \frac{\eta}{b-a}} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\eta}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1}}_{b-a} = \frac{\eta}{b-a}(b-a) = \eta$$

$S(D,f) - s(D,f) < \eta$ tím jsou splněny podmínky lemmatu 9.2 funkce je riemannovsky integrovatelná

2) plyne snadno z předchozího (aha, oukej ;-;)

$S(D^m, f) - s(D^m, f) \longrightarrow 0$, pokud $\|D^m\| \longrightarrow 0$

↳ viz bod 1) $\forall \eta > 0 \; \exists \delta > 0 : \|D^m\| < \delta \Rightarrow S(D,f) - s(D,f) < \eta$

víme, že vždy $s(D^m, f) \le (R)\int_a^b f \le S(D,f)$

konvergují k tomu samému; mají mezi sebou tuhle hodnotu $\Rightarrow S(D^m, f), s(D^m, f) \longrightarrow (R)\int_a^b f$

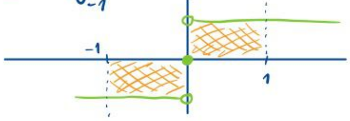
zároveň též $s(D^m, f) \le \mathcal{S}(D,f) \le S(D,f)$ ... věta o dvou policajtech $\mathcal{S}(D,f)$

Pozn. Dá se dokázat, že část 2) platí i pro každou $f \in R(a,b)$, nejen pro funkce spojité.

Přednáška (22)

22. 12. 2022

Př $\int_{-1}^{1} \mathrm{sgn}(x)\, dx$



pozn. – plocha pod grafem se bere jako záporná
⇒ mělo by vyjít nula

Riemannův: existuje (funkce je monotónní – neklesající a omezená)

(DCV) $S(D) = s(D) = 0$ pokud $0 \in D$

Newtonův integrál: neexistuje, protože $\mathrm{sgn}\, x$ nemá Darbouxovu vlastnost (věta 6.7)

Př $\int_0^1 D(x)$

- Riemannův: neexistuje $\quad m_i = 0$ vždy $\quad M_i = 1$ vždy $\quad s(D, D(x)) = 0$ vždy $\quad S(D, D(x)) = 1$ $\forall D$ $\quad (R)\underline{\int_a^b} D(x)\,dx \neq (R)\overline{\int_a^b} D(x)\,dx$
- Newtonův: neexistuje (není darbouxovská)

Př $\int_0^1 x^n\, dx$

- Newtonův $\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$
- Riemannův:
  - chytrá věta, která říká, že se to rovná (věta 9.6)
  - z definice: pracné

Věta 9.3 (linearita Riemannova integrálu) Nechť f, g jsou spojité na $[a,b]$, nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$(R)\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\, (R)\int_a^b f + \beta\, (R)\int_a^b g .$$

Důkaz: nechť D^m je nějaká posloupnost dělení taková, že $\|D^m\| \to 0$.

$$\sigma(D^m, \alpha f + \beta g) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha f + \beta g)(\xi_i)}_{= \alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)} (x_i - x_{i-1}) = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{\sigma(D^m, f)} + \beta \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{\sigma(D, g)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(R)\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\, (R)\int_a^b f + \beta\, (R)\int_a^b g \qquad \square$$

využíváme větu 9.2 a větu o aritmetice limit

Věta 9.4 (Intervalová aditivita pro Riemannův integrál) Nechť f je spojitá v $[a,c]$, nechť $b \in (a,c)$. Potom

$$(R)\int_a^b f + (R)\int_b^c f = (R)\int_a^c f$$

Důkaz: mějme posloupnost D^m dělení intervalu $[a,c]$, $\|D^m\| \to 0$
můžeme navíc BÚNO předpokládat, že b je též dělicí bod (kdyby nebyl, můžu ho bezrestně přidat, normu dělení se tím nezvětší)

lze psát: $D^m = D_1^m \cup D_2^m$ takové, že D_1^m dělí $[a,b]$ a D_2^m dělí $[b,c]$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}(D^m, f) & = & \mathcal{S}(D_1^m, f) & + & \mathcal{S}(D_2^m, f) \\ \downarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ (R)\int_a^c f & = & (R)\int_a^b f & + & (R)\int_b^c f \end{array}$$

zalimitíme