
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

1. Zápočtová písemka 06. 11. 2017

(Celkově 20 bodů | Čas: 90 minut)

1. (9 bodů) Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi x^2}} \exp \{ -(\ln x - \theta)^2 \}, & \text{pro } x > 0; \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$$

- (a) Najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru $\theta \in \mathbb{R}$ pomocí metody maximální věrohodnosti. [2]
- (b) Spočítejte přibližný 95% interval spolehlivosti pro neznámý parametr $\theta \in \mathbb{R}$. [2]
- (c) Vyšetřete nestrannost, konzistenci a asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\theta}_n$. [2]
- (d) Pomoci transformace $g(x) = \ln x$ najděte momentový odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru $\theta \in \mathbb{R}$. [2]
- (e) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr $\theta \in \mathbb{R}$ a porovnejte rozptyly odhadů $\hat{\theta}_n$ a $\tilde{\theta}_n$. [1]

2. (6 bodů) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.

- (a) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\lambda}_n$ neznámého parametru $\lambda > 0$. [2]
- (b) Zdůvodněte nestrannost a konzistenci odhadu $\hat{\lambda}_n$. [1]
- (c) Pomoci obecných vlastností maximálně věrohodných odhadů sestrojte přibližný 95% interval spolehlivosti pro neznámý parametr $\lambda > 0$. [1]
- (d) Ukažte, že $\tilde{\lambda} = S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$ je rovněž nestranným a konzistentním odhadem λ . [2]

3. (5 bodů) Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$.

- (a) Najděte rozdělení náhodných veličin $U = \min(X_1, X_2)$ a $V = \max(X_1, X_2)$. [1]
- (b) Najděte združené rozdělení náhodného vektoru $(U, V)^\top$. [2]
- (c) Najděte rozdělení náhodné veličiny definované jako $W = U/V$. [2]