Zkoušková písemka z Matematické analýzy 1, ZS 2021-22

Písemka číslo 1, verze 18.1.2022

(1)(14 bodů) Spočtěte limitu (pokud existuje)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(9+x)^x+(7-x)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

(2)(14 bodů) Spočtěte jednostranné derivace a derivace funkce f ve všech bodech, kde existují, pokud

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1-x)}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ -1, & x=0.\end{cases}$$

(3)(20 bodů) Uvažujme reálnou funkci f danou jako

$$f(x)=|2\sin x|+3(\sin x)^3.$$

- Spočtěte derivace (i jednostranné) funkce f na $[0,2\pi]$.
- Najděte lokální a globální maxima funkce f na množině $[0,2\pi]$.
- Nalezněte $f([\pi,2\pi])$.
- Spočtěte druhou derivaci funkce f na $(0,2\pi)$ všude, kde existuje.
- Nalezněte inflexní body funkce f ležící v intervalu $[\pi,2\pi]$.
- Zjistěte, zda je funkce f konkávní na nějakém okolí bodu $\frac{\pi}{2}$.
- Načrtněte graf funkce na intervalu $[0,2\pi]$.

(4)(12 bodů) (a) Nechť $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Dokažte, že pak i funkce $x\mapsto\max\{f(x),g(x)\}$, $x\in\mathbb{R}$, je spojitá na $\mathbb{R}$.

(b) Uvažujme funkci $f_a(x)=x^3+ax$, $x\in\mathbb{R}$, kde $a\in\mathbb{R}$ je parametr. Dokažte, že funkce $x\mapsto\operatorname{sgn}(f_a(x))$, $x\in\mathbb{R}$, není spojitá na $\mathbb{R}$.

(3) $f(x) = |2\sin x| + 3|\sin x|^3, x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} 2\sin x + 3\sin^3 x, & x \in [0,\pi] \\ -2\sin x + 3\sin^3 x, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2\cos x + 9\sin^2 x\cos x = \cos x\,(2 + 9\sin^2 x), & x \in (0,\pi) \\ -2\cos x + 9\sin^2 x \cos x = \cos x\,(-2 + 9\sin^2 x), & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$ (1.5) (1.5)

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} f'(x) = 2 \quad f'_-(\pi) = \lim_{x\to\pi_-} f'(x) = -2$

$f'_+(\pi) = \lim_{x\to\pi_+} f'(x) = 2 \quad f'_-(2\pi) = \lim_{x\to 2\pi_-} f'(x) = -2$ (1+1)

b) Ať $x_1 < x_2$ jsou v $(\pi, 2\pi)$, kde $\sin x_1 = -\sqrt{\frac{2}{9}} = \sin x_2$

Pak $\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2} < x_2 < 2\pi$.

Body podezřelé z extrému jsou $0, \frac{\pi}{2}, \pi, x_1, \frac{3\pi}{2}, x_2, 2\pi$

Znaménko f'

0		$\pi/2$		π		x_1		$\frac{3\pi}{2}$		x_2		2π
	+		−		+		−		+		−	

hodnoty

0	5	0	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{9}}$	-1	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{9}}$	0

lok. maxima: $\frac{\pi}{2}, x_1, x_2$ — maximum: $\frac{\pi}{2}$ (3)

lok. minima: $0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ — minimum: $\frac{3\pi}{2}$

c) $f([\pi, 2\pi]) = [-1, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{9}}]$ (0.5 + 0.5)

d) $f''(x) = -\sin x\,(2 + 9\sin^2 x) + \cos x \cdot 18\sin x\cos x =$

$= \sin x\,(-2 - 9\sin^2 x + 18(1 - \sin^2 x)) =$

$= \sin x\,(16 - 27\sin^2 x), x \in (0, \pi)$ (1.5)

$f''(x) = -\sin x\,(-2 + 9\sin^2 x) + \cos x \cdot 18\sin x\cos x =$

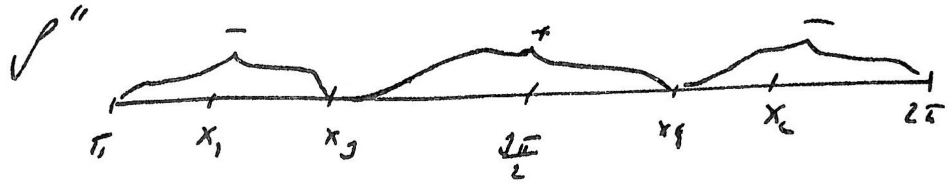
$= \sin x\,(2 - 9\sin^2 x + 18(1 - \sin^2 x)) = \sin x\,(20 - 27\sin^2 x)$

$x \in (\pi, 2\pi)$ (1.5)

e) · Ať $x_3 < x_4$ v $(\pi, 2\pi)$ splňují $\sin x_3 = -\sqrt{\frac{20}{27}} = \sin x_4$

Pak $\pi < x_1 < x_3 < \frac{3\pi}{2} < x_4 < x_2 < 2\pi$

Máme:



Tedy · f konkávní na $[\pi, x_3]$, $[x_4, 2\pi]$

· f konvexní na $[x_3, x_4]$

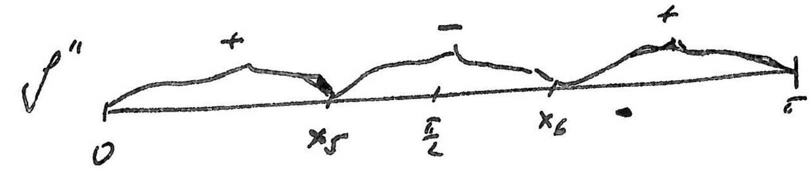
· v x_3, x_4 jsou inflexní body

· Ať $x_5 < x_6$ v $(0, 2\pi)$ splňují $\sin x_5 = \sqrt{\frac{16}{27}} = \sin x_6$

(3)

Pak $0 < x_5 < \pi/2 < x_6$

f) Máme:



Tedy: · f konvexní na $[0, x_5]$, $[x_6, \pi]$ $\Rightarrow$ f) konkávní na okolí $\frac{\pi}{2}$

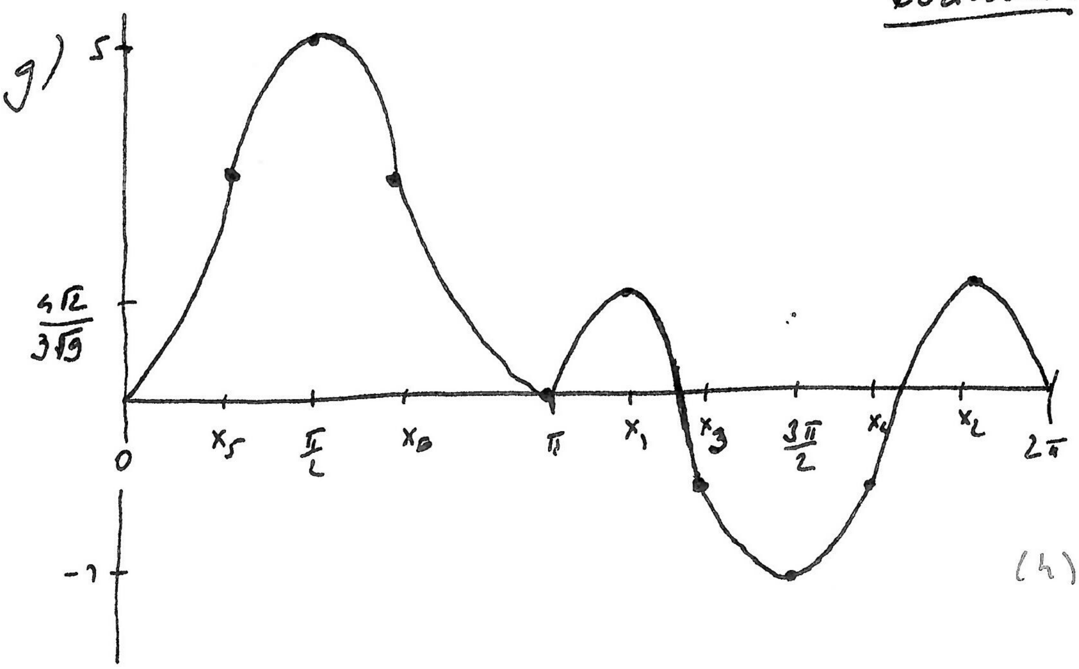
· f konkávní na $[x_5, x_6]$

· v x_5, x_6 inflexní body

(1)

Bodování:
- spojitost +1
- f' +3+1
- extrémy +3
- obor hodnot +1
- f'' +3
- konvexita inflexe +3
- bod $\frac{\pi}{2}$ +1
- graf +4

g)



(4)

1) $$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{(9+x)^x + (7-x)^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}}_{f(x)}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \log g(x)}, \text{ kde } g(x) = \frac{(9+x)^x + (7-x)^x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x \log(9+x)} + e^{x \log(7-x)} \right) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$e^{x \log(9+x)} + e^{x \log(7-x)} = 2$$

$\ulcorner$ $x \in (0,1)$: $x \log(9+x) > 0$, $x \log(7-x) > 0$ $\Rightarrow e^{x\log(9+x)} + e^{x \log(7-x)} > 1+1 = 2$

$x \in (-1,0)$: $x \log(9+x) < 0$, $x \log(7-x) < 0$ $\Rightarrow e^{x\log(9+x)} + e^{x \log(7-x)} < 1+1 = 2$ $\lrcorner$

Tedy $g(x) \neq 1$ pro $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$.

Dále $$\frac{\log g(x)}{x} = \frac{\log g(x)}{g(x)-1} \cdot \frac{g(x)-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \cdot \log\sqrt{63}$$

$$\ulcorner \frac{g(x)-1}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x\log(9+x)}-1}{x \log(9+x)} \log(9+x) + \frac{e^{x \log(7-x)}-1}{x \log(7-x)} \log(7-x) \right]$$

(P) pro $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}\left[1 \cdot \log 9 + 1 \cdot \log 7\right] = \log\sqrt{63} \lrcorner$$

Tedy $$e^{\frac{\log g(x)}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{\log\sqrt{63}} = \sqrt{63}$$ (exp spojitá)

Bodování:

- převedení +1
- $g(x) \to 1$ +2
- $\frac{\log g(x)}{g(x)-1} \to 1$ +2
- ověření (P) +3
- $\frac{g(x)-1}{x} \to \log\sqrt{63}$ +4
- spojitost exp +1
- dopočet +1

(2)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1-x)}{x} & \dots x \neq 0,\ x < 1 \\ -1 & \dots x = 0 \end{cases}$$

Pak: $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{-1}{1-x}x - \log(1-x)\right),\ x \neq 0, x < 1$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log(1-x)}{x}+1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)+x}{x^2} \overset{0/0}{\underset{l'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{1-x}+1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1+1-x}{1-x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(1-x)2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1-x)} = -\frac{1}{2}$$

Bodování: f' pro $\overset{x<1}{\cancel{x \neq 0}}$ ... $+5$

$f'(0)$ ... $+9$

5

a) Ať $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité. Jelikož

$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, máme

$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Stačí tak dokázat spojitost funkce absolutní hodnoty.

Ale pokud $x_n \to x$, pak $||x_n| - |x|| \le |x_n - x| \to 0$, tj. $|\cdot|$ je spojitá.

b) $f(x) = x^3 + ax$, $x \in \mathbb{R}$ pro parametr $a \in \mathbb{R}$.

Pak $f(x) = x(x^2 + a)$. Pokud:

$\underline{a = 0}$: $f(x) = x^3$ a $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$, což není spojité v 0.

$\underline{a > 0}$: $f(x) = x(\underbrace{x^2 + a}_{>0})$ a $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$, — // —

$\underline{a < 0}$: $f(x) = x(x^2 - (-a)) = x(x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a})$

a $\operatorname{sgn} f(x) = -\operatorname{sgn} x$ pro $x \in (-\sqrt{-a}, \sqrt{-a})$, tedy opět

se nejedná o funkci spojitou v 0.

$\underline{\text{Bodování:}}$ a) ... +6

b) ... +6