

# JAK NA VÝPOČTY, MpFII

SEPSAL: Iosephus Kučeravý

OBSAH: Ondřej Kreml, Lukáš Krump, Milan Pokorný, Dominik Beck

ILUSTRACE: Iosephus Kučeravý, Michal Stratený

## Obsah

<b>1</b>	<b>FOURIEROVY ŘADY</b>	<b>1</b>
1.1	TRIGONOMETRICKÉ ŘADY . . . . .	1
1.2	POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY . . . . .	8
<b>2</b>	<b>KOMPLEXNÍ ANALÝZA</b>	<b>11</b>
2.1	ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY . . . . .	12
2.2	KOMPLEXNÍ ZOBRAZENÍ, HOLOMORFNÍ FCE . . . . .	16
2.2.1	DERIVACE A C-R PODMÍNKY . . . . .	16
2.2.2	REKONSTRUKCE HOLOMORFNÍ FUNKCE . . . . .	17
2.2.3	OBRAZY MNOŽIN . . . . .	18
2.3	KŘIVKOVÝ INTEGRÁL V $\mathbb{C}$ . . . . .	19
2.3.1	CAUCHYOVA VĚTA . . . . .	20
2.3.2	KOMPLEXNÍ LOGARITMUS, OBECNÁ MOCNINA . . . . .	24
2.3.3	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY (KŘIVKOVÝ INTEGRÁL) . . . . .	26
2.4	MOCNINNÉ A LAURENTOVY ŘADY . . . . .	29
2.5	RESIDUOVÁ VĚTA . . . . .	32
2.5.1	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY (RESIDUOVKA) . . . . .	35
2.6	POZNÁMKA K TYPŮM INTEGRÁLŮ . . . . .	50
2.7	POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY . . . . .	50
<b>3</b>	<b>FOURIEROVA TRANSFORMACE</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>THEORIE DISTRIBUCÍ</b>	<b>66</b>
4.1	HOMOGENNÍ DISTRIBUCE . . . . .	70
4.2	TEMPEROVANÉ DISTRIBUCE . . . . .	74
4.3	FOURIEROVA TRANSFORMACE DISTRIBUCÍ . . . . .	77
4.3.1	KONVOLUCE DISTRIBUCÍ A JEJÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE . . . . .	78
4.3.2	KONVOLUČNÍ ROVNICE . . . . .	85
4.4	POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY . . . . .	90

# 1 FOURIEROVY ŘADY

## 1.1 TRIGONOMETRICKÉ ŘADY

„Funkci  $f$  rozložíme do  $\sum \dots \cos(kx) + \sum \dots \sin(kx)$ ”

→ Uvažujeme **ortogonální systém** na intervalu  $(-\pi, \pi)$ :  $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$

**OG systém:** množina  $\forall$ sinů a  $\forall$ cosinů, které na zadaném intervalu dokončí alespoň 1 násobek celé periody

**Vzoreček: Fourierova řada pro  $2\pi$  periodickou funkci**

Fourierovou řadou (funkce  $f$ ) rozumíme\*:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

$$\begin{aligned} \text{kde: } a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx & b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ & k = 0, 1, 2, \dots & & k = 1, 2, \dots \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx & b_0 &= 0 \end{aligned}$$

\*symbol  $\sim$  v definici značí, že funkci  $f$  odpovídá Fourierova řada (FŘ) s daným předpisem

Tento systém je úplný v  $L^2(-\pi, \pi)$ , tudíž  $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$  v  $L^2(-\pi, \pi)$  a z Carlesonovy věty platí rovnost skoro všude na intervalu  $(-\pi, \pi)$  →  $f$  obvykle pak rozšiřujeme periodicky na  $\mathbb{R}$

**Vzoreček: Fourierova řada pro obecnou periodu**

Perioda délky  $L$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right)$$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) dx \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) dx \quad k \in \mathbb{N}$$

**Platí:**  $f$  sudá  $\Rightarrow$   $b_k = 0$  pro  $\forall k$  (**cosinový rozvoj**)  $\int_{-a}^a f(x) \sin(kx) = \int_{-a}^a$  sudá . lichá = 0

$f$  lichá  $\Rightarrow$   $a_k = 0$  pro  $\forall k$  (**sinový rozvoj**)  $\int_{-a}^a f(x) \cos(kx) = \int_{-a}^a$  lichá . sudá = 0

Fourierovy koeficienty lze spočítat i pro funkce v  $L^1(-\pi, \pi)$ . Platí Riemann-Lebesgueovo lemma:

**Lemma 1** (Riemann-Lebesgueovo).

Jest-li  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  a  $a_k, b_k$  její Fourierovy koeficienty,  $\Rightarrow$  pak  $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$ , když  $k \rightarrow \infty$

Platí následující věty:

**Věta 1. O derivaci**

Jest-li  $n \in \mathbb{N}_0$  takové, že  $\sum_{k=1}^{\infty} k^n (|a_k| + |b_k|) < \infty$ ,

pak **trigonometrická řada** s koeficienty  $a_k, b_k$  **konverguje stejnoměrně** na  $\mathbb{R}$ , **součet** jest  $2\pi$ -periodická funkce třídy  $C^n$  a řadu lze až  $n$ -krát **derivovat** člen po členu, s tím, že platí rovnosti mezi derivacemi součtu a součty derivací.

**Věta 2. O integraci**

Nechť  $f$  je  $2\pi$ -periodická funkce, po částech spojitá funkce, s Fourierovými koeficienty  $a_k, b_k$ .

Označme  $g(x) = \int_0^x f(y) dy - \frac{a_0}{2}x$ .

Pak  $g$  je  $2\pi$ -periodická, spojitá a její **Fourierova řada** je dána předpisem:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx),$$

kde  $A_k = -\frac{b_k}{k}$ ,  $B_k = \frac{a_k}{k}$  a  $A_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$

**Věta 3. Věta o konvergenci Fourierovy řady**

Nechť existuje derivace funkce  $f$  až na konečně mnoho bodů a  $f$  i  $f'$  jsou po částech spojitě.

Pak je **součet** Fourierovy řady dán výrazem:  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$  což ve spojitém bodě dává hodnotu funkce  $f(x) \in \mathbb{R}$  (pouze vlastní limity  $\neq \pm\infty$ )

Jest-li navíc  $f$  spojitá, je konvergence Fourierovy řady dokonce **stejněměrná**.

**Věta 4. Dirichlet-Jordanovo kritérium**

(DJ)

- V bodech, kde je  $f$  **spojitá**  $\rightarrow$  FŘ konverguje a platí rovnost  $f(x) = \sum$
- V bodech nespojitosti funkce  $f$  je **součet**  $\sum$  FŘ =  $\frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right)$

**Věta 5. Věta o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů**

(19.3.10)

Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $l > 0$  a  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Nechť  $f \in C^n(\mathbb{R})$ ,  $f$  je  $l$ -periodická,  $f^{(n+1)}$  existuje v intervalu  $(a, a + l)$  až na konečně mnoho bodů a je po částech spojitá na  $[a, a + l]$ . Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Dále  $F_{f,n} \rightrightarrows f$  na  $[a, a + l]$ , řadu  $F_f$  lze až  $n$ -krát derivovat člen po členu, výsledné řady **konvergují stejnoměrně** na  $[a, a + l]$  k odpovídajícím derivacím funkce  $f$  a jsou jejich Fourierovými řadami (FŘ).

### Příklad

**Zadání:** Rozviňte funkci  $f(x) = x^2$  do Fourierovy řady pro  $x \in (-\pi, \pi)$

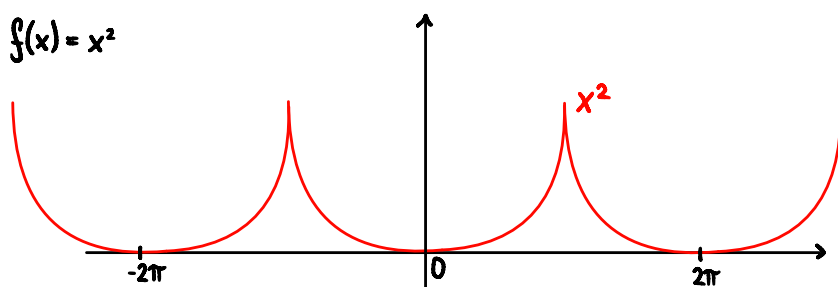
✓ **Řešení:**

$f$  jest **sudá**, tedy  $\Rightarrow \underline{\underline{\forall b_k = 0}}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \underline{\underline{\frac{2\pi^2}{3}}}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \left[ \begin{array}{l} f = x^2 \quad g' = \cos(kx) \\ f' = 2x \quad g = \frac{1}{k} \sin(kx) \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \left( \overbrace{\left[ \frac{x^2}{k} \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi}}^{\sin(\pm\pi k)=0} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{k} \sin(kx) dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(kx) dx = \left[ \begin{array}{l} f = 2x \quad g' = \sin(kx) \\ f' = 2 \quad g = -\frac{1}{k} \cos(kx) \end{array} \right] = -\frac{1}{\pi k} \left( \left[ -\frac{2x}{k} \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{k} \cos(kx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \left( \left[ x \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \right) = \frac{2}{\pi k^2} \left( \pi \cos(k\pi) + \pi \overbrace{\cos(-k\pi)}^{\cos(k\pi)} - \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} dx \right) \\ &= \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) = \underline{\underline{\frac{4}{k^2} (-1)^k}} \quad \text{platí totiž: } \cos(k\pi) = (-1)^k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx)}$$



Na intervalu  $(-\pi, \pi) + 2K\pi$ ,  $K \in \mathbb{Z}$   
je součet  $\sum$  FŘ =  $(x - 2K\pi)^2$ .

Tedy platí (z Dirichlet-Jordanova kritéria):

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Takto je někdy možné sčítat některé řady. Dosadíme-li za  $x = \pi$

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k (-1)^k = \pi^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{2}{3} \pi^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right) \quad \text{Parsevalova rovnost}$$

**Alternativně:**

Parsevalova rovnost z lineární algebr  $\rightarrow B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  báse  $V$   
 ortonormální báse  $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\forall \vec{v} \in V : \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^N \langle \vec{v}, \vec{b}_i \rangle \vec{b}_i$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^N \left( \langle \vec{v}, \vec{b}_i \rangle \right)^2$$

ON systém v prostoru  $L^2(I)$ , kde  $I$  je otevřený interval délky  $2\pi$ , je:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x; \dots \right)$$

Potom:  $k = 0 \quad \tilde{a}_0 = \int_I f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0$

$$k \geq 1 \quad \begin{cases} \tilde{a}_k = \int_I f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) dx = \sqrt{\pi} a_k \\ \tilde{a}_k = \int_I f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) dx = \sqrt{\pi} b_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_I (f(x))^2 = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right) \quad \text{Parsevalova rovnost}$$

**Příklad**

**Zadání:** Rozviňte funkci  $f(x) = 2x$  do Fourierovy řady pro  $x \in (-\pi, \pi)$

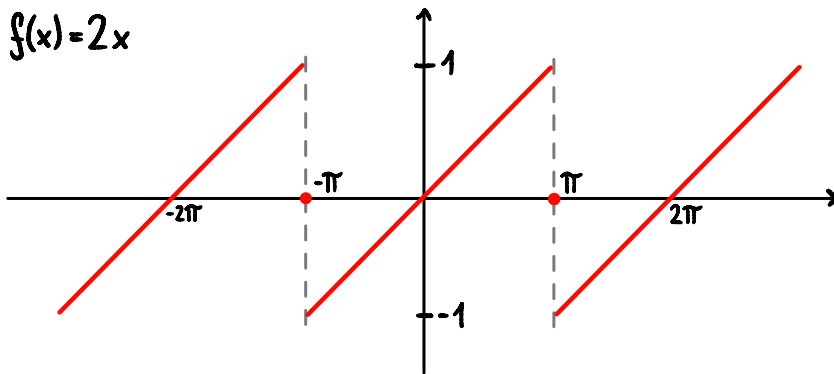
**Řešení:**

$f$  jest **lichá**, tedy  $\Rightarrow \underline{\underline{\forall a_k = 0}}$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(kx) dx = \left[ \begin{array}{l} f = 2x \quad g' = \sin(kx) \\ f' = 2 \quad g = -\frac{1}{k} \cos(kx) \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{2x}{k} \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{k} \cos(kx) dx \right)$$

$$= -\frac{2}{\pi k} \left( \left[ x \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx}^{=0} \right) = -\frac{2}{\pi k} \left( \pi \cos(k\pi) + \overbrace{\pi \cos(-k\pi)}^{\cos(k\pi)} \right) = -\frac{4\pi}{\pi k} (-1)^k = \underline{\underline{\frac{4}{k} (-1)^{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f \sim \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{k} (-1)^k \sin(kx)}$$



Na intervalu  $(-\pi, \pi) + 2K\pi$ ,  $K \in \mathbb{Z}$

je součet  $\sum \text{FŘ} = 2(x - 2K\pi)$ .

Pro  $x = (2K + 1)\pi$  je  $\sum \text{FŘ} = 0$

Dle věty (1) o derivaci trigonometrické řady

$$(x^2)' = 2x \Rightarrow \left[ \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx) \right]'$$

platí:  $\frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx) \xrightarrow{\text{loc}} 0$  na  $(-\pi, \pi) + 2K\pi \Rightarrow$  můžeme řadu derivovat člen po členu

$$\left[ \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx) \right]' = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{k} (-1)^k \sin(kx) \quad \text{mimo } x \in (2K + 1)\pi$$

Aplikujeme-li (Parsevalovu rovnost)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (2x)^2 dx = 4 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} \pi^3 \Rightarrow \frac{8}{3} \pi^3 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{4}{k} (-1)^k \right)^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

### Příklad

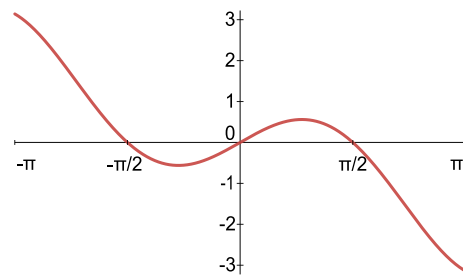
**Zadání:** Rozviňte do Fourierovy řady na intervalu  $(-\pi, \pi)$  funkci  $x \cos(x)$

✓ **Řešení:**

$$f(x) = x \cdot \cos(x) = \text{LICHÁ} \cdot \text{SUDÁ} = \text{LICHÁ}$$

$$f \text{ lichá} \Rightarrow \forall a_k = 0, k \in \mathbb{N}_0$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$



**Poznámka:** Následující integrál by šlo řešit i rozpisem integrandu pomocí součinného vzorce pro sinus a cosinus (Odvození tohoto vzorce je v sekci 1.2 POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY):

$$x(\cos(x) \cdot \sin(kx)) = \frac{x}{2} (\sin(x - kx) - \sin(x + kx)) = \frac{x}{2} \sin((1 - k)x) - \frac{x}{2} \sin((1 + k)x) \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x \cdot \cos(x) \cdot \sin(kx)}_I dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos(x) \sin(kx) \\ u' = 1 \quad v = I_2 \end{array} \right| \quad I = [x I_2]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} I_2 dx = \dots$$

$$I_2 = \int \cos(x) \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} \cos(x) \cos(kx) - \frac{1}{k^2} \sin(x) \sin(kx) + \frac{1}{k^2} I_2 (+C = 0)$$

$$I_2 \left( \frac{k^2 - 1}{k^2} \right) = - \frac{\cos(x) \cos(kx) \cdot k + \sin(x) \sin(kx)}{k^2}$$

$$I_2 = - \frac{\cos(x) \cos(kx) \cdot k + \sin(x) \sin(kx)}{k^2 - 1} \cdot \frac{k^2}{k^2 - 1} = - \frac{\cos(x) \cos(kx) \cdot k + \sin(x) \sin(kx)}{k^2 - 1}$$

$$I = - \left[ x \frac{\cos(x) \cos(kx) \cdot k + \sin(x) \sin(kx)}{k^2 - 1} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x) \cos(kx) \cdot k + \sin(x) \sin(kx)}{k^2 - 1} dx =$$

$$= \frac{1}{k^2 - 1} \left[ \underbrace{(\pi)(1)(-1)^k \cdot k - (-\pi)(1)(-1)^k \cdot k}_{=2k\pi(-1)^k} + \frac{1}{k^2 - 1} \left[ \underbrace{(\pi)(0)(0) - (-\pi)(0)(0)}_{=0} \right] \right] -$$

$$- \frac{1}{k^2 - 1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \cos(kx) \cdot k + \sin(x) \sin(kx) dx \right) =$$

$$= \frac{2k\pi(-1)^k}{k^2 - 1} - \frac{1}{k^2 - 1} \left( \underbrace{k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \cos(kx) dx}_{J_2} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(kx) dx}_{J_1} \right) = \dots$$

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(kx) dx = - \frac{1}{k} \underbrace{[\sin(x) \cos(kx)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k^2} \underbrace{[\cos(x) \sin(kx)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k^2} J_1$$

$$\Rightarrow \text{pro } k \neq 1 \rightarrow \int = 0 \Rightarrow J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Poznámka: : Logicky vyšel nenulový pouze první člen ( $k = 1$ ), je to rozvoj funkce sinus do OG systému sinů

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \cos(kx) dx = - \frac{1}{k} \underbrace{[\cos(x) \sin(kx)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k^2} \underbrace{[\sin(x) \cos(kx)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k^2} J_2$$

$$\Rightarrow \text{pro } k \neq 1 \rightarrow \int = 0 \Rightarrow J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Poznámka: : Logicky vyšel nenulový pouze první člen ( $k = 1$ ), je to rozvoj funkce cosinus do OG systému cosinů

$k > 1$

$$b_k = \frac{1}{\pi} I = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2k\pi(-1)^k}{k^2 - 1} \right) = \frac{2k(-1)^k}{k^2 - 1}$$

$k = 1$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(2x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( - \frac{1}{2} \underbrace{[x \cos(2x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{4} \underbrace{[\sin(2x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \right)$$

$$b_1 = - \frac{1}{4\pi} [(\pi)(1) - (-\pi)(1)] = - \frac{1}{2}$$

Celkem: 
$$x \cos(x) = - \frac{1}{2} \sin(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(-1)^k}{k^2 - 1} \sin(kx)$$

Původní funkce  $f$  je součinem spojitých funkcí, dle věty o konvergenci FŘ tak funkce  $f$  konverguje minimálně lokálně stejnoměrně na intervalu  $(-\pi, \pi)$  ke své Fourierově řadě.

Dále platí, že  $f(-\pi) = \pi$ ,  $f(\pi) = -\pi$  tedy v krajních bodech se funkce nedá spojitě napojit a FŘ zde konverguje k aritmetickému průměru krajních hodnot  $\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = 0$  a platí tedy závěrem, že  $f$  konverguje pouze **lokálně stejnoměrně** na intervalu  $(-\pi, \pi)$  ke své Fourierově řadě.

**Příklad**

**Zadání:** Nalezněte rozvoj funkce:

$$f(x) = \left| \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \right|$$

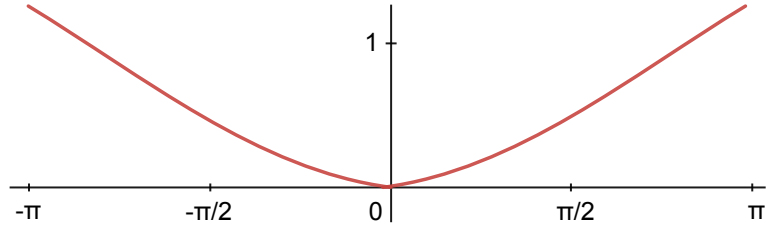
do trigonometrické řady na  $(-\pi, \pi)$ . Aplikujte na nalezenou řadu Parsevalovu rovnost.

✓ **Řešení:**

$$f(x) = \left| \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \right| = \text{SUDÁ}$$

$$f \text{ sudá} \Rightarrow \underline{\underline{\forall b_k = 0, k \in \mathbb{N}}}$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$



- Začneme s výpočtem koeficientu  $\frac{a_0}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \right| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \left[ \cosh\left(\frac{x}{\pi}\right) \right]_0^{\pi} = 2 \cosh(1) - 2 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{a_0}{2} = \cosh(1) - 1}}$$

- Dále skrz několikanásobné per partes (viz 1.2 POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY) vypočítáme koeficienty  $a_k$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \left| \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \right| \cos(kx) dx}_{=I} = \dots$$

$$I = \frac{1}{k} \left[ \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \sin(kx) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi k^2} \left[ \cosh\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi^2 k^2} I$$

$$I = \frac{1}{\pi k^2} [\cosh(1)(-1)^k - 1] - \frac{1}{\pi^2 k^2} I$$

$$\left( \frac{\pi^2 k^2 + 1}{\pi^2 k^2} \right) I = \frac{1}{\pi k^2} [\cosh(1)(-1)^k - 1]$$

$$I = \frac{\pi}{\pi^2 k^2 + 1} (\cosh(1)(-1)^k - 1) \Rightarrow \underline{\underline{a_k = \frac{2}{\pi} I = \frac{2}{\pi^2 k^2 + 1} (\cosh(1)(-1)^k - 1)}}$$

$\pm$	Der	Int
+	$\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$\cos(kx)$
-	$\frac{1}{\pi} \cosh\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$\frac{1}{k} \sin(kx)$
+	$\frac{1}{\pi^2} \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$-\frac{1}{k^2} \cos(kx)$

$\int \leftarrow$

$$f \sim \cosh(1) - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 k^2 + 1} (\cosh(1)(-1)^k - 1) \cos(kx)$$

**Parsevalova rovnost:**

$$\frac{1}{\pi} \int_I (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \right|^2 dx = 2(\cosh(1) - 1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2(\cosh(1)(-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2 + 1} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \right|^2 dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sinh^2\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \left[ \begin{array}{l} \frac{x}{\pi} = \xi \\ dx = \pi d\xi \\ 0 \rightarrow 0, \pi \rightarrow 1 \end{array} \right] = 2 \int_0^1 \sinh^2(\xi) d\xi = 2 \int_0^1 \frac{(e^\xi - e^{-\xi})^2}{4} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2\xi} - 2e^\xi e^{-\xi} + e^{-2\xi} d\xi = \int_0^1 \cosh(2\xi) - 1 d\xi = \left[ \frac{\sinh(2\xi)}{2} \right]_0^1 - [\xi]_0^1 = \frac{\sinh(2)}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\sinh(2)}{2} - 1 = 2(\cosh(1) - 1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2(\cosh(1)(-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2 + 1} \right)^2$$



## 1.2 POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY

### Poznámky

Alternativní formulace Dirichlet-Jordanova kritéria

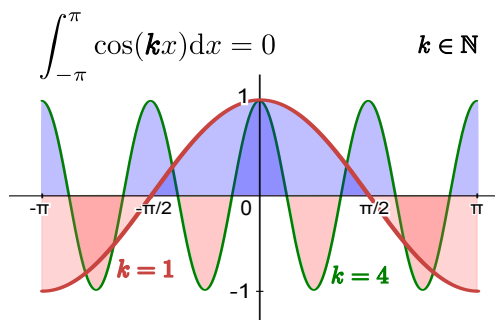
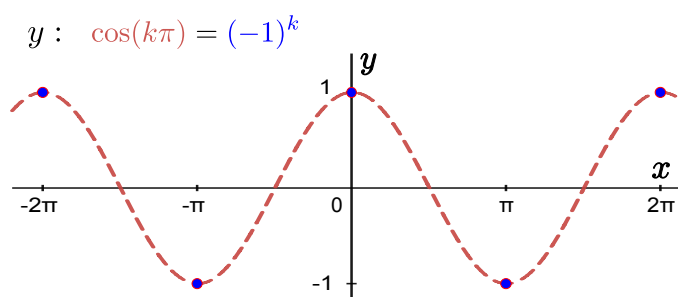
Má-li  $f$  konečnou variaci na  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  a je-li  $l$ -periodická,

$$\text{pak v každém bodě } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ platí } F_f(x_0) = \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}.$$

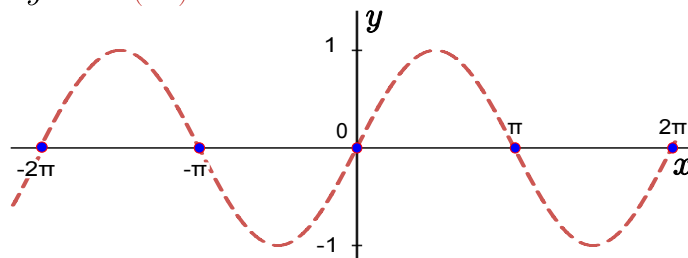
Tedy je-li  $f$  **spojitá**, pak  $f(x_0)$  jest součtem své Fourierovy řady vyčíslené v  $x_0$ .

Poznámka: **Stejnomořná konvergence** na  $(a, b)$  splývá se **stejnomořnou konvergencí** na  $[a, b]$ . Pro vyjádření toho, že v *krajních bodech* jsou se stejnomořnou konvergencí potíže, slouží pojem **lokálně stejnomořná konvergence**.

### Obecné tříčky:



$y : \sin(k\pi) = 0$



**Problém:** Spočítat součet Fourierovy řady:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

⇒ **Známý součet řady:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

⇒ **Trik:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m)^2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

přejmenujeme index  $m = n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$$

### ⇒ Několicnanásobné per partes

Pokud počítáme několicnanásobné per partes, pomůže nám tzv. tabulková metoda, anglicky: *DI method*.

Vypočítejte:  $\int x^3 \sin(kx) dx$

±	Der.	Int.
+	$x^3$	$\sin(kx)$
-	$3x^2$	$-\cos(kx) \frac{1}{k}$
+	$6x$	$-\sin(kx) \frac{1}{k^2}$
-	$6$	$\cos(kx) \frac{1}{k^3}$
+	$0$	$\sin(kx) \frac{1}{k^4}$

← Využijeme tabulky, kterou jsme si rozepsali vlevo.

**V prvním sloupci** pravidelně střídáme znaménka  $+, -, +, \dots$  vždy nejprve od plusu (znaménková změna ze vzorce  $\int u'v = uv - \int v'u$ ).

**Ve druhém sloupci** derivujeme funkci určenou pro derivování, zde se dostaneme až  $x^3 \rightarrow 0$

**Ve třetím sloupci** integrujeme funkci určenou pro integrování, zde doplníme tabulku.

Nakonec vynásobíme první sloupec se členem z druhého sloupce na prvním řádku a pak vynásobíme se členem z třetího sloupce posunutým o řádek dolů (jdeme po šipce).

Celkově dostaneme v tomto případě:

$$\int x^3 \sin(kx) dx = (x^3) \left( -\cos(kx) \frac{1}{k} \right) + (-1)(3x^2) \left( -\sin(kx) \frac{1}{k^2} \right) + (6x) \left( \cos(kx) \frac{1}{k^3} \right) + (-1)(6) \left( \sin(kx) \frac{1}{k^4} \right)$$

$$\int x^3 \sin(kx) dx = -x^3 \frac{\cos(kx)}{k} + 3x^2 \frac{\sin(kx)}{k^2} + 6x \frac{\cos(kx)}{k^3} - 6 \frac{\sin(kx)}{k^4} + C$$

### ⇒ Několicnanásobné per partes (repetitivní integrál)

Tabulkovou metodu můžeme použít i v případě výpočtu „repetitivního integrálu“, kdy v rámci úprav získáme opět původní integrál.

Vypočítejte:  $\int \sin(x) \cos(kx) dx$

±	Der.	Int.
+	$\sin(x)$	$\cos(kx)$
-	$\cos(x)$	$\sin(kx) \frac{1}{k}$
+	$-\sin(x)$	$-\cos(kx) \frac{1}{k^2}$
⋮	⋮	⋮ $\int$

← Využijeme tabulky, kterou jsme si rozepsali vlevo.

**V prvním sloupci** opět pravidelně střídáme znaménka  $+, -, +, \dots$

**Ve druhém sloupci** opět derivujeme funkci určenou pro derivování

**Ve třetím sloupci** integrujeme funkci určenou pro integrování

Narozdíl od předchozího případu však nedokážeme zderivovat sloupeček s derivačním členem až na nulu.

Musíme si tak všimnout, kdy dostaneme na jednom řádku **stejně členy jako v původním integrálu** (až na multiplikační konstanty). Tam, myšleno na tom řádku, se zastavíme s derivováním i integrováním.

Opět jako v minulém případě poskládáme předcházející členy z tabulky (úrokem stranou), až se dostaneme na poslední řádek, kde tentokrát neposuneme se dolů, ale celý řádek umístíme do integrálu.

Celkově dostaneme v tomto případě:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sin(x) \cos(kx) \, dx = \sin(x) \left( \sin(kx) \frac{1}{k} \right) + (-1) \cos(x) \left( -\cos(kx) \frac{1}{k^2} \right) + \int \left( -\cos(kx) \frac{1}{k^2} \right) (-\sin(x)) \, dx \\
 I &= \frac{\sin(x) \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x) \cos(kx)}{k^2} + \frac{1}{k^2} \underbrace{\int \cos(kx) \sin(x) \, dx}_I \\
 I &= \frac{\sin(x) \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x) \cos(kx)}{k^2} + \frac{1}{k^2} I \quad \Rightarrow \quad I \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\sin(x) \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x) \cos(kx)}{k^2} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad I \left( \frac{k^2 - 1}{k^2} \right) &= \frac{\sin(x) \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x) \cos(kx)}{k^2} \quad \Rightarrow \quad I = \left( \frac{\sin(x) \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x) \cos(kx)}{k^2} \right) \left( \frac{k^2}{k^2 - 1} \right) \quad \Rightarrow \\
 \boxed{I} &= \frac{k \sin(x) \sin(kx) + \cos(x) \cos(kx)}{k^2 - 1}
 \end{aligned}$$

### ⇒ Odvození součtových vzorců skrze komplexní čísla

Definujme pomocnou funkci:  $\operatorname{cis}(\alpha) \equiv \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ ,  $\operatorname{cis}(\alpha + \beta) = \operatorname{cis}(\alpha) \operatorname{cis}(\beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) (\cos(\beta) + i \sin(\beta))$$

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = (\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)) + i (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta))$$

<b>Re část:</b> $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$	<b>Im část:</b> $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$
--	--

### ⇒ Rozdílové vzorce ze součtových vzorců

Využitím vlastností sudosti/lichosti fcí cosinus/sinus:  $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$   $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

### ⇒ Součinnové vzorce ze součtových a rozdílových vzorců

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$+ \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$- \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$+ \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$- \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = -2 \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}}$$

$$\boxed{\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)}{2}}$$

Poznámka: Základní vlastnosti komplexních čísel jsou v kapitole: [2.1 ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY](#)

## 2 KOMPLEXNÍ ANALÝZA

### Vzorečky: Připomenutí vlastností funkcí sinus a cosinus

$$\begin{array}{lll} \sin(-\theta) = -\sin(\theta) & \cos(-\theta) = \cos(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \\ \sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(\theta) & \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(\theta) & \operatorname{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \text{Alternativně: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) & \operatorname{cotg}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{array}$$

#### ⇒ Součtové a rozdílové vzorce

$$\begin{array}{ll} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) & \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)} & \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(y)}{1 + \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)} \end{array}$$

#### ⇒ Vzorce pro dvojnásobný úhel

$$\begin{array}{lll} \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - \sin^2(\theta) & \operatorname{tg} = \frac{2\operatorname{tg}(\theta)}{1 - \operatorname{tg}^2(\theta)} \\ \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & & \end{array}$$

#### ⇒ Vzorce pro poloviční úhel

$$\begin{array}{lll} \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} & \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} & \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}} \\ \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} & \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} & \operatorname{tg}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)} \end{array}$$

#### ⇒ Další užitečné odvozené vzorce

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8} [4\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 3] \quad \operatorname{tg}(\theta) \operatorname{cotg}(\theta) = 1$$

#### ⇒ Součin na součet

$$\begin{array}{ll} \sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} & \sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \\ \cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} & \cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \end{array}$$

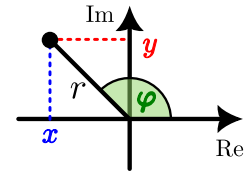
#### ⇒ Součet na součin

$$\begin{array}{ll} \sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{array}$$

## 2.1 ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

$$z \in \mathbb{C} : \quad z = x + iy \quad \begin{cases} x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{kde } i^2 = -1$$



$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{pro } \varphi \in (-\pi, \pi]$$

### ⇒ Vlastnosti komplexních čísel

- Algebraický tvar komplexního čísla:  $z = a + ib$   $w = c + id$
- Součet a rozdíl komplexních čísel:  $z + w = (a + c) + i(b + d)$   $z - w = (a - c) + i(b - d)$
- Reálná a imaginární složka:  $\operatorname{Re}\{z\} = a$   $\operatorname{Im}\{z\} = b \quad (\neq ib)$
- Komplexní sdružení a norma:  $\bar{z} = a - ib$   $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Komplexní násobení:  $z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- Komplexní dělení:  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} \quad (z \neq 0)$

### ⇒ Goniometrický tvar komplexního čísla

- Zavedení:  $z = \|z\| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \|z\| e^{i\varphi} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$
- Násobení v goniometrickém tvaru:  $z_1 \cdot z_2 = \|z_1\| e^{i\varphi_1} \cdot \|z_2\| e^{i\varphi_2} = \|z_1\| \|z_2\| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

### ⇒ Důležité vztahy a vlastnosti

- Komplexní exponenciála:  $e^z = \exp(z) := e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad \text{pro } z = x + iy$
- Eulerův vzorec (E):  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
- Eulerova identita:  $e^{i\pi} + 1 = 0$
- Moivreova věta:  $z^n = \|z\|^n (\cos(x) + i \sin(x))^n = \|z\|^n (\cos(nx) + i \sin(nx))$
- Moivreova věta exponenciálně:  $z^n = \|z\|^n e^{in\varphi}$
- Základní věta algebry: *Polynom stupně n má v  $\mathbb{C}$  právě n kořenů (včetně násobnosti)*

### ⇒ Rozdělení funkcí

- 1) polynomy se chovají jako v  $\mathbb{R}$
- 2)  $\sqrt{\quad}$  odmocniny dávají **tzv. víceznačné funkce**
- 3) funkce, které jsou rovny svým Taylorovým řadám (analytické) v  $\mathbb{C}$ :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

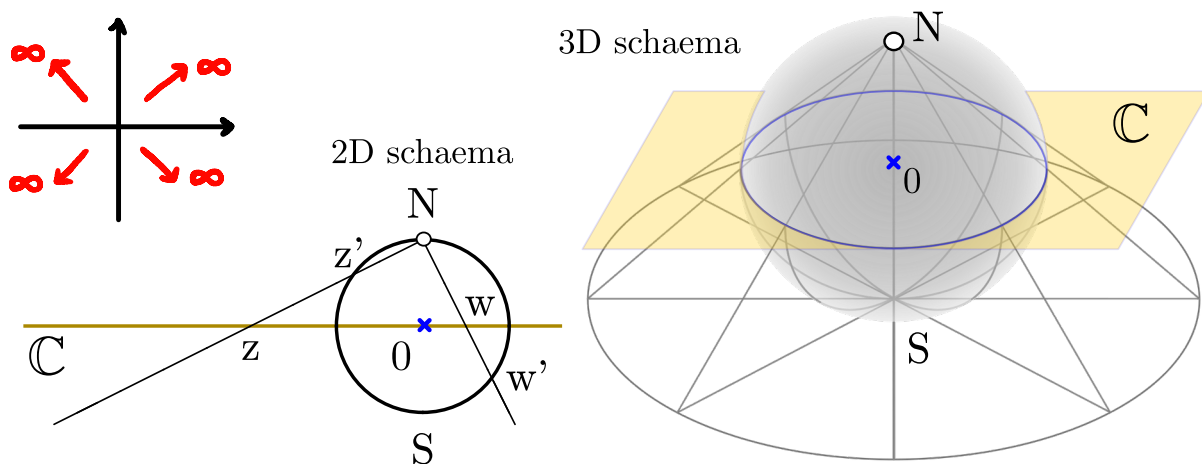
$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

⇒ Goniometrické a hyperbolické funkce & exponenciální tvar

$$\begin{array}{llll} \cos(iz) = \cosh(z) & \cosh(iz) = \cos(z) & \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin(iz) = i \sinh(z) & \sinh(iz) = i \sin(z) & \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{array}$$

- $\forall$  tyto funkce jsou **neomezené**, platí tedy i např.  $\cos(z) = -3$ ,  $\sin(z) = \pi$
- $\forall$  tyto funkce jsou **periodické**
  - sin, cos ... perioda  $2\pi$
  - sinh, cosh,  $e^z$  ... perioda  $2\pi i$

⇒ V komplexní rovině definujeme "jen" jedno nekonečno  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



Množina komplexních čísel bývá ztotožňována s jednotkovou sférou v  $\mathbb{R}^3$  s vynechaným severním pólem. Střed sféry odpovídá počátku komplexní roviny  $0 + 0i$ . Toto ztotožnění se nazývá **stereografická projekce**.

- body, pro něž  $|z| = 1$  (ležící na rovníku), se zobrazí samy na sebe
- body, pro něž platí  $|z| < 1$ , se zobrazí na jižní polokouli (případ  $W \rightarrow W'$ )
- počátek  $|z| = 0$  se zobrazí na jižní pól S
- body, pro něž platí  $|z| > 1$ , se zobrazí na severní polokouli (případ  $Z \rightarrow Z'$ )
- body „v nekonečnu“,  $|z| = \infty$  se zobrazí na severní pól N

Animace: <https://people.reed.edu/~ormsbyk/projectproject/assets/posts/stereographic-projection/stereographic2D.gif>

### Příklad

**Zadání:** Čemu se rovná  $\cos(2 + i)$ ?

✓ **Řešení:**  $\cos(2 + i) = \cos 2 \cos i - \sin 2 \sin i = \cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1$

### Příklad

**Zadání:** Vyřešte rovnici  $\cos(z) + \sin(z) = 2$  (nemá řešení v  $\mathbb{R}$ , ale v  $\mathbb{C}$  ano)  
A řešení uveďte ve tvaru  $z = a + ib$

✓ Řešení:

$$e^{iz} + e^{-iz} + \frac{1}{i} (e^{iz} - e^{-iz}) = 4 \quad t = e^{iz}$$

$$t + \frac{1}{t} + \frac{1}{i} \left( t - \frac{1}{t} \right) = 4$$

$$t^2 + 1 - i(t^2 - 1) = 4t$$

$$(1-i)t^2 - 4t + 1 + i = 0 \Rightarrow \text{diskriminant } D = 16 - 4(1-i)(1+i) = 8$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2(1-i)} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}(1+i) = (\sqrt{2} \pm 1) \underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}_{\text{velikost 1}} = e^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2} \pm 1)$$

$$e^{iz} = t = (\sqrt{2} \pm 1) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$e^{iz} = e^{-b+ai} = e^{-b} e^{ai} = (\sqrt{2} \pm 1) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{4}; \quad e^{-b} = \sqrt{2} \pm 1 \quad \Rightarrow \quad b = -\ln(\sqrt{2} \pm 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \frac{\pi}{4} - i \ln(\sqrt{2} \pm 1)}$$

✓ *Alternativní způsob řešení:*

$$\cos(z) + \sin(z) = 2$$

Vyjádřením komplexního čísla v algebraickém tvaru a využitím součtových vzorců pro sin a cos:

$$\sin(\overbrace{a+ib}^z) = \sin(a) \cos(ib) + \cos(a) \sin(ib) = \sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)$$

$$\cos(\overbrace{a+ib}^z) = \cos(a) \cos(ib) - \sin(a) \sin(ib) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)$$

$$\text{LS:} \quad \cosh b \cdot (\sin a + \cos a) + i \sinh b \cdot (\cos a - \sin a)$$

$$\text{PS:} \quad 2 + i0$$

$$\Rightarrow \text{Soustava rovnic:} \quad \begin{aligned} \sinh b (\cos a - \sin a) &= 0 \\ \cosh b (\sin a + \cos a) &= 2 \end{aligned}$$

1. rovnice: 1.) možnost:  $\sinh b = 0 \Rightarrow b = 0, a$  libovolné

$\Rightarrow$  2. rovnice:  $\sin a + \cos a = 2$ . To nemá v  $\mathbb{R}$  řešení

2.) možnost:  $\sin a = \cos a \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, b$  libovolné

$\Rightarrow$  2. rovnice:  $\rightarrow k$  sudé:  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \cosh b = \sqrt{2}$$

$$b = \pm \operatorname{arg} \cosh \sqrt{2}$$

$\rightarrow k$  liché:  $\sin a + \cos a = -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \cosh b = -\sqrt{2}$$

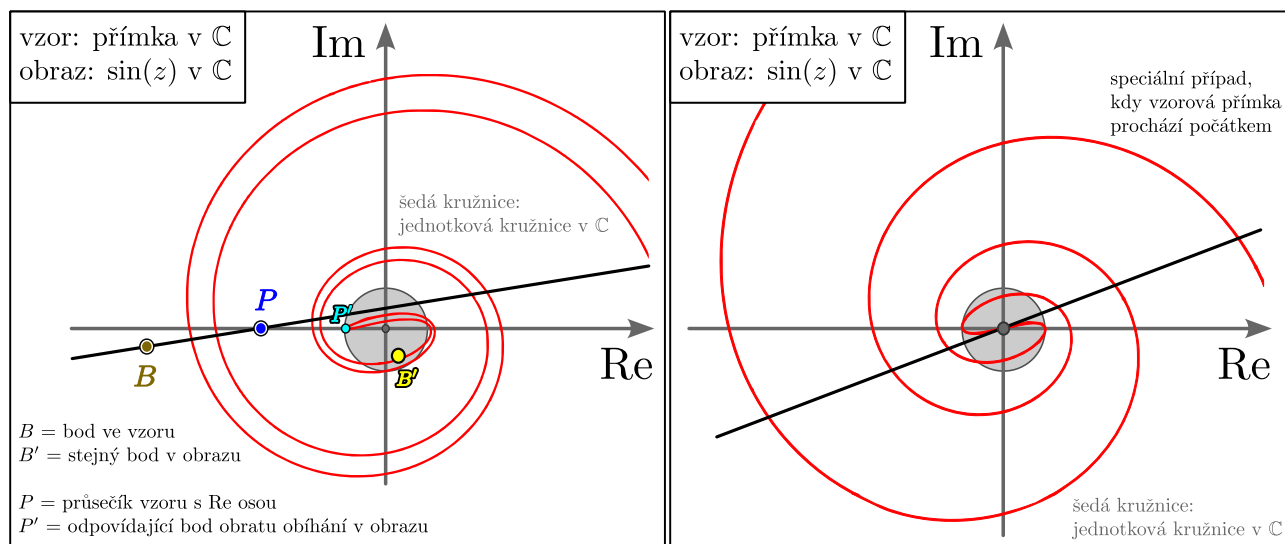
**nemá řešení**

Celkem:  $z = a + ib$ , kde  $a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$b = \pm \operatorname{arg} \cosh(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} \pm 1) \Rightarrow \boxed{z = \frac{\pi}{4} + i \ln(\sqrt{2} \pm 1)}$$

Poznámka: Získané výsledky jsou ekvivalentní:

$$z = \frac{\pi}{4} - i \ln(\sqrt{2} \pm 1) = \frac{\pi}{4} + i \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2} \pm 1}\right) = \frac{\pi}{4} + i \ln\left(\frac{\sqrt{2} \mp 1}{(\sqrt{2} \pm 1)(\sqrt{2} \mp 1)}\right) = \frac{\pi}{4} + i \ln(\sqrt{2} \mp 1)$$



Obrázek 1: Komplexní sinus, obraz a vzor v jedné komplexní rovině, 2 případy

Příklonem vzorové přímky k reálné ose se „sinová spirála zahušťuje“ až na reálné ose zdegeneruje v interval  $[-1, 1]$ , alias „klasický reálný sinus“.

Interaktivní zdroj: <https://www.geogebra.org/m/qtwNw524> [The Complex Sine Function]



## 2.2 KOMPLEXNÍ ZOBRAZENÍ, HOLOMORFNÍ FCE

### 2.2.1 DERIVACE A C-R PODMÍNKY

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \sim \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f : (x; y) \rightarrow (u; v)$$

$$f \text{ má v } a \in \mathbb{C} \text{ derivaci, jestliže existuje} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená množina,  $a \in \Omega$

→  $f$  je holomorfní v  $a$  ... jestliže  $\exists$  okolí  $a$  na němž má  $f$  derivaci

→  $f$  je holomorfní v  $\Omega$  ... jestliže  $\exists f'(z)$  pro  $\forall z \in \Omega$

Poznámka:

$z^k$  je holomorfní  $\forall k \in \mathbb{N}$  na  $\mathbb{C}$ ,  $\frac{1}{z}$  je holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\bar{z}$  není holomorfní NIKDE!

#### Věta 6 (Cauchy-Riemannovy podmínky).

Nechť  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  má v  $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$  derivaci

Označme:  $f(z) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$  pro  $z = z_1 + iz_2$ , kde  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{a} \quad F(z_1, z_2) := (u(z_1, z_2), v(z_1, z_2)) \quad \text{tedy} \quad F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Pak

a) funkce  $u, v$  v bodě  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  splňují C-R podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

b)  $F$  má v bodě  $(a_1, a_2)$  totální diferenciál a  $J_F(a_1, a_2) = |f'(a)|^2$

#### Věta 7 (Druhá věta o C-R podmínkách).

Nechť  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a  $u, v$  jsou jako výše, necht' jsou definovány na okolí  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

Jestliže  $u, v$  mají v  $(a_1, a_2)$  totální diferenciál a splňují-li v něm C-R podmínky,

⇒ pak  $f$  má v  $a = a_1 + ia_2$  derivaci a platí

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)$$

#### Definice 1 (Harmonická funkce).

(20.2.12)

Nechť  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  je definovaná a je třídy  $C^2$  na otevřené množině  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Řekneme, že  $g$  je harmonická na  $\Omega$ , jestliže

$$\Delta g = 0 \quad \text{na } \Omega$$

(připomeňme, že Laplaceův operátor je definován předpisem  $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_N^2}$ ).

Poznámka: Z C-R podmínek plyne, že **každá** složka holomorfní funkce (Re, Im) je harmonická.

Naopak znalost 1 složky harmonické funkce umožňuje zkonstruovat druhou harmonickou funkci tak, že společně tvoří Re a Im část holomorfní funkce.<sup>a</sup>

### Příklad

**Zadání:** Zjistěte, jestli je  $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  je na nějaké množině holomorfní?

✓ Řešení:

$$\left. \begin{aligned} u(x; y) &= \operatorname{Re}\{f\} \\ v(x; y) &= \operatorname{Im}\{f\} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \Leftrightarrow [x, y] \neq [0, 0]$$

V  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  neexistuje  $f'(z)$  & v bodě 0 nemá  $f(z)$  parciální derivace ani totální diferenciál

$\Rightarrow f'(z)$  **neexistuje nikde**

Podobné případy jsou:  $\bar{z}, \operatorname{Re}\{z\}, \operatorname{Im}\{z\}$

## 2.2.2 REKONSTRUKCE HOLOMORFNÍ FUNKCE

### Příklad

**Zadání:** Najděte holomorfní funkci (na maximálním definičním oboru)  $f = u + iv$  splňující předpis:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos(y) - y \sin(y))$$

✓ Řešení:

$$\text{Cauchy-Riemannovy podmínky: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x(x \cos(y) - y \sin(y) + \cos(y)) = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + e^x(-x \sin(y) - \sin(y) - y \cos(y)) = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int 2x + e^x[(x+1)\cos(y) - y\sin(y)] dy$$

$$\begin{aligned} v &= 2xy + e^x[x \sin(y) + y \cos(y)] + C(x) \\ &\quad \downarrow \text{dosadíme } v \text{ do derivací} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}(2xy + e^x[x \sin(y) + y \cos(y)] + C(x)) \\ &= -2y - e^x(x \sin(y) + y \cos(y) + \sin(y)) + C'(x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + e^x(-x \sin(y) - \sin(y) - y \cos(y)) \Rightarrow C'(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = 2xy + e^x[x \sin(y) + y \cos(y)] + K; \quad K \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + e^x(x \cos(y) - y \sin(y)) + i(2xy + e^x[x \sin(y) + y \cos(y)] + K)$$

kde  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$ ;  $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$

$$\text{tedy: } \boxed{f(z) = z^2 + z e^z + iK} \quad K \in \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

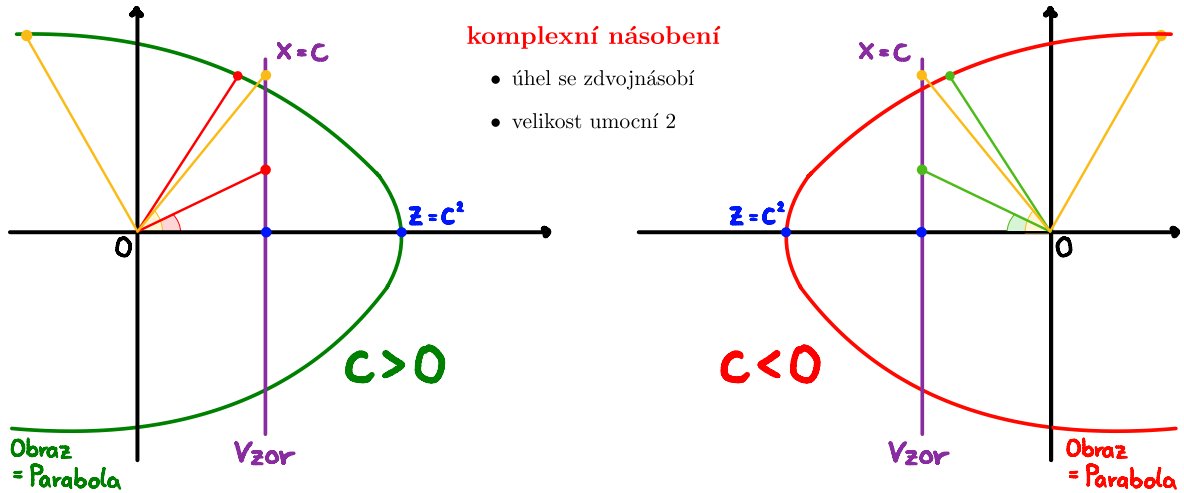
<sup>a</sup>Detailněji vizte M. Pokorný, Věta 20.2.13 (O harmoničnosti složek holomorfní funkce).

### 2.2.3 OBRAZY MNOŽIN

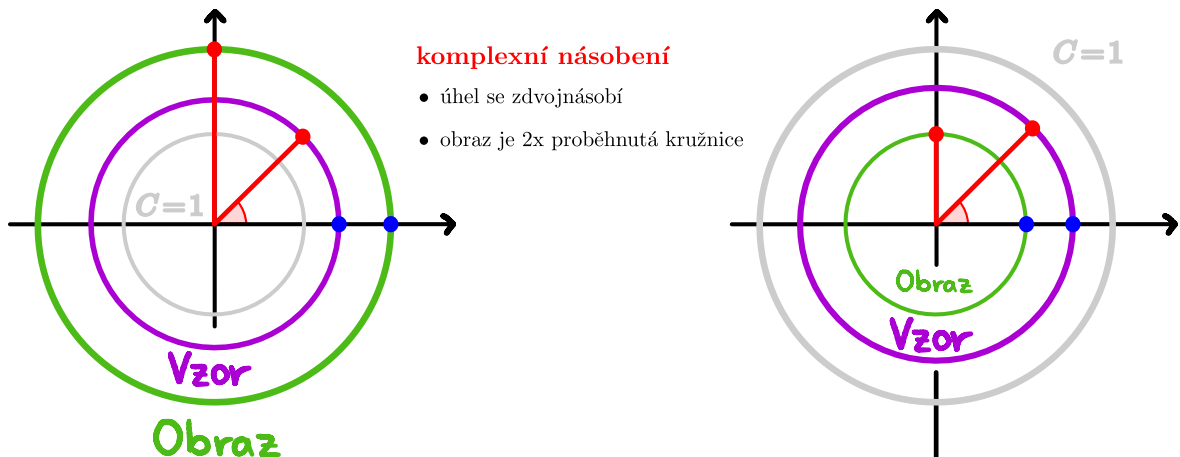
#### Příklad

Zadání: Mějme zobrazení:  $f(z) = z^2$ , určete:

a) obrazy přímek  $x = C$



b) obrazy kružnic  $|z| = C$



#### Příklad

Zadání: Mějme zobrazení:  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ , určete obrazy přímky  $\text{Im } z = 1$

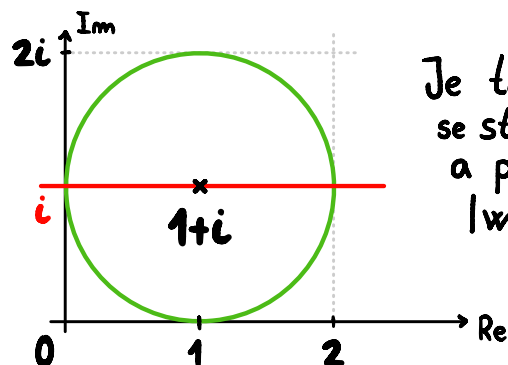
✓ Řešení:

$$f(x+i) = \frac{x-1+i}{x+1+i} = \frac{x^2+2i}{(x+1)^2+1}$$

$$x=0; \quad z=i; \quad f(i) = \frac{2i}{2} = i$$

$$x=-1; \quad z=-1+i; \quad f(-1+i) = 1+2i$$

$$x=\infty; \quad z=\infty; \quad f(\infty) = 1$$

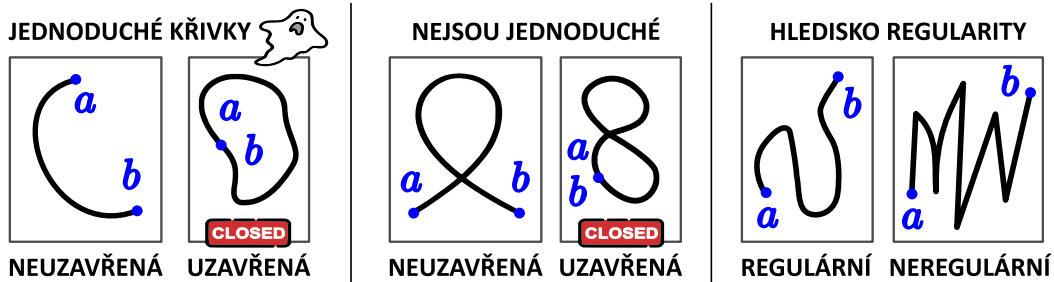


Další visualisace zde: <https://www.geogebra.org/m/CActpGQE> [Complex mapping]

## 2.3 KŘIVKOVÝ INTEGRÁL V $\mathbb{C}$

### Zavedení pojmů:

- *Křivka (v  $\mathbb{C}$ ):* zobrazení  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,
- *Regulární křivka:*  $\varphi'(t) \neq 0$  na  $[a, b]$
- *Jednoduchá křivka:*  $\varphi$  je prostá na  $[a, b]$  a na  $(a, b]$  a  $\varphi^{-1}$  spojitá na obrazu  $(a, b)$
- *Uzavřená křivka:*  $\varphi(a) = \varphi(b)$
- *Jordanova křivka:* jednoduchá + uzavřená

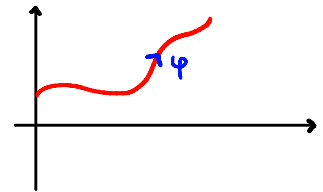


### Vzoreček: Křivkový integrál

Nechť  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , pak

$$\int_{\varphi} f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

jestliže integrál na PS existuje jako Lebesgueův



- *Délka křivky:*  $l_{\varphi} := \int_a^b |\varphi'(t)| dt$

### Poznámka:

Vnímáme-li  $\mathbb{C}$  jako  $\mathbb{R}^2$ , je  $f$  vektorová funkce a  $\int_{\varphi} f(z) dz$  je vlastně křivkový integrál 2. druhu

### Definice 2 (Primitivní funkce (v $\mathbb{C}$ )).

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $f, F$  jsou definované na  $\Omega$ .

Je-li  $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$ , pak  $\Rightarrow F$  je primitivní funkcí k  $f$  na  $\Omega$ .

### Poznámky:

1.  $f$  má primitivní funkci v oblasti  $\Omega$  právě tehdy,

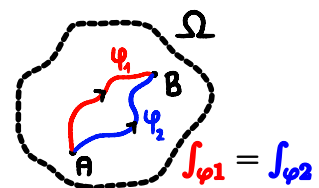
když  $\Leftrightarrow \int_{\varphi} f$  nezávisí na volbě křivky

2. platí Newtonův vzoreček:

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  otevřená,  $f$  spojitá a  $F$  primitivní funkce k  $f$ .

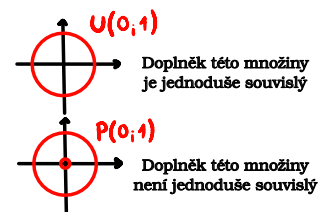
Pak  $\Rightarrow$  pro  $\underbrace{\forall \varphi}_{\text{po částech } C^1} : [a, b] \rightarrow \Omega$  platí

$$\int_{\varphi} f(z) dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$



## Další pojmy:

- *Jednoduše souvislá oblast:* pro jednoduše souvislou oblast  $\Omega$  platí, že její doplněk  $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$  je též jednoduše souvislá oblast.
- *po částech  $C^1$  křivka* pseudodefinice: spojitá křivka „s konečným počtem hrotů“



### 2.3.1 CAUCHYOVA VĚTA

#### Věta 8 (Cauchyova věta).

(CV)

Nechť  $\Omega$  je jednoduše souvislá oblast (nemá díry), fce  $f$  je holomorfní v oblasti  $\Omega$ ,  
pak  $\Rightarrow$  pro  $\forall$  křivku  $\varphi$  (uzavřená a po částech  $C^1$ ), jejíž obraz  $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$  platí:

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 0$$



#### Věta 9 (Cauchyova „děravá“ věta).

(Věta 20.4.7)

Nechť  $k \in \mathbb{N}$  a  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$  jsou regulární Jordanovy po částech  $C^1$ -křivky v  $\mathbb{C}$ , pro které platí

$$\begin{aligned} \text{Int } \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle &\subset \text{Int } \varphi \quad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\}, \\ (\text{Int } \varphi_i \cup \langle \varphi_i \rangle) \cap (\text{Int } \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle) &= \emptyset \quad \text{kdykoliv } i \neq j \end{aligned}$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu.

Položme  $\Omega := \text{Int } \varphi \setminus \bigcup_{j=1}^k (\text{Int } \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle)$ . Nechť funkce  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfní na  $\Omega$  a spojitá na  $\bar{\Omega}$ .

Pak

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_j} f(z) dz .$$

#### Poznámka:

Poslední věta se ve skriptech jmenuje **třetí verse Cauchyovy věty**. Používáme ji jen ve velmi jednoduchých situacích, kde platí:

- $\varphi$  bude obíhat velký půlkruh nebo obdélník
- $k$  bude velmi malé a  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  budou obíhat malé kruhy
- dokonce  $f$  bude holomorfní na množině  $\Omega$  mimo středy těchto malých kruhů

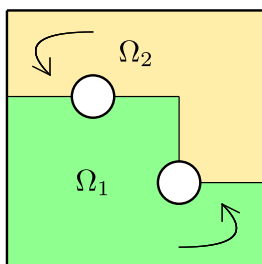
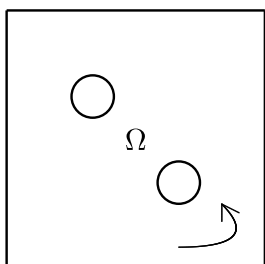
Pak je zcela korektní důkaz na následující straně.

DŮKAZ (CAUCHYOVA „DĚRAVÁ“ VĚTA)

Množinu  $\Omega$  rozdělíme na dvě disjunktní jednoduše souvislé oblasti  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  jako na **Obrázku**. Pokud označíme jako  $\langle \psi_1 \rangle$  geometrický obraz křivky v dolní části obrázku napravo a  $\langle \psi_2 \rangle$  geometrický obraz křivky v horní části stejného obrázku, dostáváme

$$0 = \int_{\psi_1} f(z) dz + \int_{\psi_2} f(z) dz = \int_{\varphi} f(z) dz - \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_j} f(z) dz,$$

protože integrály přes přidané lomené čáry se navzájem odečtou



Přidáním několika lomených čar probíhaných dvakrát v opačném směru vytvoříme jednoduše souvislé oblasti:

$$\Omega_1, \Omega_2$$

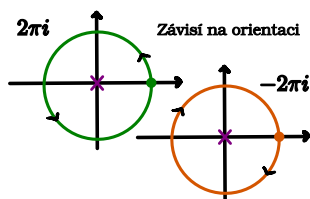
kde již lze použít základní Cauchyovu větu (CV)

**Fundamentální příklad (kde Cauchyova věta nefunguje):**

$$\varphi(t) = R e^{it} \quad t \in [0; 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = iR e^{it}$$

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R e^{it}} \cdot iR e^{it} dt = \boxed{2\pi i}$$



Proč tu neplatí Cauchyho věta (👉)

- $f(z) = \frac{1}{z}$  **definovaná** v  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $f(z)$  **holomorfní** v  $\Omega$ ,  $\varphi$  **uzavřená**
- $\Omega$  ale **není** jednoduše souvislá! ❌

**Důsledek:**  $\frac{1}{z}$  nemá primitivní funkci v  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

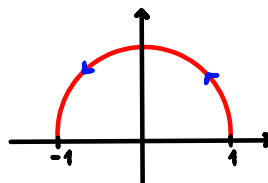
Ještě obecněji (posunutá kružnice):  $\varphi(t) = a + R e^{it}, t \in [0; 2\pi], \quad \varphi'(t) = iR e^{it}$

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{a} + R e^{it} - \cancel{a}} \cdot iR e^{it} dt = \boxed{2\pi i}$$

**Typologie příkladů:**

① *Křivka  $\varphi$  není uzavřená, přesto vyjde  $\int f = 0$*

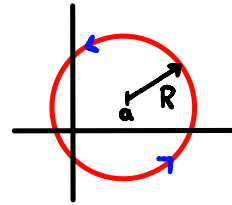
**Zadání:**  $\int_{\varphi} z dz$ , kde  $\varphi$  je polokružnice  $|z| = 1$ , z bodu  $(1,0)$  do  $(-1,0)$  přes horní polovinu.



✓ **Řešení:**

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= e^{it} & t \in [0, \pi] \\ \varphi'(t) &= i e^{it} \end{aligned} \right\} \int_{\varphi} z dz = \int_0^{\pi} (e^{it}) (i e^{it}) dt = i \int_0^{\pi} e^{2it} dt = i \left[ \frac{e^{2it}}{2i} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} [e^{2i\pi} - e^0] = 0$$

② Jsou splněny předpoklady Cauchyho věty, proto  $\int f = 0$

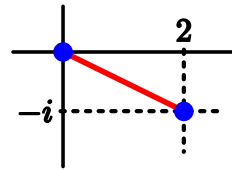


**Zadání:**  $\int_{\varphi} (z - a)^n dz$ , kde  $\varphi$  je kladně orientovaná kružnice s předpisem  $|z - a| = R$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ,  $a \in \mathbb{C}$

✓ **Řešení:**

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= a + R e^{it} & t \in [0, 2\pi] \\ \varphi'(t) &= iR e^{it} \end{aligned} \right\} \int_0^{2\pi} (R e^{it})^n (iR e^{it}) dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} dt = iR^{n+1} \left[ \frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \right]_0^{2\pi} = 0$$

③  $f$  není holomorfní, křivka  $\varphi$  není uzavřená



**Zadání:**  $\int_{\varphi} |z| dz$ , kde  $\varphi$  je průvodič bodu  $2 - i$

✓ **Řešení:**

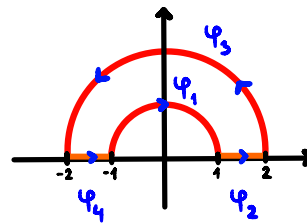
$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= (2 - i)t & t \in [0, 1] \\ \varphi'(t) &= 2 - i \end{aligned} \right\} \int_{\varphi} |z| dz = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (t)^2} (2 - i) dt = \sqrt{5}(2 - i) \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} (2 - i)$$

④  $f$  není holomorfní, ale křivka  $\varphi$  je uzavřená

**Zadání:**  $\int_{\varphi} \frac{z}{z} dz$ ,  $\varphi$  je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku s poloměry 1 a 2.

✓ **Řešení:**

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{-it} & t \in [-\pi; 0] & \quad \varphi_1'(t) = -i e^{-it} \\ \varphi_2(t) &= t & t \in [1; 2] & \quad \varphi_2'(t) = 1 \\ \varphi_3(t) &= 2 e^{it} & t \in [0; \pi] & \quad \varphi_3'(t) = 2i e^{it} \\ \varphi_4(t) &= t & t \in [-2; -1] & \quad \varphi_4'(t) = 1 \end{aligned}$$



$$\int_{\varphi_1} \frac{z}{z} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{e^{-it}}{e^{-it}} (-i e^{-it}) dt = -i \int_{-\pi}^0 e^{-3it} dt = -i \left[ \frac{e^{-3it}}{-3i} \right]_{-\pi}^0 = \frac{1}{3} [\cos(3t) - i \sin(3t)]_{-\pi}^0 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\varphi_2} \frac{z}{z} dz = \int_1^2 \frac{t}{t} dt = [t]_1^2 = 1$$

$$\int_{\varphi_3} \frac{z}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{2 e^{it}}{2 e^{it}} (2i e^{it}) dt = 2i \int_0^{\pi} e^{3it} dt = 2i \left[ \frac{e^{3it}}{3i} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} [\cos(3t) + i \sin(3t)]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{\varphi_4} \frac{z}{z} dz = \int_{-2}^{-1} \frac{t}{t} dt = [t]_{-2}^{-1} = 1$$

$$\boxed{\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = \frac{4}{3}}$$

K výpočtům se nám dále bude hodit:

**Lemma 2** (Jordanovo lemma).

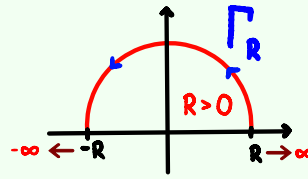
(Jordan)

Nechť pro  $R_0 > 0$  je  $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, |z| > R_0\}$ ,  
 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  spojitá na  $\bar{\Omega}$

Definujeme  $\Gamma_R(t) = R e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  a  $M_R = \max_{\langle \Gamma_R \rangle} |f|$

Dále necht' platí

- BUĎ  $\alpha = 0$  a  $RM_R \rightarrow 0$  pro  $R \rightarrow +\infty$
- NEBO  $\alpha > 0$  a  $M_R \rightarrow 0$  pro  $R \rightarrow +\infty$



Pak  $\Gamma_R$  je horní půlkružnice,  $t \in [0, \pi]$  a platí

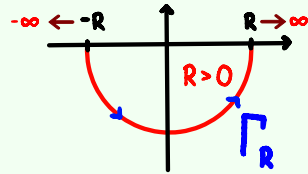
$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0 \quad \text{pro } R \rightarrow \infty \quad (\text{basketball})$$

Pokud  $\text{Im } z < 0$ , (a opět)  $|z| > R_0$

Pak volíme  $\Gamma_R(t) = R e^{it}$ ,  $t \in [\pi, 2\pi]$

A vyžadujeme, aby platilo

- BUĎ  $\alpha = 0$  a  $RM_R \rightarrow 0$  pro  $R \rightarrow +\infty$
- NEBO  $\alpha < 0$  a  $M_R \rightarrow 0$  pro  $R \rightarrow +\infty$



Tedy

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0 \quad \text{pro } R \rightarrow \infty$$

**Vzoreček: Cauchyův vzorec**

(C. vzorec)

Nechť  $\Gamma$  kladně orientovaná Jordanova, po částech  $C^1$  křivka v  $\mathbb{C}$ .  $f$  holomorfní v  $\text{Int } \Gamma$  a spojitá na  $\overline{\text{Int } \Gamma}$ .

Pak pro  $\forall z_0 \in \text{Int } \Gamma$  platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

A pro  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Speciálně:

Pro  $\Gamma_r = a + r e^{it}$   $t \in [0; 2\pi]$ , a kde  $f \equiv 1$ ,  $z_0 = a$  platí:

$$1 = f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z - a} dz \Leftrightarrow \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z - a} dz = 2\pi i$$

**Lemma 3** (Lemma o obcházení pólu násobnosti 1).

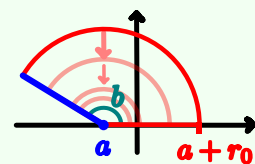
(LOOPN1)

Budiž  $f$  spojitá na  $0 < |z - a| \leq r_0$ ,  $0 \leq \arg(z - a) \leq b$ , kde  $b \in (0, 2\pi]$

Nechť  $\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) \cdot (z - a) = A \in \mathbb{C}$

Potom  $\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = iAb$ ,

kde  $C_r$  značí kladně proběhnutý oblouk kružnice  $|z - a| = r$  vyřatý úhlem  $b$





### Příklad

Zadání:  $\int_{\varphi} \frac{1}{z^2} dz$  kde  $\varphi$  je jednotková kružnice v  $\mathbb{C}$  se středem v počátku

✓ Řešení:

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}} i e^{it} = i \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = -\frac{i}{i} [e^{-it}]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

## 2.3.2 KOMPLEXNÍ LOGARITMUS, OBEČNÁ MOCNINA

### Komplexní Logaritmus

Přirozené zavedení: Pro  $z = r e^{i\varphi}$  jest  $\text{Ln}(z) = \ln(r) + i\varphi$

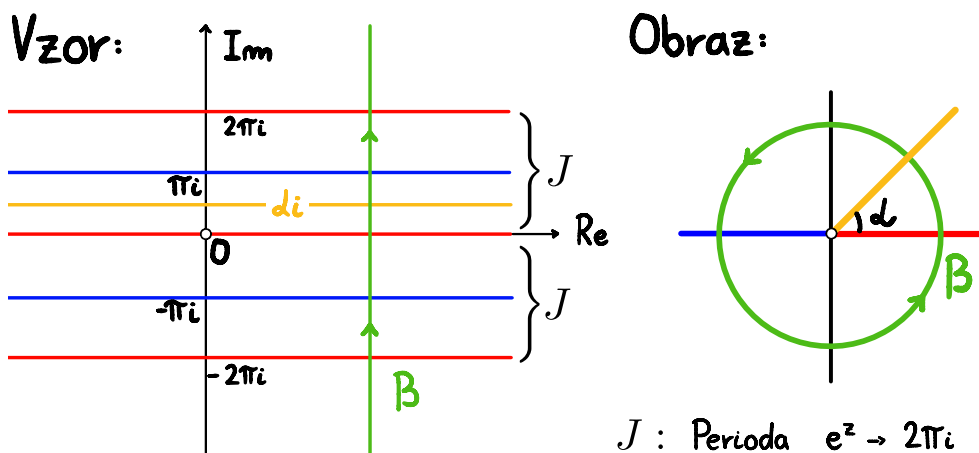


Problém: Dostali jsme víceznačnou funkci, protože  $\varphi$  není určeno jednoznačně!



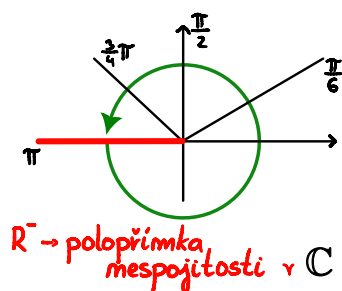
Řešení: Omezit  $\varphi$  na interval délky jedné periody  $J = 2\pi$ , např.  $(-\pi; \pi)$  nebo  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ , atp.

Pro kladná reálná  $x$  je pak  $\ln(x)$  standardní logaritmus, může však být i  $\ln(x) + 2k\pi i$  pro libovolné  $k \in \mathbb{Z}$

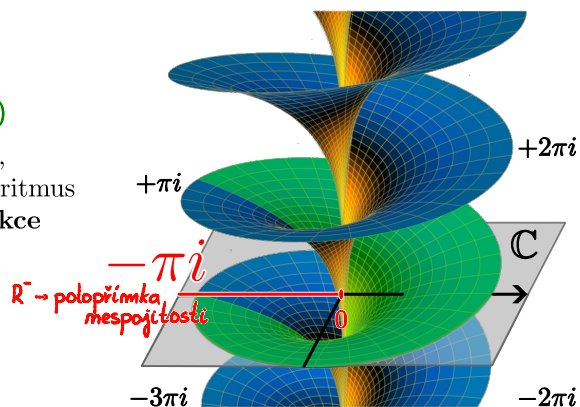


Obrázek 2: Obrazy kartézské sítě při zobrazení  $e^z$

$$L_m : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{J}$$



$\varphi \in J = (-\pi, \pi)$   
zvolný interval,  
kde je komplexní logaritmus  
jednoznačná funkce



Obrázek 3: Polopřímka nespojitosti komplexního logaritmu a jeho 4D znázornění

## Pojmy:

- *Argument Logaritmu* Definujeme  $\varphi = \text{Arg}(z) := t \in (c; c + 2\pi]$ , tak, aby na tomto intervalu byl Logaritmus definovaný jednoznačně.
- *Polopřímka nespojitosti* Vzhledem k tomu, že  $\text{Ln}(z)$  je víceznačná funkce, existuje pro ni tzv. polopřímka nespojitosti, jejíž poloha závisí na námi zvoleném intervalu pro  $t$  v zavedení  $\text{Arg}(z)$ .
- *Logaritmus jako PF* Mimo polopřímku nespojitosti je  $\text{Ln}(z)$  primitivní funkcí k  $\frac{1}{z}$
- *Hlavní větev logaritmu* Hlavní větev Logaritmu se standardně definuje skrze  $\text{Arg}(z) := t \in (-\pi; \pi]$ , polopřímka nespojitosti pak vychází na  $\mathbb{R}_0^-$ , Takto zvolená větev nám pak pro  $x \in \mathbb{R}^+$  dává známý logaritmus  $\ln(x)$
- *Vedlejší větev logaritmu* Nic nám ale nebrání zvolit si  $t$  pro  $\text{Arg}(z)$ , často pak dostaneme polopřímku nespojitosti mimo reálnou osu v komplexní rovině.

### Logaritmus jako inverzní funkce k exponenciále v $\mathbb{C}$

$$e^z = w = |w| e^{i \text{Arg}(w)} \Leftrightarrow z = \underbrace{\text{Ln}|w|}_{\text{„klasický“ logaritmus}} + i \text{Arg}(z)$$

Př.:  $\text{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\pi = \ln(1) + i\pi = i\pi$

Př.:  $\text{Ln}(i) = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$  závěr ... ryze imaginární výsledek, vychází pro  $|z| = 1$

## Obecná mocnina

Zavedení pro  $z \neq 0$ :  $z^a := e^{a \text{Ln}(z)} = e^{a(\ln|z| + i \text{Arg}(z))}$  obecná mocnina závisí na volbě větve Logaritmu

Jak již bylo zmíněno, větve  $\text{Ln}(z)$  jsou spojité na oblastech bez příslušných polopřímek nespojitosti (např. pro  $(-\pi, \pi]$  je to oblast spojitosti  $\mathbb{C} \setminus \{t; t \leq 0\}$ )

Dokonce jsou zde větve  $\text{Ln}(z)$  holomorfní a platí  $(\text{Ln}(z))' = \frac{1}{z}$

**Je ale potřeba dávat pozor při přechodu polopřímek nespojitosti.**



Oběcně:  $\text{Ln}(z_1 z_2) \neq \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$   
 Avšak!  $\exists k \in \mathbb{Z} : \text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2) + 2k\pi i$



### Případy:

- $a \in \mathbb{Z}$  ...  $z^a$  klasické násobení  $\rightarrow$  jednoznačná funkce
- $a \notin \mathbb{Z}$  ... víceznačná funkce

### Příklady:

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(z)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i \arg z)} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z}{2}}; \quad \frac{\arg z}{2} = \frac{1}{2} \text{Arg} z + k\pi, \quad k \in \{0; 1\}$$

$$\sqrt{-1} = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = \pm i$$

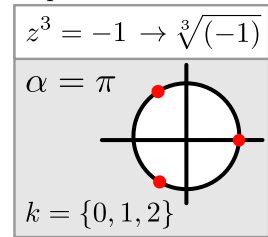
Ku výpočtu vyšších odmocnin využíváme **Moivreovy věty**

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n = \cos(nz) + i \sin(nz)$$

která vychází z vlastností komplexní exponenciály a (**Eulerova vztorec**)

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n}$$

Např:



a jmenovitě pak:  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$   
 kde  $k \in 0, \dots, n-1$ ;  $\alpha$  určíme z pravé strany rovnice

Kompaktnější zápis:  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[ \exp\left(i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right) \right]$

### 2.3.3 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY (KŘIVKOVÝ INTEGRÁL)

#### Příklad 1

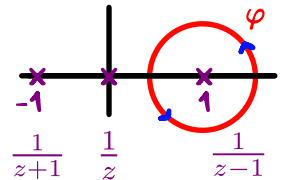
**Zadání:**  $\int_{\varphi} \frac{1}{z(z^2-1)} dz$ , kde integrační křivka  $\varphi$  je zadána v (a), (b), (c)

(a)  $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{2} e^{it} \quad t \in [0; 2\pi]$

Parciální zlomky:  $\int_{\varphi} \frac{1}{z(z^2-1)} dz = \int_{\varphi} \frac{A}{z} + \int_{\varphi} \frac{B}{z-1} + \int_{\varphi} \frac{C}{z+1}$

$$1 = A(z^2-1) + Bz(z+1) + Cz(z-1)$$

$$\Rightarrow A = -1; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{2}$$



$$\int_{\varphi} \frac{1}{z(z^2-1)} dz = - \underbrace{\int_{\varphi} \frac{1}{z}}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\varphi} \frac{1}{z+1}}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\varphi} \frac{1}{z-1}}_{2\pi i} = \boxed{\pi i}$$

první dva  $\int = 0$  z (**Cauchyho věty**): funkce je v dané oblasti holomorfní

(b)  $\varphi = \frac{1}{2} e^{it} \Rightarrow -2\pi i + 0 + 0 = -2\pi i$

(c)  $\varphi = -1 + \frac{1}{2} e^{it} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2} 2\pi i + 0 = \pi i$

### Příklad 2

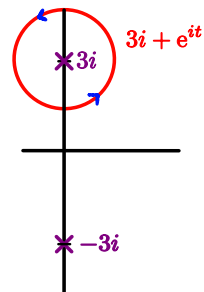
**Zadání:**  $\int_{\varphi} \frac{1}{z^2 + 9} dz$ , kde  $\varphi = 3i + e^{it}$ ,  $t \in [0; 2\pi]$

✓ **Řešení:**

Parciální zlomky:  $\int_{\varphi} \frac{1}{z^2 + 9} dz = \int_{\varphi} \frac{A}{z + 3i} dz + \int_{\varphi} \frac{B}{z - 3i} dz$

$$1 = A(z - 3i) + B(z + 3i)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{6}i \quad B = -\frac{1}{6}i$$



$$\int_{\varphi} \frac{\frac{1}{6}i}{z + 3i} + \int_{\varphi} \frac{-\frac{1}{6}i}{z - 3i} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{6}i}{z + 3i} + \int_0^{2\pi} \frac{-\frac{1}{6}i}{z - 3i} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\frac{1}{6}i}{3i + e^{it} + 3i}}_{=0, \text{ splněny předpoklady (Cauchyho věty)}} i e^{it} + \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{-\frac{1}{6}i}{\cancel{3i} + e^{it} - \cancel{3i}}}_{-\frac{1}{6}i 2\pi i} i e^{it} = \boxed{\frac{1}{3}\pi}$$

### Příklad 3

**Zadání:** Vypočtěte  $I = \int_C \frac{z e^z}{z^2 + 4} dz$ , kde  $C$  je kladně proběhnutá kružnice o středu  $2i$  a poloměru  $2$ .

✓ **Řešení:**

$$\int_{\varphi} \frac{z e^z}{z^2 + 4} dz; \quad \varphi(t) = 2i + 2 e^{it}$$

Parciální zlomky:  $\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{A}{z + 2i} + \frac{B}{z - 2i}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{2}$$

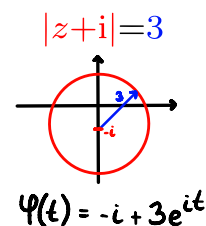
$$\int_{\varphi} \frac{z e^z}{z^2 + 4} dz = \underbrace{\int_{\varphi} \frac{\frac{1}{2} e^z}{z + 2i}}_{=0} + \int_{\varphi} \frac{\frac{1}{2} e^z}{z - 2i} = (\text{C. vzorec}) = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{2i} = \boxed{\pi i e^{2i}}$$

(Cauchyho věta)

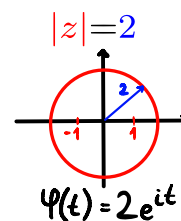
### Příklad 4

**Zadání:** Vypočtěte

a)  $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz = (\text{C. vzorec}) = 2\pi i \sin(-i) = -2\pi i \sin(i) = \boxed{2\pi \sinh(1)}$



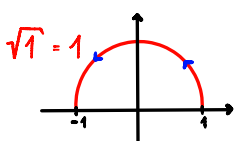
$$b) \int_{\varphi} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz = \int e^z \left( \frac{\frac{1}{2}}{z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z-1} \right) = 2\pi i \underbrace{\left[ \frac{1}{2} e^1 - \frac{1}{2} e^{-1} \right]}_{\substack{z \text{ definice } \sinh(z) \\ \text{kde } z=1}} = \boxed{2\pi i \sinh(1)}$$



### Příklad 5

**Zadání:** Vypočíst  $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ ,  $\varphi$  je polokružnice  $|z|=1$ , z bodu  $(1, 0)$  do  $(-1, 0)$  přes horní polorovinu  $\sqrt{1}=1$

✓ Řešení:

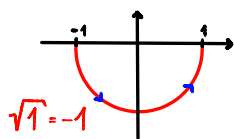


$$\varphi(t) = e^{it} \quad t \in [0; \pi]$$

$$\varphi'(t) = i e^{it}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{e^{it}}} i e^{it} dt = i \int_0^{\pi} \sqrt{e^{it}} dt = i \left[ \frac{e^{\frac{1}{2}it}}{\frac{1}{2}i} \right]_0^{\pi} = -2 \left( e^{\frac{1}{2}i\pi} - e^0 \right) = \boxed{2(1-i)}$$

Pro spodní polorovinu:



$$\varphi(t) = e^{it} \quad t \in [\pi; 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = i e^{it}$$

$$i \int_{2\pi}^{\pi} \sqrt{e^{it}} dt = -2 \left( e^{\pi i} - e^{\frac{1}{2}i\pi} \right) = \boxed{2(1+i)}$$

Poznámka: Výsledky se liší o  $i$ :  $2(1-i) \cdot i = 2(1+i)$

### Příklad 6

**Zadání:** Vypočtete  $\int_{\varphi} \ln(z) dz$ ,  $\varphi$  je kružnice  $|z|=1$ ,  $\ln 1 = 0$

Poznámka: Komplexní logaritmus  $\ln z$  je nekonečně značná funkce, upřesňujeme  $\ln(1) = 0$

✓ Řešení:  $\varphi = e^{it}$ ,  $t \in [0; 2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \ln|z| + i \operatorname{Arg} z dz &= \int_0^{2\pi} \overbrace{(\ln|e^{it}| + i \operatorname{Arg} e^{it})}^0 i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} -t e^{it} dt \stackrel{\text{p.p.}}{=} \begin{bmatrix} g = t & f' = 1 \\ g = e^{it} & g = \frac{1}{i} e^{it} \end{bmatrix} = \\ &= - \left[ \frac{t}{i} e^{it} \right]_{t=0}^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{i} e^{it} dt = 2\pi i + \left[ \frac{e^{it}}{i} \right]_{t=0}^{2\pi} = \boxed{2\pi i} \end{aligned}$$

## 2.4 MOCNINNÉ A LAURENTOVY ŘADY

**Definice 3** (Laurentova řada).

Nechť  $f$  holomorfní v  $\Omega$ , střed  $z_0 \in \Omega$ , kruh konvergence mocninné řady  $B_R(z_0) \subset \Omega$ .

Pak  $\exists!$  (právě jedna) posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ , taková, že:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall B_R(z_0)$$

Navíc  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ , kde  $C_r(z_0)$  je kružnice o poloměru  $r$  a středu  $z_0$

**Důsledky:**

1.  $z = a$ :  $\forall n \geq 1 \dots (z - a)^n = 0$

$n = 0 \dots (z - a)^n = 1 \dots f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(r)}{r - a} dr \dots$  Cauchyho vzorec

2.  $\forall n \geq 0$ :  $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \Rightarrow$  **Má-li  $f$  první derivaci, pak má všechny**

**Věta 10.** Hlavní a regulární část Laurentovy řady

Nechť  $f$  holomorfní na  $B_{a,b}(z_0)$  Pak  $\exists!$  (právě jeden) systém  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ , takový, že:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n (z - z_0)^n}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n}_{\text{regulární část}} \quad \forall z \in B_{a,b}(z_0)$$

Navíc  $(\forall n \in \mathbb{Z}) (\forall r \in (a, b))$ :  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

**Značení:**  $B_{a,b}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\} \dots$  otevřené mezikruží s poloměry  $a < b$

**Residuum:**

Pro  $a = 0, b > 0$  definujeme  $a_{-1} := \text{Res}_{z_0} f \dots$  residuum  $f$  v bodě  $z_0$

Pro  $b = \infty$  definujeme  $-a_{-1} := \text{Res}_\infty f \dots$  residuum  $f$  v  $\infty$

**Vzoreček: Laurentova řada v 0 a v  $\infty$**

$f(z)$  jest holomorfní v  $\infty \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right)$  je holomorfní v 0

Laurentova řada funkce  $f$  se středem v  $\infty \equiv$  Laurentova řada funkce  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  v 0

$$\frac{1}{|z|} < \frac{1}{r} \Leftrightarrow |z| > r$$

**Platí:**

Má-li  $f$  v bodě  $z_0$  izolovanou singularitu  $\equiv f$  je holomorfní na  $B_{0,b}(z_0)$  pro nějaké  $b > 0$  (není definovaná v  $z_0$ )

$\Leftrightarrow f$  má LŘ v bodě  $z_0$  s poloměrem konvergence  $b$

### Příklad

**Zadání:** Určete Laurentovu řadu funkce  $f(z) = \frac{1}{z}$  v bodě  $z_0 = 0$

✓ **Řešení:** V bodě  $z_0 = 0$  je  $f(z) = \frac{1}{z}$  svou vlastní LŘ

### Příklad

**Zadání:** Určete Laurentovu řadu funkce  $f(z) = \frac{1}{z-2}$

a) v bodě  $z_0 = 0$

b) v bodě  $z_0 = \infty$

✓ **Řešení:**

a)  $z_0 = 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{1}{z-2}}{z^{n+1}} dz$$

$$\boxed{n \leq -1} \rightarrow n+1 \leq 0 \Rightarrow \int \underbrace{\frac{1}{z-2} z^{-(n+1)}}_{\text{holomorfní}} dz = 0 \quad \Rightarrow \text{hlavní část} = 0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{(Cauchyho věta)} \end{matrix}$$

Pro  $\boxed{n \geq 0}$  můžeme použít

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -1(0-2)^{-2} + \frac{1}{2}2(0-2)^{-3} + \frac{1}{6}(-6)(0-2)^{-4} \dots = (-1)^n (-2)^{-n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n$$

b)  $z_0 = \infty$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z}-2} = \frac{z}{1-2z}$$

$$a_n = 2\pi i \int_{C_r(z_0)} \frac{z}{1+2z} \frac{1}{z^{n+1}} dz = \int \frac{1}{(1-z)z^n} dz = 0 \quad \text{pro } n \leq 0 \quad (g(0) = 0)$$

$$g'(z) = \frac{1}{(1-2z)^2}, \quad g''(z) = \frac{4}{(1-2z)^3}, \quad g^{(3)}(z) = \frac{24}{(1-2z)^4}, \quad \Rightarrow g^{(n)}(z) = \frac{n! 2^{n-1}}{(1-2z)^{n+1}} \Rightarrow a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = 2^{n-1}$$

LŘ pro  $g$  v 0 je  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot z^n$ ; konverguje stejnoměrně pro  $|z| < \frac{1}{2}$  a platí:  $g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} z^m$  pre  $|z| < \frac{1}{2}$

LŘ pro  $f$  v  $\infty$  je  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} 2^{-n+1} \cdot z^n$  konverguje stejnoměrně pro  $|x| > 2$

### Příklad

**Zadání:** Určete Laurentovu řadu funkce  $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$

a) v bodě  $z_0 = i$

b) v bodě  $z_0 = \infty$

✓ **Řešení:**

Pro  $\boxed{\forall n \leq -3}$  bude  $a_n = 0$

Pro  $\boxed{n \geq -2}$   $\underbrace{\frac{-\frac{1}{4}}{(z-i)^2} + \frac{\frac{i}{4}}{(z-i)}}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{\frac{-\frac{i}{4}}{(z+i)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{(z+i)}}_{\text{regulární část}} \rightarrow$  Taylor (derivujeme!)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(r+i)^2} \frac{1}{(r-i)^{2+n+1}} dr \quad \dots \equiv 0 \quad \text{pro } \boxed{n \leq -3} \text{ (integrand holomorfní)}$$

$$\gamma = i + e^{it} \quad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(r+i)^2} \frac{1}{(r-i)} dr = -\frac{1}{4} \leftarrow \text{(Cauchyův vzorec)}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(r+i)^2} \frac{1}{(r-i)^2} dr = \dots = 2\pi i \left\{ \left[ \frac{1}{(r+i)^2} \frac{-1}{(r-i)} \right]_{\gamma} + \int_{\gamma} \frac{-2}{(r+i)^3} \frac{-1}{(r-i)} dr \right\} = \frac{1}{4i}$$

Podobně  $\boxed{\forall n \geq -2}$ :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(r+i)^2} \frac{1}{(r-i)^{n+3}} dr = \dots = \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+3)}{(n+2)(n+1) \dots 1} \int_{\gamma} \frac{1}{(r+i)^{n+4}} \frac{1}{(r-i)} dr = \frac{n+3}{2^{n+4}} i^n$$

**Sčítací trik:**

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{(z-i+2i)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{(2i)^2 \left(\frac{z-1}{2i} + 1\right)^2} \quad \downarrow \left[ \frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n \right] \downarrow$$

$$f(z) = \frac{-1}{4(z-i)^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^n} \right)^2 = -\frac{1}{4} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2i}\right)^n (z-i)^{n-1} \right)^2$$

$$f(z) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^{m-1} \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^{n-m} (z-i)^{n-m-1}$$

$$f(z) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3) \frac{i^n}{2^{n+4}} (z-i)^n$$



## 2.5 RESIDUOVÁ VĚTA

### 3 typy singularit

- Odstranitelná singularita
- Pól
- Podstatná singularita

Rozlišení z hlediska limity, kde  $z_0$  je bodem singularity:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \begin{cases} \exists \text{ vlastní } (\in \mathbb{C}) & \Leftrightarrow f \text{ má v } z_0 \text{ odstranitelnou singularitu} \\ \exists \text{ nevlastní } (= \infty) & \Leftrightarrow f \text{ má v } z_0 \text{ pól (libovolné násobnosti)} \\ \text{neexistuje} & \Leftrightarrow f \text{ má v } z_0 \text{ podstatnou singularitu} \end{cases}$$

#### Odstranitelná singularita

- ▶ Hlavní část LŘ je nulová ( $\forall n \leq -1 : c_n = 0$ )
- ▶  $f$  je možné v bodě  $z_0$  dodefinovat holomorfně
- ▶ Např.:  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2-1}{z-1} = 2$  v bodě  $z_0 = 1$

#### Pól

- ▶ Pól násobnosti  $n$  ( $\forall n < -n : c_n = 0$ )
- ▶  $L\check{R} = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$
- ▶ Např.:  $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$  v bodě  $z_0 = 2$  má pól násobnosti 2

#### Podstatná singularita

- ▶ Má nekonečně mnoho nenulových členů v hlavní části LŘ
- ▶ Např.  $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \Rightarrow$  má podstatnou singularitu v 0

#### Pojmy:

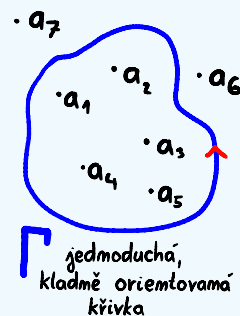
- $k$ -násobný kořen  $z_0$  je  $k$ -násobný kořen  $f$ ,  
je-li  $f^{(n)}(z_0) = 0$  pro  $n = 0, 1, \dots, k-1$  a  $f^{(k)} \neq 0$   
 $\Leftrightarrow \exists g$  holomorfní v  $z_0, g(z_0) \neq 0$  tak, že  $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$  v okolí  $z_0$
- $k$ -násobný pól  $f$  má v  $z_0$   $k$ -násobný pól,  
 $\Leftrightarrow \exists h$  holomorfní v  $z_0, h(z_0) \neq 0$  tak, že  $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}$  na prst. okolí  $z_0$   
 $\Rightarrow$  LŘ  $f$  začíná výrazem  $\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$

**Residuová věta, konečná varianta**

Nechť  $\Gamma$  je kladně orientovaná po částech  $C^1$  křivka,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \text{Int}\Gamma$ .

$f$  holomorfní na  $\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  a spojitá na  $\overline{\Gamma} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$

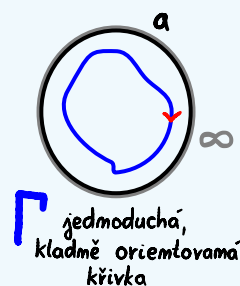
Pak 
$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{a_j} f \quad (\star)$$



**Residuová věta pro  $\infty$**

Nechť  $f$  holomorfní na  $\text{Ext}\Gamma$  a spojitá na  $\overline{\text{Ext}\Gamma}$

Pak 
$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{\infty} f \quad (\otimes)$$



Poznámka:

Chceme vždy mít singularitu po levé ruce při oběhu. Proto se zdánlivě otočí směr obíhání pro residuum v  $\infty$  a jako důsledek nám vypadne mínus.

**O součtu residuí**

Zkombinováním konečného případu a residua v  $\infty$  dostaneme: 
$$\text{Res}_{\infty} f + \sum_a \text{Res}_a f = 0$$

Dodatky k výpočtu residua v  $\infty$ :

**Dodatek 1:** Jest-li  $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$  pro  $|z| \geq R$ , pak  $\text{Res}_{\infty} f = 0$

**Dodatek 2:** Má-li  $f$  v  $\infty$  pól násobnosti nejvýše  $k$ , pak  $\text{Res}_{\infty} f = \lim_{z \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!} (z^{k+2} f^{(k+1)}(z))$

Poznámka:

Exponent v kulaté závorce, např.  $f^{(k+1)}$  označuje stupeň derivace (zde  $k+1$ )

**Vzorečky: Pravidla pro výpočet residuí (v bodě  $a$ )**

(Pravidla)

**0**  $\text{Res}_a f = c_{-1}$  ( $\leftarrow$  koeficient Laurentovy řady)

**1**  $f$  má v  $a$  odstranitelnou singularitu  $\Rightarrow \text{Res}_a f = 0$

**2**  $f$  má v  $a$  pól násobnosti (nejvýše)  $n \in \mathbb{N}$   $\Rightarrow \text{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} (f(z)(z-a)^n)^{(n-1)}$

**3** speciálně:  $f$  má v  $a$  pól násobnosti 1  $\Rightarrow \text{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$

**4** speciálně:  $f$  a  $g$  jsou holomorfní na okolí  $a$ ,  $g(a) = 0$ ;  $g'(a) \neq 0$   $\Rightarrow \text{Res}_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$

**5** speciálně:  $f$  holomorfní na okolí  $a$ ,  $g$  má v  $a$  pól násobnosti 1  $\Rightarrow \text{Res}_a(fg) = f(a) \text{Res}_a(g)$

## Jordanovo lemma a LOOPN1 - verze pro residua

### Jordanovo lemma (reformulace pro výpočet residua)

Nechť pro nějaké  $R \geq 0$  je  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \geq 0\} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq R\}$  a necht  $f$  je spojitá na  $\Omega$ .

Označíme  $\Gamma_R$  křivku  $z = R e^{it}$ ;  $t \in [0, \pi]$  a  $\max_{(\Gamma_R)} |s|$ .

Pokud nastane jedem  $z$  případů:

a)  $\alpha = 0 \quad \wedge \quad RM_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

b)  $\alpha > 0 \quad \wedge \quad M_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

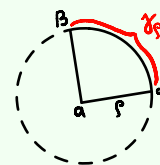
Potom:  $\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

### Lemma o obcházení pólů násobnosti 1 (LOOPN1) (pro výpočet residua)

Nechť  $f$  má v bodě  $a$  pól násobnosti 1.

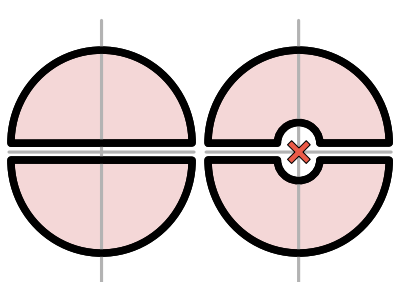
$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi; \quad 0 < \rho < r;$$

$$\gamma_\rho = a + \rho e^{it}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

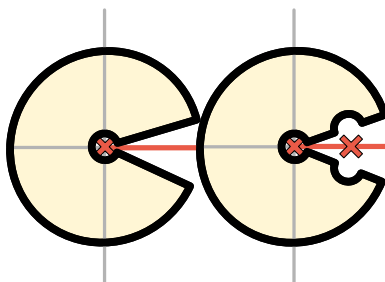


Potom :  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} f = (\beta - \alpha)i \cdot \text{Res}_a f$

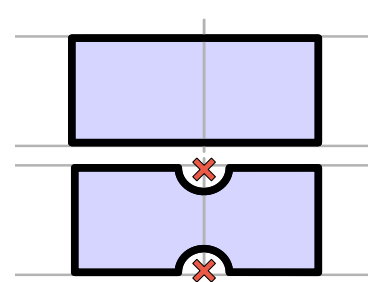
## Příklady základních integračních kontur



půlkružnice



„pacman”



„žiletka”

## Typy integrálů

Při výpočtu residuí rozdělujeme integrály do následujících typů dle způsobu řešení a použitých integračních kontur, podrobněji viz následující kapitola [2.5.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY \(RESIDUOVKA\)](#):

A) Přímý výpočet

B) Integrály typu  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

C) Integrály typu  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$  a  $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dx$  alias „sin a cos”

D) Integrály typu  $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx$  a  $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx$  alias „pacman a čínka”

E) Integrály typu  $\int_0^{\infty} f(x) \log(x) dx$  alias „logaritmus”

F) Integrály obsahující exponenciálu alias „žiletka”

## 2.5.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY (RESIDUOVKA)

### A) Přímý výpočet

#### Příklad

**Zadání:** Vypočítejte následující integrál:  $\int_{\varphi} \frac{dz}{z^4 + 1}$ ,  
kde  $\varphi : x^2 + y^2 = 2x$  je kladně orientovaná křivka

#### ✓ Řešení:

- Vyjádříme si křivku  $\varphi$  ve známém tvaru

$$\begin{aligned}\varphi : \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\ \varphi : \quad (x - 1)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

- Nalezneme singularity funkce  $f(z)$

singularity funkce  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} \Rightarrow$  hledáme kořeny polynomu  $z^4 + 1 \Rightarrow \sqrt[4]{-1} = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

- Pro nalezení singularit potřebujeme nalézt kořeny komplexní odmocniny

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-1}$$

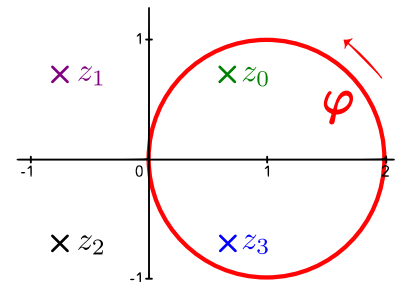
1. krok: Zjistit úhel cílového čísla, zde  $-1 \rightarrow \varphi = \pi$

2. krok: Převést do exponenciálního tvaru:  $\sqrt[4]{|z|} e^{i\frac{\varphi}{4}} = \sqrt[4]{z \cdot \bar{z}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. krok: Hledání kořenů ve tvaru:  $e^{i(\frac{\varphi}{4} + \frac{2\pi k}{4})}$

$$k = 0, 1, 2, 3 : \quad z_{0,1,2,3} = \left\{ e^{i\frac{1}{4}\pi i}; e^{i\frac{3}{4}\pi i}; e^{i\frac{5}{4}\pi i}; e^{i\frac{7}{4}\pi i} \right\}$$

Singularity fce  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} \dots \sqrt[4]{-1} = \left\{ e^{i\frac{1}{4}\pi i}; e^{i\frac{3}{4}\pi i}; e^{i\frac{5}{4}\pi i}; e^{i\frac{7}{4}\pi i} \right\}$   
 $\rightarrow$  jen 2 leží v kružnici  $\varphi$



$$\Rightarrow \int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \left[ \text{Res}(f, e^{-i\frac{1}{4}\pi i}) + \text{Res}(f, e^{i\frac{1}{4}\pi i}) \right]$$

$$\text{Res}\left(f, e^{-i\frac{1}{4}\pi i}\right) = \lim_{z \rightarrow e^{-i\frac{1}{4}\pi i}} \left( \frac{z - e^{-i\frac{1}{4}\pi i}}{z^4 + 1} \right) = \lim_{z \rightarrow e^{-i\frac{1}{4}\pi i}} \frac{z - e^{-i\frac{1}{4}\pi i}}{\underbrace{(1 + iz^2)}_{\rightarrow 2} (1 - iz^2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{l} z \rightarrow e^{-i\frac{1}{4}\pi i} \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] z = t + e^{-i\frac{1}{4}\pi i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - i(t + e^{-i\frac{1}{4}\pi i})^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - it^2 - 2it e^{-i\frac{1}{4}\pi i} - i e^{-i\frac{1}{2}\pi i}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{-i(t + 2e^{-i\frac{1}{4}\pi i})} = \boxed{\frac{i}{4} e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

$$\text{Res}\left(f, e^{i\frac{1}{4}\pi i}\right) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{1}{4}\pi i}} \left( \frac{z - e^{i\frac{1}{4}\pi i}}{z^4 + 1} \right) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{1}{4}\pi i}} \frac{z - e^{i\frac{1}{4}\pi i}}{\underbrace{(1 + iz^2)}_{\rightarrow 2} (1 - iz^2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{l} z \rightarrow e^{i\frac{1}{4}\pi i} \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] z = t + e^{i\frac{1}{4}\pi i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 + i(t + e^{i\frac{1}{4}\pi i})^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 + it^2 + 2it e^{i\frac{1}{4}\pi i} + i e^{i\frac{1}{2}\pi i}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i(t + 2e^{i\frac{1}{4}\pi i})} = \boxed{-\frac{i}{4} e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

**Celkem:**  $\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \left[ \frac{i}{4} e^{\frac{\pi}{4}i} - \frac{i}{4} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right] = \frac{\pi}{2} \left( -i\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$

(Další příklady výpočtu komplexní odmocniny v sekci [2.7 POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY](#))

### Příklad

**Zadání:** Vypočítejte následující integrál:  $I := \int_{C_2(0)} \frac{1}{1+z^2} dz$

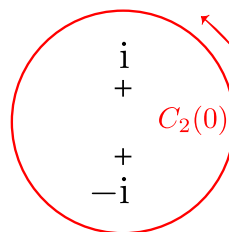
### ✓ Řešení:

Použijeme (Residuovou větu) v kombinaci s (Pravidly pro výpočet residuí).

- funkce  $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$  je holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$
- v bodech  $-i$  a  $i$  má jednoduché póly
- oba body  $-i$  a  $i$  se vyskytnou ve vnitřku křivky  $C_2(0)$ , proto se oba budou podílet na hodnotě integrálu  $I$

Výpočet křivkového integrálu z funkce  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  přes kružnici  $C_2(0)$ .

Obě izolované singularity se nalézají uvnitř kruhu, proto se obě podílí na hodnotě integrálu.



Podle (4. pravidla pro výpočet residuí):

$$\operatorname{Res}_{-i} \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1+z^2)'|_{z=-i}} = \frac{1}{2z|_{z=-i}} = \frac{1}{-2i} = -\frac{1}{2i}$$

$$\operatorname{Res}_i \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1+z^2)'|_{z=i}} = \frac{1}{2z|_{z=i}} = \frac{1}{2i}$$

Proto (Residuová věta) dává

$$I = 2\pi i \left( \operatorname{Res}_{-i} \frac{1}{1+z^2} + \operatorname{Res}_i \frac{1}{1+z^2} \right) = 2\pi i \left( -\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} \right) = 0$$

### Poznámka:

$C_2(0)$  znamená kružnici o poloměru 2 a středu v bodě 0

### Poznámka 2:

Postupovat jsme také mohli přes (Residuovou větu pro reziduum v nekonečnu) kombinovanou společně s **Dodatek 2** (platí  $\operatorname{Res}_\infty \frac{1}{1+z^2} = 0$ ).

Takový přístup by byl obzvláště výhodný při počítání integrálu:

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{1+z^n} dz \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \text{ pokud by } n \text{ bylo velmi velké číslo}$$

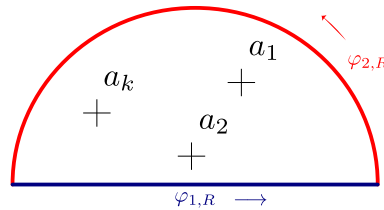
## B) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Předpokládejme, že funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je **spojitá na reálné ose** a je ji možné **rozšířit na komplexní funkci**  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , která je holomorfní na množině  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$  (příčemž všechny body  $a_1, \dots, a_k$  leží v horní polorovině). Budeme zde kombinovat (**Residuovou větu**) a (**Jordanovo lemma**)

Definujme křivky

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, R], \\ \varphi_{2,R}(t) &= Re^{it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$\text{a} \quad \varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$$



**Obrázek:** Výpočet reálného integrálu přes interval  $(-\infty, \infty)$  pomocí integrace přes horní půlkruh.

Jsou-li nyní splněny předpoklady (**Jordanova lemmatu**), dostáváme pro všechna  $R > \max\{|a_1|, \dots, |a_k|\}$

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{a_j} f = \int_{\varphi_R} f(z) dz = \int_{\varphi_{1,R}} f(z) dz + \int_{\varphi_{2,R}} f(z) dz \quad \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} (\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + 0$$

### Příklad

**Zadání:** Vypočítejte následující integrál:  $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$

### Řešení:

- funkce  $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$  je holomorfní všude na  $\mathbb{C}$  až na šest bodů  $e^{i(\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{3})}$ , kde  $j \in \{0, 1, \dots, 5\}$
- ve zmíněných šesti bodech má **jednoduché póly**
- z těchto bodů leží v horní polorovině **první tři**

V (**Jordanově lemmatu**) máme  $\alpha = 0$ . Proto potřebujeme odhadnout

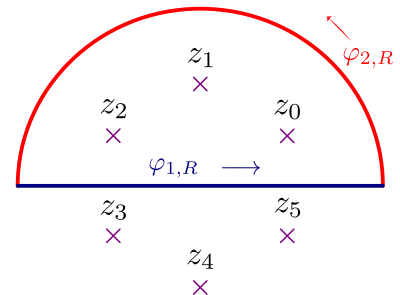
$$RM_R = R \max_{\langle \varphi_{2,R} \rangle} |f| \leq R \frac{1}{R^6 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

$\Rightarrow$  můžeme použít výše uvedený postup

- Potřebujeme však ještě spočítat rezidua odpovídající trojici bodů  $e^{i(\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{3})}$ , kde  $j \in \{0, 1, 2\}$ . Ve všech případech použijeme (**4. pravidla pro výpočet residuí**) opírající se o vzorec  $\frac{1}{(1+z^6)'} = \frac{1}{6z^5}$

Proto máme:

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{e^{i\frac{\pi}{6}}} f + \text{Res}_{e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})}} f + \text{Res}_{e^{i(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3})}} f \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{e^{i5\frac{\pi}{6}}} + \frac{1}{e^{i5(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})}} + \frac{1}{e^{i5(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3})}} = \frac{1}{6} e^{-i\frac{5}{6}\pi} + e^{-i\frac{15}{6}\pi} + e^{-i\frac{25}{6}\pi} \\ &= \frac{1}{6} e^{-i\frac{5}{6}\pi} + e^{-i\frac{1}{2}\pi} + e^{-i\frac{1}{6}\pi} \\ &= \frac{1}{6} \cos \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = -\frac{i}{3} \end{aligned}$$



Celkově dostáváme

$$I = 2\pi \text{Res}_{e^{i\frac{\pi}{6}}} f + \text{Res}_{e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})}} f + \text{Res}_{e^{i(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3})}} f = 2\pi i - \frac{i}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

### Příklad

**Zadání:** Vypočítejte následující integrál:  $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$

### Řešení:

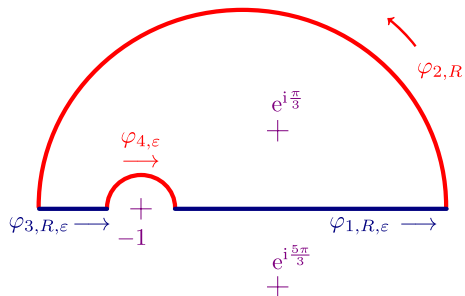
Uvedený integrál **neexistuje** jako Lebesgueův. **Existuje** však jako integrál ve smyslu hlavní hodnoty (p.v.)

- funkce  $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$  je holomorfní všude na  $\mathbb{C}$  až na tři body  $e^{i(\frac{\pi}{3}+j\frac{2\pi}{3})}$ , kde  $j \in \{0, 1, 2\}$
- ve zmíněných třech bodech má **jednoduché póly**
- $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$  leží v **horní polorovině**,  
 $z_1 = e^{i\pi} = -1$  leží **na reálné ose**,  
 $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$  leží **ve spodní polorovině**
- aplikujeme postup z předchozího příkladu, nicméně musíme obéhnout singularitu na reálné ose (bod  $-1$ )

Zafixujeme  $R > 1, \varepsilon \in (0, 1)$  a definujeme křivky:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-1 + \varepsilon, R] \\ \varphi_{2,R}(t) &= Re^{it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \\ \varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, -1 - \varepsilon] \\ \varphi_{4,\varepsilon}(t) &= -1 + \varepsilon e^{i(\pi-t)} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$a \quad \varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon}$$



**Obrázek:** Leží-li na reálné ose bod se singularitou, můžeme si vypomoci malou půlkružnicí.

Z (Residuové věty) máme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_{R,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{1}{1+z^3} = 2\pi i \frac{1}{(1+z^3)'|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}}} = 2\pi i \frac{1}{3z^2|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}}} = \\ &= 2\pi i \frac{1}{3} e^{-i\frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{3}\pi i \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi i - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - i \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Nyní se budeme věnovat integraci přes jednotlivé křivky tvořící křivku  $\varphi_{R,\varepsilon}$ . Nejprve si povšimněme, že podle Tvzení o obíhání části kružnice (LOOPN1) máme:

$$\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\pi \operatorname{Res}_{-1} \frac{1}{1+z^3} = -\pi i \frac{1}{(1+z^3)'|_{z=-1}} = \frac{-\pi i}{3(-1)^2} = -i \frac{\pi}{3}.$$

Dále (Jordanova lemmatu) (používáme  $\max_{(\varphi_{2,R,\varepsilon})} |f| \leq \frac{1}{R^3-1}$ ) platí  $\int_{\varphi_{2,R}} \frac{1}{1+z^3} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

Nyní si povšimněme, že pro všechna  $\xi > 0$  existují  $R > 1$  tak velké a  $\varepsilon \in (0, 1)$  tak malé, že

$$\left| \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx - \int_{\varphi_{1,R,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3} dz - \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3} dz \right| < \xi$$

Celkově jsme proto dostali:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - i \frac{\pi}{3} - -i \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

*Poznámka:* Přístup, který jsme si zde ukázali, je často možné s menšími či většími modifikacemi používat i při integraci přes interval  $(0, \infty)$ . Asi nejsnazší je situace, když je funkce sudá. Tehdy můžeme psát

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

### C) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$ alias „sin a cos”

Pro tento typ integrálů najdeme uplatnění při počítání **Fourierovy transformace**, ale i při čistě reálné integraci, neboť  $\cos(\alpha x) = \operatorname{Re} e^{i\alpha x}$  a  $\sin(\alpha x) = \operatorname{Im} e^{i\alpha x}$ .

kde předpokládáme:  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P, Q$  jsou polynomy, polynom  $Q$  **není** identicky nulový a  $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$

Poznámka: U polynomu  $Q$  můžeme mít kořeny prvního stupně, při jejich přítomnosti si můžeme vypomoci malými obloučky a integrál chápat jako *integrál ve smyslu hlavní hodnoty*.

Základní schéma řešení si ukažme na jednoduchém případě, kdy polynom  $Q$  nemá reálné kořeny.

$$\text{Položme } f(z) := e^{i\alpha z} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Je-li  $\alpha > 0$ , volíme křivky:

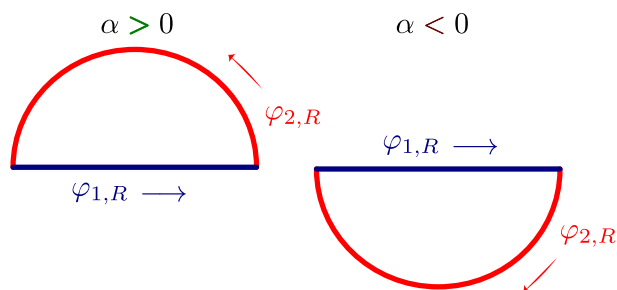
$$\begin{aligned} \varphi_{1,R}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, R] \\ \varphi_{2,R}(t) &= R e^{it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

a pak zavádíme  $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$ .

Pro  $\alpha < 0$  volíme:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, R] \\ \varphi_{2,R}(t) &= R e^{-it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

a pak opět položíme  $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$ .



**Obrázek:** Volba křivky v závislosti na  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pozor, pro  $\alpha < 0$  se jedná o obíhání v záporném smyslu.

Pak:

$$\int_{\varphi_{1,R}} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$$

Poznámka:

- Pokud  $\operatorname{st} P \leq \operatorname{st} Q - 2$ , vychází nám Lebesgueův integrál
- Pokud  $\operatorname{st} P = \operatorname{st} Q - 1$ , integrál konverguje jen jako Newtonův (ne Lebesgueův) prostřednictvím Dirichletova kritéria

Z ([Jordanova lemmatu](#)) dále plyne

$$\int_{\varphi_{2,R}} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Jsou-li body  $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$  všechny kořeny polynomu  $Q$ , celkově jsme dostali (pozor na směr obíhání v případě  $\alpha < 0$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\{j \in \{1, \dots, k\} : \operatorname{Im} a_j > 0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f & \text{pro } \alpha > 0 \\ -2\pi i \sum_{\{j \in \{1, \dots, k\} : \operatorname{Im} a_j < 0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases}$$

Modifikaci postupu a výsledku pro případ, že  $Q$  má i reálné kořeny, si ukážeme později.



### Příklad

**Zadání:** Necht'  $a, b > 0$ . Spočítejme Newtonův (či zobecněný Lebesgueův) integrál:

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx.$$

### ✓ Řešení:

Nejprve si povšimněme, že nám zde skutečně může pomoci právě probíraná metoda, neboť

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + b^2} dx$$

- Zavedme komplexní funkci komplexní proměnné:  $f(z) = \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}$
- $f(z)$  je holomorfní na množině  $\mathbb{C} \setminus \{-ib, ib\}$  a ve zmíněných dvou bodech má jednoduché póly.
- Protože  $a > 0$ , dostáváme

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} 2\pi i \operatorname{Res}_{ib} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} 2\pi i \frac{z e^{iaz}}{(z^2 + b^2)'} \Big|_{z=ib} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} 2\pi i \frac{z e^{iaz}}{2z} \Big|_{z=ib} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \pi i e^{-ab} = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$$

### Příklad

**Zadání:** Necht'  $a, b > 0$ . Spočítejme integrál ve smyslu hlavní hodnoty

$$I := \text{p.v.} \int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - b^2} dx.$$

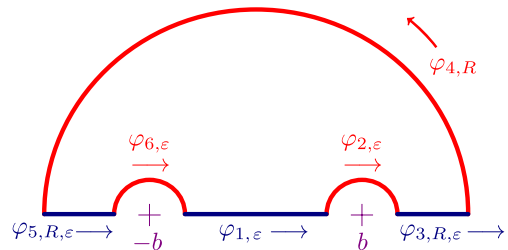
### ✓ Řešení:

Vidíme, že nyní má integrand **póly na reálné ose**  $\rightarrow \{-b, b\}$ , které musíme vyjmout.

- Opět přepíšeme  $I = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - b^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 - b^2} dx$ .
- Nyní zafixujme  $\varepsilon \in (0, b)$  a  $R > 2b$ .
- Položme  $f(z) = \frac{z e^{ia} z}{z^2 - b^2}$  a volme následující křivky:

$\varphi_{1,\varepsilon}(t) = t + i0$	pro $t \in [-b + \varepsilon, b - \varepsilon]$
$\varphi_{2,\varepsilon}(t) = b + \varepsilon e^{i(\pi-t)}$	pro $t \in [0, \pi]$
$\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) = t + i0$	pro $t \in [b + \varepsilon, R]$
$\varphi_{4,R}(t) = R e^{it}$	pro $t \in [0, \pi]$
$\varphi_{5,R,\varepsilon}(t) = t + i0$	pro $t \in [-R, -b - \varepsilon]$
$\varphi_{6,\varepsilon}(t) = -b + \varepsilon e^{i(\pi-t)}$	pro $t \in [0, \pi]$

a  $\varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,\varepsilon} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,R} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{6,\varepsilon}$



**Obrázek:** Leží-li na reálné ose bod se singularitou, můžeme si vypomoci malou půlkružnicí.

Pro část integrálu na reálné ose (modré křivky) platí:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_{5,R,\varepsilon}} f(z) dz + \int_{\varphi_{1,\varepsilon}} f(z) dz + \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} f(z) dz = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 - b^2} dx.$$

Všechny integrály jsou konečné, tedy přehozením pořadí limit se výsledek nezmění.

Dle Tvzení o obíhání části kružnice (LOOPN1) máme:

$$\int_{\varphi_{6,\varepsilon}} f(z) dz + \int_{\varphi_{2,\varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\pi i (\text{Res}_{-b} f + \text{Res}_b f).$$

Navíc (Jordanovo lemma) dává:  $\int_{\varphi_{4,R}} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

a díky holomorfnosti funkce  $f$  na Int  $\varphi_{R,\varepsilon}$  ještě máme  $\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Celkově jsme dostali: } I &= \frac{1}{2} \text{Im } \pi i (\text{Res}_{-b} f + \text{Res}_b f) = \frac{1}{2} \text{Im } \pi i \left. \frac{z e^{iaz}}{(z^2 - b^2)'} \right|_{z=-b} + \left. \frac{z e^{iaz}}{(z^2 - b^2)'} \right|_{z=b} \\ &= \frac{1}{2} \text{Im } \pi i \frac{e^{-iab} + e^{iab}}{2} = \frac{1}{2} \text{Im } \pi i \cos(ab) = \boxed{\frac{\pi}{2} \cos(ab)} \end{aligned}$$

## C) Integrály typu $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dx$ alias „sin a cos” vol.2

### Příklad

**Zadání:** Necht  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| \neq 1$ . Spočítejme integrál pro pevně zvolené  $a = 2$ :

$$I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos(t) + a^2}$$

Poznámka: Ve skriptech Milana Pokorného je tento příklad (20.9.22) vyřešen pro obecné  $a \in \mathbb{C}$ .

### ✓ Řešení:

$$\begin{aligned} \text{Pro } a = 2: \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 4 \cos(t) + 4} &= \left[ \text{Z definice cosinu:} \right] \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 2(e^{it} + e^{-it})} = \\ &= \left[ \text{Reparametrisace:} \right] \int_{C_1(0)} \frac{1}{5 - 2(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = \int_{C_1(0)} \frac{i dz}{2z^2 - 5z + 2} \end{aligned}$$

- Vietovými vztahy nebo skrze diskriminant zjistíme kořeny jmenovatele:  $\left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$
- Zajímá nás pouze residuum v  $\frac{1}{2}$ , neb bod 2 jest mimo  $C_1(0)$
- Jednonásobný kořen  $\Rightarrow$  můžeme využít (4. pravidla pro výpočet residuí)

$$2\pi i \text{Res}_{\frac{1}{2}} \frac{i}{2z^2 - 5z + 2} = 2\pi i \left. \frac{i}{(2z^2 - 5z + 2)'} \right|_{z=\frac{1}{2}} = 2\pi i \left. \frac{i}{4z - 5} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{-2\pi}{-3} = \boxed{\frac{2}{3}\pi = I(2)}$$

## D) Integrály typu $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx$ alias „pacman”

Budeme předpokládat, že  $\alpha \in (0, 1)$  a funkci  $f$  můžeme **holomorfně prodloužit na  $\mathbb{C}$**  s výjimkou konečně mnoha bodů  $a_1, \dots, a_k$ , z nichž žádný neleží na kladné reálné poloose ani v počátku. Navíc předpokládejme, že

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|}$$

na jistém prstencovém okolí nekonečna. Zřejmě pak uvažovaný integrál existuje jako Lebesgueův i Newtonův.

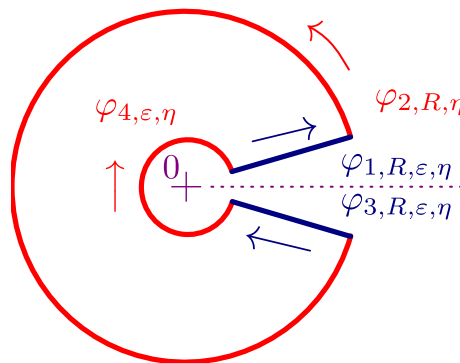
Kromě komplexního rozšíření fce  $f$ , potřebujeme **holomorfně rozšířit** i fci  $x^{\alpha-1}$ . Připomeňme, že obecná mocnina je zavedena prostřednictvím logaritmu, u něhož můžeme volit z většího počtu větví. Zde volbu podřídíme volbě integrační dráhy, kterou zvolme nejdříve.

Zafixujme velmi malé číslo  $\varepsilon \in (0, 1)$ , velmi velké číslo  $R > 1$  a velmi malé číslo  $\eta \in (0, \pi)$ .

Definujme křivky:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}(t) &= te^{i\eta} && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\ \varphi_{2,R,\eta}(t) &= Re^{it} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\ \varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}(t) &= (R-t)e^{-i\eta} && \text{pro } t \in [0, R-\varepsilon] \\ \varphi_{4,\varepsilon,\eta}(t) &= \varepsilon e^{i(2\pi-t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \eta] \end{aligned}$$

$$\text{a } \varphi_{R,\varepsilon,\eta} := \varphi_{1,R,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{2,R,\eta} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{4,\varepsilon,\eta}$$



**Obrázek:** Využíváme křivku mající kladnou reálnou poloosu (nespojitosť našeho logaritmu) ve svém vnějšku

Větev logaritmu nyní zvolíme tak, aby byla holomorfní na vnitřku zvolené křivky. **Volíme proto logaritmus** s argumentem probíhajícím interval  $(0, 2\pi)$ . Tato volba se projeví jak při vyhodnocování dílčích integrálů, tak při počítání reziduí.

Zabývejme se nyní **integrály přes jednotlivé křivky**. (**Residuová věta**) nám dává pro všechna  $\varepsilon, \eta$  dostatečně malá a  $R$  dostatečně velká:

$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{a_j} z^{\alpha-1} f(z)$$

Dále si povšimněme, že pro  $R$  dostatečně velké díky **růstové podmínce** pro funkci  $f$  (natvrdo odhadnu velikost (není třeba Jordan)) platí na  $\langle \varphi_2, R, \eta \rangle$

$$\begin{aligned} |z^{\alpha-1} f(z)| &= |f(z)| \left| e^{(\alpha-1)\text{Log } z} \right| = \left[ \begin{array}{l} \text{první Log } \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{a ostatní log } \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right] = |f(z)| \left| e^{(\alpha-1)(\log |z| + i \arg z)} \right| = \\ &= |f(z)| \left| e^{(\alpha-1)\log |z|} \right| \left| e^{(\alpha-1)i \arg z} \right| = |f(z)| \left| e^{(\alpha-1)\log |z|} \right| = |f(z)| |z|^{\alpha-1} \leq C |z|^{\alpha-2}, \end{aligned}$$

a proto máme zajištěno **chování v nekonečnu**:  $\left| \int_{\varphi_{2,R,\eta}} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| \leq C |z|^{\alpha-2} \ell_{\varphi_{2,R,\eta}} \leq C |z|^{\alpha-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ .

Protože  $f$  je **holomorfní v počátku**, je na jeho okolí **omezená**. Odtud (obecnou mocninu opět odhadujeme jako výše, tedy  $|z^\alpha - 1| \leq |z|^{\alpha-1}$ )

$$\left| \int_{\varphi_{4,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| \leq C |z|^{\alpha-1} \ell_{\varphi_{4,\varepsilon,\eta}} \leq C |z|^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

přičemž limita je stejnoměrná vůči  $\eta \in (0, 1)$ . Nyní si uvědomme, že ke každému libovolně malému  $\xi \in (0, 1)$  existují  $R_0 > 0, \varepsilon_0 \in (0, 1)$  a  $\eta_0 \in (0, 1)$  taková, že

$$\left| \int_{\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z) dz - \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx \right| < \xi \quad \text{pro všechna } R > R_0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \text{ a } \eta \in (0, \eta_0).$$

Při práci s integrálem přes křivku  $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$  pracujeme podobně. Dojde však ke dvěma změnám. Jednak se **změní znaménko** (díky obrácenému smyslu obíhání). Dále je ve výrazu

$$z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log z} = e^{(\alpha-1)(\log|z|+i\arg z)} = |z|^{\alpha-1}e^{i(\alpha-1)\arg z}$$

pro  $\eta$  blízko nule argument logaritmu blízko k hodnotě  $2\pi$ . To se nakonec projeví multiplikativní konstantou  $e^{i(\alpha-1)2\pi} = e^{i2\pi\alpha}$ . A tato **multiplikativní konstanta** zabrání odečtení integrálů přes  $\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}$  a  $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$

Celkově jsme dostali

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} z^{\alpha-1} f(z)$$

### Příklad

**Zadání:** Za pomoci právě představené metody a částečných výsledků spočítejme

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta+x} dx \quad \text{kde } \alpha \in (0, 1) \text{ a } \beta > 0.$$

✓ **Řešení:**

- Funkce  $f(z) = \frac{1}{\beta+z}$  má všechny požadované vlastnosti
- Při výpočtu reziduí používáme výše zavedenou **větev logaritmu** (resp. obecnou mocninu) s argumentem z intervalu  $(0, 2\pi)$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta+x} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \operatorname{Res}_{-\beta} \frac{z^{\alpha-1}}{z+\beta} = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} (-\beta)^{\alpha-1} = \frac{2\pi i \beta^{\alpha-1} e^{\pi i(\alpha-1)}}{1 - e^{i2\pi\alpha}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta+x} dx = \pi \beta^{\alpha-1} \frac{2i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi \beta^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)}$$

### D) Integrály typu $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x) dx$ alias „čínka“

Tento typ integrálů se dá řešit dvěma způsoby:

1) Substitucí a převedením na případ „pacmana“  $\rightarrow \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx$

2) Řešením přímo a zavedením integrační kontury tzv. „čínky“, což je následující postup:

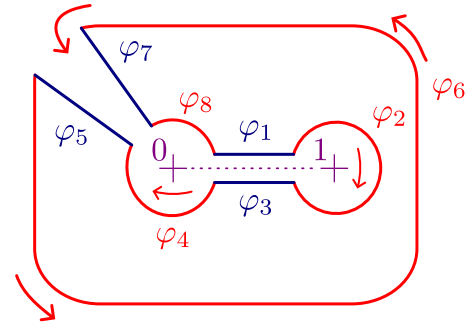
Budeme předpokládat, že  $\alpha \in (0, 1)$  a funkci  $f$  můžeme **holomorfně prodloužit** na  $\mathbb{C}$  s výjimkou konečně mnoha bodů  $a_1, \dots, a_k$ , z nichž žádný neleží na úsečce  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, 1], \operatorname{Im} z = 0\}$ . Navíc předpokládejme, že funkce  $f$  má **odstranitelnou singularitu v nekonečnu**.

Kromě toho, že jsme do komplexní roviny rozšířili funkci  $f$ , potřebujeme **holomorfně rozšířit** také funkci  $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$ . O to se nám opět postará **vhodně zvolená větev logaritmu**. Tentokrát bude mít rozšířená funkce  $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$  skok na úsečce  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (0, 1), \operatorname{Im} z = 0\}$ .

Řešení zahájíme **volbou integrační dráhy**. Zafixujme velmi malé číslo  $\varepsilon \in (0, 1)$ , velmi velké číslo  $R > 1$ , velmi malé číslo  $\eta \in (0, \pi)$  a číslo  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  takové, aby na úsečce  $\{te^{i\theta} : t \geq 0\}$  neležela žádná singularita (takový paprsek jistě najdeme, neboť bodů se singularitou je jen konečný počet).

Definujme křivky:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{1,\varepsilon,\eta}(t) &= t + i\varepsilon \sin \eta && \text{pro } t \in [\varepsilon \cos \eta, 1 - \varepsilon \cos \eta] \\
 \varphi_{2,\varepsilon,\eta}(t) &= 1 + \varepsilon e^{i(\pi-t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\
 \varphi_{3,\varepsilon,\eta}(t) &= 1 - t - i\varepsilon \sin \eta && \text{pro } t \in [\varepsilon \cos \eta, 1 - \varepsilon \cos \eta] \\
 \varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= \varepsilon e^{i(2\pi-t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \theta - \eta] \\
 \varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= t e^{i(\theta+\eta)} && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\
 \varphi_{6,R,\eta;\theta}(t) &= R e^{i(t+\theta)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\
 \varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= (R - t) e^{i(\theta-\eta)} && \text{pro } t \in [0, R - \varepsilon] \\
 \varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= \varepsilon e^{i(2\pi-t)} && \text{pro } t \in [2\pi - \theta + \eta, 2\pi - \eta]
 \end{aligned}$$



$$a \quad \varphi_{R,\varepsilon,\eta;\theta} := \varphi_{1,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{2,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{3,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{6,R,\eta;\theta} \oplus \varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}$$

Zkusme zavést **rozšíření** fce  $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$  na **holomorfní** funkci. Začneme přepisem do vhodnějšího tvaru:

$$\underbrace{x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}_{\text{Nepracujeme s jednotlivými funkcemi odděleně}} = \frac{1}{x} \underbrace{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}}_{\text{pracujeme s nimi dohromady}}$$

Nyní funkci  $x \mapsto \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}$  **rozšíříme** na  $z \mapsto \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$  prostřednictvím volby vhodné větve **komplexního logaritmu**.

Zobrazení:  $z \mapsto \frac{z}{1-z} = -1 + \frac{1}{1-z}$  je dobře definované na  $\mathbb{C}^*$ , je prosté

$$\text{a množinu } \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, 1], \operatorname{Im} z = 0\} \xrightarrow{\text{zobrazuje na množinu}} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, \infty), \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}$$

Volíme proto logaritmus s argumentem probíhající interval  $(0, 2\pi)$  a dostáváme tak funkci  $\frac{1}{z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$ , která je holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, 1], \operatorname{Im} z = 0\}$ .

- Než vyhodnotíme integrály přes jednotlivé křivky, zkusme prostudovat chování argumentu výrazu  $\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$  při integraci přes křivky  $\varphi_{1,\varepsilon,\eta}$  a  $\varphi_{3,\varepsilon,\eta}$ .

$\varphi_{1,\varepsilon,\eta}$

Jednak pro body tvaru  $t + i\delta$ , kde  $t \in (0, 1)$  a  $\delta > 0$  je velmi malé číslo, máme

$$\frac{t + i\delta}{1 - (t + i\delta)} = \frac{(t + i\delta)(1 - t + i\delta)}{|1 - t - i\delta|^2} = \frac{t - t^2 - \delta^2 + i\delta}{|1 - t - i\delta|^2}$$

Bude-li tedy  $t$  odraženo od čísel 0 a 1, postupné zmenšování čísla  $\delta$  povede k tomu, že argument výrazu  $\frac{t + i\delta}{1 - (t + i\delta)}$  půjde **do nuly**

$$\left(\text{výraz } \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \text{ pak jde stejnoměrně k } \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\right)$$

$\varphi_{3,\varepsilon,\eta}$

Naopak pro body tvaru  $t - i\delta$ , kde  $t \in (0, 1)$  a  $\delta > 0$  je velmi malé číslo, máme

$$\frac{t - i\delta}{1 - (t - i\delta)} = \frac{(t - i\delta)(1 - t - i\delta)}{|1 - t + i\delta|^2} = \frac{t - t^2 - \delta^2 - i\delta}{|1 - t + i\delta|^2}$$

Bude-li tedy  $t$  odraženo od čísel 0 a 1, postupné zmenšování čísla  $\delta$  povede k tomu, že argument výrazu  $\frac{t - i\delta}{1 - (t - i\delta)}$  půjde **do hodnoty  $2\pi$**

$$\left(\text{výraz } \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \text{ pak jde stejnoměrně k } \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} e^{2\pi\alpha i}\right)$$

Nyní již můžeme vyhodnotit integrály přes jednotlivé křivky. Předně, protože bodů  $a_1, \dots, a_k$  je jen konečný počet, jsou-li  $\varepsilon, \eta$  dostatečně malá a  $R$  dostatečně velká,

$$\text{máme: } \int_{\varphi_{R,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)$$

- Dále integrály přes křivky  $\varphi_{2,\varepsilon,\eta}$ ,  $\varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta}$  a  $\varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}$  umíme udělat libovolně malé volbou  $\varepsilon > 0$ .

Např. pro  $\varphi_{2,\varepsilon,\eta}$ : 
$$\left| \int_{\varphi_{2,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) dz \right| \leq \ell_{\varphi_{2,\varepsilon,\eta}} \max_{\langle \varphi_{2,\varepsilon,\eta} \rangle} \left| \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) \right| \leq 2\pi\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}} \right)^\alpha C \leq C\varepsilon$$

Ještě si uvědomme, že tyto odhady jsou **stejně** vůči  $\eta$  a **nezávisí** na  $\theta$ .

- Vyhodnotíme integrál přes  $\varphi_{6,R,\eta;\theta}$ . Ten umíme učinit libovolně blízký hodnotě  $2\pi i e^{i\pi\alpha} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ . Skutečně, pro  $R$  dost velké je  $f(z)$  libovolně (stejně) blízko k  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ ,  $\frac{z}{1-z}$  je libovolně (stejně) blízko k číslu  $-1$ . Kde jsme  $\alpha$ -tou mocninu definovali holomorfně na okolí bodu  $-1$  a platí  $(-1)^\alpha = (e^{i\pi})^\alpha$

Navíc využíváme: 
$$\int_{C_R(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

(ve skutečnosti neintegrujeme přes celou křivku  $C_R(0)$ , ale volbou  $\eta$  velice malého se umíme uvedené hodnotě libovolně přiblížit). Proto jsme dostali (znaku konvergence dáváme význam popsany výše)

$$\int_{\varphi_{6,R,\eta;\theta}} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) dz \rightarrow 2\pi i e^{i\pi\alpha} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z).$$

- Dále integrály přes křivky  $\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}$  a  $\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}$  se s libovolnou přesností vyruší, opět nezávisle na  $\theta$ . To umíme zařídit pro zafixovaná  $R$  a  $\varepsilon$  postupným zmenšováním čísla  $\eta$  díky stejnoměrné spojitosti integrandu.

Tedy 
$$\int_{\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) dz + \int_{\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) dz \rightarrow 0$$

- Připomeňme ještě výsledky získané výše, podle nichž se integrálem přes křivku  $\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}$  umíme libovolně přiblížit zadanému integrálu a integrálem přes křivku  $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$  zase  $-e^{2\pi\alpha i}$ -násobku zadaného integrálu.

Pak 
$$\int_{\varphi_{1,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) dz \rightarrow \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx$$

a 
$$\int_{\varphi_{3,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) dz \rightarrow -e^{2\pi\alpha i} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx.$$

Celkově máme 
$$\boxed{\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha f(z) - e^{i\pi\alpha} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)}$$

### Příklad

Pro každé  $\alpha \in (0, 1)$  máme:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} (-e^{i\pi\alpha}) = \pi \frac{2i}{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

## E) Integrály typu $\int_0^\infty f(x) \log(x) dx$ alias „logaritmus“

Budeme předpokládat:

- Funkce  $f$  je **spojitá a sudá** na  $\mathbb{R}$ .
- Existuje konečný počet bodů  $a_1, \dots, a_k \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  a rozšíření funkce  $f$ , které je spojité na  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$  a holomorfní na  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ .
- A navíc platí růstová podmínka: 
$$\max_{\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0, |z|=R\}} |f(z)| R \log R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

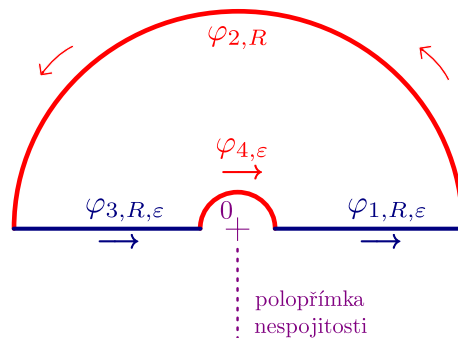
Tentokrát budeme pracovat s funkcí **logaritmus** takovou, že její argument leží v intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  (níže uvidíme, že potřebujeme interval obsahující  $[0, \pi]$ ).

Zdefinujme ještě integrační dráhu. Zafixujme velmi malé číslo  $\varepsilon \in (0, 1)$  a velmi velké číslo  $R > 1$ .

Definujme křivky:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\ \varphi_{2,R}(t) &= Re^{it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \\ \varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t && \text{pro } t \in [-R, -\varepsilon] \\ \varphi_{4,\varepsilon}(t) &= \varepsilon e^{i(\pi-t)} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

a  $\varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon}$



**Obrázek:** Potřebujeme, aby polopřímka nespojitosti ležela v záporné imaginární polorovině

Nyní vyhodnotíme integrály přes jednotlivé křivky. Protože bodů  $a_1, \dots, a_k$  je jen konečný počet, je-li  $\varepsilon$  dostatečně malé a  $R$  dostatečně velké, máme:

$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} f(z) \log z \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{a_j}(f(z) \log z).$$

Dále díky růstové podmínce platí:

$$\left| \int_{\varphi_{2,R}} f(z) \log z \, dz \right| \leq \ell_{\varphi_{2,R}} \max_{\langle \varphi_{2,R,\varepsilon} \rangle} |f(z) \log z| \leq \pi R \max_{\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0, |z|=R\}} |f(z)| \log R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Navíc díky spojitosti funkce  $f$  v počátku máme

$$\left| \int_{\varphi_{4,\varepsilon}} f(z) \log z \, dz \right| \leq \ell_{\varphi_{4,\varepsilon}} \max_{\langle \varphi_{4,\varepsilon} \rangle} |f(z) \log z| \leq \pi \varepsilon C \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Dále dostáváme (zvětšováním  $R$  a zmenšováním  $\varepsilon$  se můžeme libovolně přiblížit integrálům na pravých stranách)

$$\int_{\varphi_{1,R,\varepsilon}} f(z) \log z \, dz \rightarrow \int_0^\infty f(x) \log x \, dx$$

a

$$\int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} f(z) \log z \, dz \rightarrow \int_{-\infty}^0 f(|x|)(\log |x| + i\pi) \, dx.$$

Celkově:

$$\boxed{2 \int_0^\infty f(x) \log x \, dx + i\pi \int_0^\infty f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{a_j}(f(z) \log z)}$$

Poznámka: Povšimněme si, že jsme navíc zjistili, čemu se rovná  $\int_0^\infty f(x) \, dx$

### Příklad

**Zadání:** Spočítejme integrál:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx$$

### ✓ Řešení:

- Na množině  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  má funkce  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$  jedinou singularitu a tou je dvojnásobný pól v bodě  $i$
- Proto pro výpočet rezidua tentokrát použijeme (2. pravidla pro výpočet residuí)

Dostaneme:

$$\text{Res}_i \frac{\log z}{(1+z^2)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\log z}{(z+i)^2} \quad , \quad ' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\frac{1}{z}(z+i)^2 - 2(z+i) \log z}{(z+i)^4} = \frac{\frac{-4}{i} - 4i \left(i \frac{\pi}{2}\right)}{16} = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}$$

Díky tomu po dosažení do obecného výsledku dostáváme

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + i\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4} = -\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi^2}{4}$$

Odtud

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4} \quad \text{a} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}}$$

Poznámka: Předchozí integrál dokonce existuje jako Lebesgueův.

## F) Integrály obsahující exponenciálu alias „žiletka”

Tentokrát neodvodíme obecný postup, ale ukážeme si výpočet konkrétního příkladu

### Příklad

**Zadání:** Pro  $a > 0$  spočítejme integrál:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh(x)} dx$$

### ✓ Řešení:

- Nejprve si integrál přepíšeme do **vhodnějšího tvaru** (přechod k integrálu ve smyslu hlavní hodnoty způsobuje singularita v počátku)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh x} dx = \frac{1}{2} \text{Im p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\sinh x} dx.$$

- V úlohách našeho typu se dá využít **periodicity** komplexní exponenciály, díky níž máme  $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$  na  $\mathbb{C}$ .

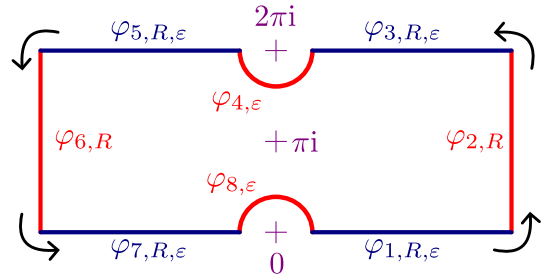
Tato vlastnost nám přinese jisté výhody při následující volbě integrační dráhy (pokoušíme se obíhat pás  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \in (0, 2\pi)\}$ ), dáváme si pozor na kořen jmenovatele v počátku a jeho kopii v bodě  $2\pi i$ ).

Zafixujme velmi malé číslo  $\varepsilon \in (0, 1)$  a velmi velké číslo  $R > 1$ .



Definujme křivky:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\
 \varphi_{2,R}(t) &= R + it && \text{pro } t \in [0, 2\pi] \\
 \varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= R - t + 2\pi i && \text{pro } t \in [0, R - \varepsilon] \\
 \varphi_{4,\varepsilon}(t) &= 2\pi i + \varepsilon e^{-it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \\
 \varphi_{5,R,\varepsilon}(t) &= -t + 2\pi i && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\
 \varphi_{6,R}(t) &= -R + i(2\pi - t) && \text{pro } t \in [0, 2\pi] \\
 \varphi_{7,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, -\varepsilon] \\
 \varphi_{8,\varepsilon}(t) &= \varepsilon e^{i(\pi-t)} && \text{pro } t \in [0, \pi]
 \end{aligned}$$



**Obrázek:** Kladně obíhaná křivka z příkladu na integrál obsahující exponenciální funkci.

$$a \quad \varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{6,R} \oplus \varphi_{7,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{8,\varepsilon}$$

Uvnitř obíhané oblasti se nachází ještě jedna singularita v bodě  $\pi i$ , kde má jmenovatel jednonásobný kořen.

Proto: 
$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{\pi i} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} = 2\pi i \frac{e^{iaz}}{\sinh' z} \Big|_{z=\pi i} = 2\pi i \frac{e^{-\pi a}}{\frac{e^{\pi i} + e^{-\pi i}}{2}} = 2\pi i \frac{e^{-\pi a}}{\frac{-1-1}{2}} = -2\pi i e^{-\pi a}$$

Dále při integraci přes křivky  $\varphi_{4,\varepsilon}$  a  $\varphi_{8,\varepsilon}$  použijeme Tvzení o obíhání části kružnice (LOOPN1). Dostáváme:

$$\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\pi i \operatorname{Res}_{2\pi i} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} = -\pi i \frac{e^{iaz}}{\sinh' z} \Big|_{z=2\pi i} = -\pi i \frac{e^{-2\pi a}}{\frac{e^{2\pi i} + e^{-2\pi i}}{2}} = -\pi i \frac{e^{-2\pi a}}{\frac{1+1}{2}} = -\pi i e^{-2\pi a}$$

a

$$\int_{\varphi_{8,\varepsilon}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\pi i \operatorname{Res}_0 \frac{e^{iaz}}{\sinh z} = -\pi i \frac{e^{iaz}}{\sinh' z} \Big|_{z=0} = -\pi i \frac{e^0}{\cosh 0} = -\pi i.$$

Ještě si povšimněme, že máme:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\varphi_{1,R,\varepsilon}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz + \int_{\varphi_{7,R,\varepsilon}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\sinh x} dx$$

a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz + \int_{\varphi_{5,R,\varepsilon}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz = -\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia(x+2\pi i)}}{\sinh x} dx = -e^{-2\pi a} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\sinh x} dx$$

Konečně

$$\int_{\varphi_{2,R}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{a} \quad \int_{\varphi_{6,R}} \frac{e^{iaz}}{\sinh z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \pm\infty} 0$$

neboť pro  $z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$  splňující  $|z_1| = R$  a  $z_2 \in [0, 2\pi]$  platí:

$$\left| \frac{e^{iaz}}{\sinh z} \right| = 2 \frac{|e^{iaz_1} e^{-az_2}|}{|e^{z_1} e^{iz_2} - e^{-z_1} e^{-iz_2}|} \leq 2 \frac{e^{-az_2}}{\|e^{z_1}\| - \|e^{-z_1}\|} \leq 2 \frac{1}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow \pm\infty} 0.$$

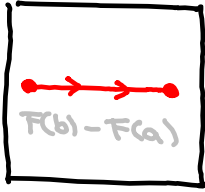
Celkově jsme získali:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\sinh x} dx = \frac{1}{1 - e^{-2\pi a}} - 2\pi i e^{-\pi a} + \pi i e^{-2\pi a} + \pi i = \pi i \frac{(1 - e^{-\pi a})^2}{(1 - e^{-\pi a})(1 + e^{-\pi a})} = \pi i \frac{1 - e^{-\pi a}}{1 + e^{-\pi a}} = \pi i \tanh \frac{\pi a}{2}$$

Proto:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \pi i \tanh \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi a}{2}}$$

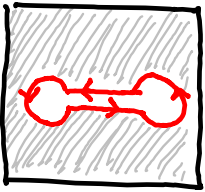
# Dominik Beck - Typologie příkladů



$$F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$$



$$\int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4+x^2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1+x)}}$$

$$\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1+x)}}$$

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{1-x+x^2} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) dx$$

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{dx}{x}$$

$$\int_{-1}^1 (\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x) \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{dx}{x^2}$$

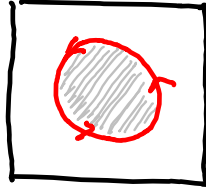
$$\int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \ln x dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\int_0^1 \ln^2 \frac{x}{1-x} \arccos \sqrt{x} dx$$

$$\int_0^1 \ln \frac{x}{1-x} \ln x \arccos \sqrt{x} dx$$



$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} dx$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x dx}{(1+4\sin^2 x)^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - \cos x + 1}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x - x}$$

$$\int_0^{2\pi} \ln(1-2\cos x + x^2) dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^6+1)} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x^3}$$

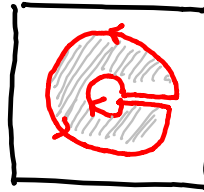
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x^6-1)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+x+1} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1-x+x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+2x+2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^4)} dx$$



$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^6+1)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x+1)^2(x+4)\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(1+x)} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+\lambda+x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{(x+1)^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^3 x dx}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

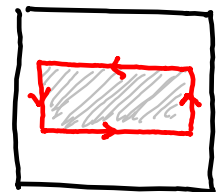
$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x+x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan^3 x}{x^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^{2x+2}e^{x^2+2}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+e^x}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sinh x} e^{-x} dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^3}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{(x-1)^2(x-4)\sqrt{x}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+k^2)}{1-x+k^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^4)}{(1+x^2)^2} dx$$

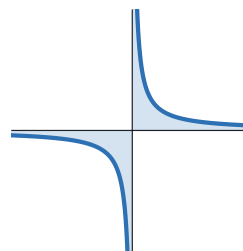
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^2(1+k^2)}{1+x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

## 2.6 POZNÁMKA K TYPŮM INTEGRÁLŮ

Rozlišujeme 3 typy existence integrálů:

- Lebesgueův integrál
- Newtonův integrál
- Integrál ve smyslu hlavní hodnoty (p.v.)



### Lebesgueův integrál

Vyžaduje **absolutní konvergenci**

Vyžadujeme lepší pokles, než  $\frac{1}{(x)^1}$  v okolí nekonečna a zároveň pomalejší růst než  $\frac{1}{(x)^1}$  u nuly

Například: exponenciální pokles v okolí nekonečna

### Newtonův integrál

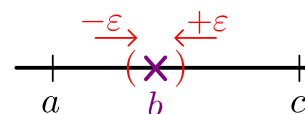
Vyžaduje alespoň **neabsolutní konvergenci**

Díky neabsolutní konvergenci se nám některé členy mohou vhodně odečíst

Například:  $\sin(x)/x$

### Integrál ve smyslu hlavní hodnoty (p.v.)

$$\text{p.v. } \int_a^c f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right); \quad \text{pokud existuje}$$



Například:  $1/x$  okolo nuly

## 2.7 POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY

### Připomenutí střední školy:

---

**Problém:**  $x^2 + y^2 = 2x$  je předpis pro kružnici, jak ale najít její střed a poloměr?

---

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

⇒ **Doplnění na čtverec**

Doplnění na čtverec je převod problému do tvaru rovnice:

$$ax^2 + bx + c \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x + 0 \quad \left. \begin{matrix} d = -1 \\ e = -1 \end{matrix} \right\} \rightarrow (x - 1)^2 - 1$$

$$\text{Nalezneme koeficienty: } a(x + d)^2 + e \quad \text{kde } d = \frac{b}{2a}; \quad e = c - \frac{b^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x - 1)^2 - 1 + y^2 = 0}$$

⇒ Dosazení do předpisu pro kružnici

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = r^2 \rightarrow \begin{cases} X = \text{posunutí v } x \\ Y = \text{posunutí v } y \\ r = \text{poloměr kružnice} \end{cases}$$

$$(x - 1)^2 + (y)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \\ r = 1 \end{cases} \rightarrow S = [1, 0]; r = 1$$

⇒ Řešení kvadratické rovnice

$$0 = ax^2 + bx + c \rightarrow D = b^2 - 4ac \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Vysokoškolské tříčky:

⇒ Výpočet komplexní odmocniny

**Pozorování:** O čísle  $i$  se dá uvažovat jako o „rotaci o  $90^\circ$ “, úhel cílového čísla =  $\frac{\pi}{2}$

**Příklad:**  $z^n = 2i \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{2i}$

1) Zjistit úhel cílového čísla, zde  $2i \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

2) Převést do exponenciálního tvaru:

$$\sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{z \cdot \bar{z}} e^{i\frac{\pi}{2n}} = \sqrt[n]{2} e^{i\frac{\pi}{2n}}$$

3) Hledání kořenů ve tvaru:  $\sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$

$$k = 0 : z_0 = \sqrt[n]{2} e^{i(\frac{\pi}{2n} + 0)}$$

$$k = 1 : z_1 = \sqrt[n]{2} e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n})}$$

⋮

$$k = n - 1 : z_{n-1} = \sqrt[n]{2} e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi(n-1)}{n})}$$

$$k = n : z_n = z_0$$

**Příklad:**  $z^n = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{-1}$

1) Zjistit úhel cílového čísla, zde  $-1 \rightarrow \varphi = \pi$

2) Převést do exponenciálního tvaru:

$$\sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{z \cdot \bar{z}} e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{n}}$$

3) Hledání kořenů ve tvaru:  $\sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$

$$k = 0 : z_0 = e^{i(\frac{\pi}{n} + 0)}$$

$$k = 1 : z_1 = e^{i(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n})}$$

⋮

$$k = n - 1 : z_{n-1} = e^{i(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n})}$$

$$k = n : z_n = z_0$$

**Poznámky:**

Poznámka: Pro obecnou mocninu platí  $|z^\alpha| = |z|^\alpha$  bez ohledu na zvolený interval argumentu logaritmu.

Poznámka 2: Funkce  $\alpha \in (0, 1) \mapsto \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx$  se nazývá Mellinova transformace funkce  $f$ .

### 3 FOURIEROVA TRANSFORMACE

**Definice 4** (Schwartzův prostor).

Prostor Fourierovy transformace nazýváme **Schwartzovým prostorem**:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty} < \infty; \forall \alpha, \beta \in N_0^n\}$$

**Vzoreček: Fourierova transformace (FT)**

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, f \in L^1(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n \dots$  „v 1D - navíjecí frekvence“,  $x \in \mathbb{R}^n \dots$  „v 1D - čas navíjení“

**FT:** 
$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

**Zpětná FT:** 
$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

(a pokud přejmenujeme proměnné) 
$$\check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

**Vzorečky:**

**Derivace v multiindexu:** 
$$D^\beta f = \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n} f}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}}; \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

*Poznámka:*  $D^\beta f$ : značí derivaci fce  $n$  proměnných podle multiindexu  $\beta$ , který má  $n$  složek

**Konvoluce:** 
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

**Základní vlastnosti Fourierovy transformace:**

- $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi), \quad \overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\bar{f})(\xi), \quad \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)} = \mathcal{F}^{-1}(\bar{f})(\xi)$
- $\mathcal{F}(f(x - z)) = e^{-2\pi i z \cdot \xi} \mathcal{F}(f)(\xi), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}(f(x + \eta)) = \mathcal{F}(e^{2\pi i x \cdot \eta} f(x))(\xi), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}(f(\varepsilon x))(\xi) = |\varepsilon|^{-n} \mathcal{F}(f(x))\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon \neq 0$
- $f$  sudá/lichá v  $x_j \Rightarrow \mathcal{F}(f)$  sudá/lichá v  $\xi_j$
- $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi), \quad \mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$
- $D^\alpha(\mathcal{F}(f))(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi), \quad D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}(f))(\xi) = \mathcal{F}^{-1}((2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f \mathcal{F}(g) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)g dx, \quad \text{totéž pro } \mathcal{F}^{-1}$
- $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi), \quad \text{totéž pro } \mathcal{F}^{-1}$

Rozšíření F.T. mimo  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

- $f \in L^1$ :  $\Rightarrow \mathcal{F}(f) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  (totéž  $\mathcal{F}^{-1}$ )

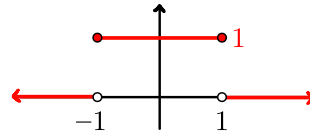
Pokud je  $f \in L^1$  a  $\mathcal{F}(f) \in L^1$ , pak  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$

- $f \in L^2$ :  $\mathcal{F}(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$   $f \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in L^2$  (důsledek vlastností FT)  
a platí:  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  (Planderelova rovnost)

### Příklad

**Zadání:** Vypočítejte Fourierovu transformaci  $\mathcal{F}(f)(\xi)$  z charakteristické funkce intervalu  $[-1, 1]$ :

$$f(x) = \chi_{[-1;1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$



✓ **Řešení:**

**Fourierova transformace:**

$\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[ \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \right]_{-1}^1 = \frac{i}{2\pi \xi} (-2i \sin(2\pi \xi)) = \frac{\sin(2\pi \xi)}{\pi \xi}$$

$$\hat{f}(0) = \mathcal{F}(f)(0) = \int_{-1}^1 1 = 2 \rightarrow \hat{f} \text{ je spojitá v } \mathbb{R}$$

Poznámka: Víme, že  $\chi_{[-1,1]}(x)$  náleží jak do prostoru  $L^1$ , tak do  $L^2$ , tedy  $\hat{f}$  existuje ve smyslu  $L^1$  i  $L^2$

**Zpětná Fourierova transformace aplikovaná na  $\hat{f}$ :**

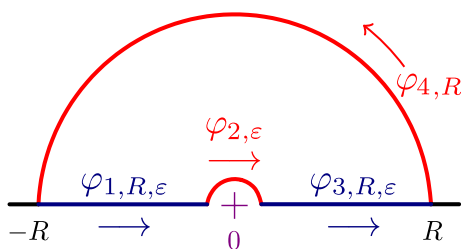
Poznámka:  $\hat{f} \notin L^1$ , ale  $\hat{f} \in L^2$ , tedy  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)$  je počítána ve smyslu  $L^2$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi \xi} \sin(2\pi \xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} (e^{2\pi i \xi(x+1)} - e^{2\pi i \xi(x-1)}) d\xi$$

Parametrisujeme si integrál pomocí  $\alpha$ :  $I_\alpha := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi \alpha}}{2\pi i \xi} d\xi$

• **Horní polorovina,  $\alpha > 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v  $\text{Int}(\varphi) \Rightarrow \int_{\varphi} = 0$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0 \quad (\text{lajdácky zapsáno})$$

$$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{R \rightarrow \infty} I_\alpha$$

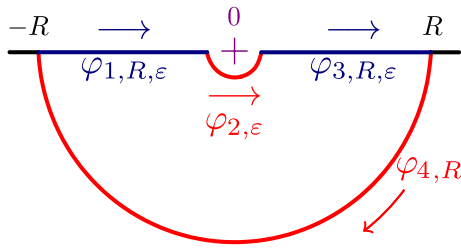
$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\text{(LOOPN1)}} (0 - \pi)i \text{Res}_0 \left( \frac{e^{2\pi i \xi \alpha}}{2\pi i \xi} \right) = -\pi i \frac{1}{2\pi i} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\varphi_4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha > 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow 0 = I_\alpha + \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{I_\alpha = \frac{1}{2}}$$

• Spodní polorovina,  $\alpha < 0$

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v  $\text{Int}(\varphi) \Rightarrow \int_{\varphi} = 0$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0 \quad (\text{lajdácky zapsáno})$$

$$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{R \rightarrow \infty} I_{\alpha}$$

$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{(\text{LOOPN1})} (2\pi - \pi)i \text{Res}_0 \left( \frac{e^{2\pi i \xi \alpha}}{2\pi i \xi} \right) = \pi i \frac{1}{2\pi i} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\varphi_4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha < 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow 0 = I_{\alpha} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{I_{\alpha} = -\frac{1}{2}}$$

• Třetí případ,  $\alpha = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \text{p. v. } \int_{-R}^R \frac{d\xi}{2\pi \xi} \right) = 0$$

Provedeme dosazení do parametrisovaného integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi \alpha}}{2\pi i \xi} d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi (x+1)} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi (x-1)} d\xi$$

$$\alpha \rightarrow (x+1), (x-1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = x \notin [-1; 1]$$

$\rightarrow (x+1), (x-1)$  mají stejná znaménka (buď  $-,-$  nebo  $+,+$ )

(tedy oba integrály jsou buď  $\alpha < 0$  nebo  $\alpha > 0$ )

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \begin{cases} x < 1 & -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) \\ x > 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} = 0$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = x \in (-1; 1)$$

$\rightarrow x+1 > 0$  a  $x-1 < 0$ , tedy dohromady  $(+,-)$

(tedy první integrál dává  $\alpha > 0$ , druhý dává  $\alpha < 0$ )

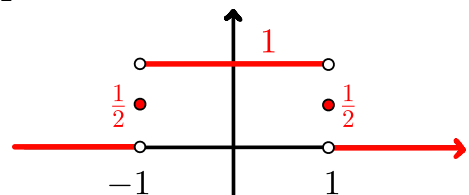
$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow x+1 = 0 \text{ a } x-1 < 0 \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow x+1 > 0 \text{ a } x-1 = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

**Celkem:**

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2} & x \in \{-1\} \cup \{1\} \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$



Poznámka: Vidíme, že  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$  pro s.v.  $x$ , takže nám to skoro vyšlo :).

### Příklad

**Zadání:** Pro  $a > 0$  a  $x \in \mathbb{R}^n$  spočítejme Fourierovu transformaci funkce  $f$ :

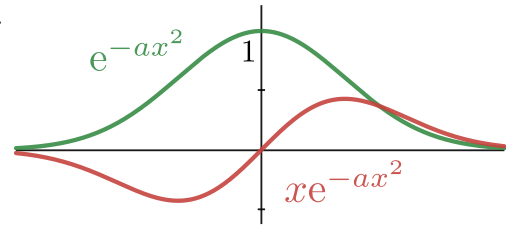
$$f(x) = x e^{-a|x|^2}$$

✓ **Řešení:** Nejprve si všimneme, že  $(e^{-ax^2})' = -2ax e^{-ax^2} \rightarrow x e^{-ax^2} = -\frac{1}{2a} (e^{-ax^2})'$

☒ **Výpočet v 1D ( $x \in \mathbb{R}$ )**

- Tento typ příkladů se vyplatí počítat nejprve v jedné dimenzi (kde je situace častokrát jednodušší) a pak zobecnit na  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x e^{-ax^2})(\xi) &= -\frac{1}{2a} \mathcal{F}\left((e^{-ax^2})'\right)(\xi) = (\text{Vlastnosti FT}) = \\ &= -\frac{1}{2a} 2\pi i \xi \mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \dots \end{aligned}$$



- Nyní vypočítáme, čemu se rovná  $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi)$

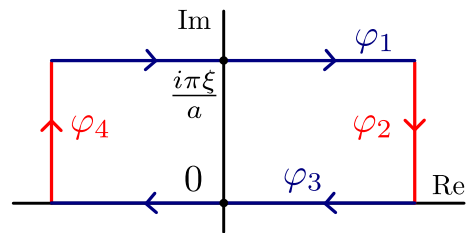
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) &\stackrel{\text{z def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left( x^2 + 2x \frac{\pi i \xi}{a} + \frac{\pi^2 i^2 \xi^2}{a^2} \right)} e^{a \left( \frac{\pi^2 i^2 \xi^2}{a^2} \right)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left( x + \frac{\pi i \xi}{a} \right)^2} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}} dx = e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left( x + \frac{\pi i \xi}{a} \right)^2} dx}_{=I} = \dots \end{aligned}$$

- Nyní vypočítáme pomocí (Residuové věty), čemu se rovná integrál  $I$ , zavedením komplexní funkce:

$$\tilde{f} := e^{-az^2}$$

Definujme křivky:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t + i \frac{\pi \xi}{a} & \text{pro } t \in [-R, R]; & & \varphi_1'(t) &= 1 dt \\ \varphi_2(t) &= R - it & \text{pro } t \in \left[ -\frac{\pi \xi}{a}, 0 \right]; & & \varphi_2'(t) &= -i dt \\ \varphi_3(t) &= -t + 0i & \text{pro } t \in [-R, R]; & & \varphi_3'(t) &= -1 dt \\ \varphi_4(t) &= -R + it & \text{pro } t \in \left[ 0, \frac{\pi \xi}{a} \right]; & & \varphi_4'(t) &= i dt \end{aligned}$$



Funkce  $\tilde{f}$  jest holomorní na Int  $\varphi$ , tedy (lajdáckým zápisem):  $\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0$

Integrály **nepřispívající** („hamouni jedni“):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_{\varphi_2} \tilde{f} \right| &= \left| \int_{\varphi_2} e^{-az^2} dz \right| = \left| \int_{-\frac{\pi \xi}{a}}^0 e^{-a(R-it)^2} \cdot \underbrace{(-i)}_{\|i\|=1} dt \right| = \left| - \int_{-\frac{\pi \xi}{a}}^0 e^{-a(R^2 - 2Rit + i^2 t^2)} dt \right| = \\ &= \left| - \int_{-\frac{\pi \xi}{a}}^0 e^{-aR^2} \underbrace{e^{a2Rit}}_{\|e^{it}\|=1} e^{at^2} dt \right| \leq e^{-aR^2} \int_{-\frac{\pi \xi}{a}}^0 e^{at^2} dt \leq e^{-aR^2} \cdot \underbrace{\frac{\pi \xi}{a} e^{a \frac{\pi^2 \xi^2}{a^2}}}_{\text{konstanta}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

▷ kde jsme v poslední nerovnosti odhadli:  $\int_{-\frac{\pi \xi}{a}}^0 e^{at^2} dt \leq \int_{-\frac{\pi \xi}{a}}^0 \max_{\left[ -\frac{\pi \xi}{a}, 0 \right]} e^{at^2} dt = \int_{-\frac{\pi \xi}{a}}^0 e^{a \frac{\pi^2 \xi^2}{a^2}} dt$





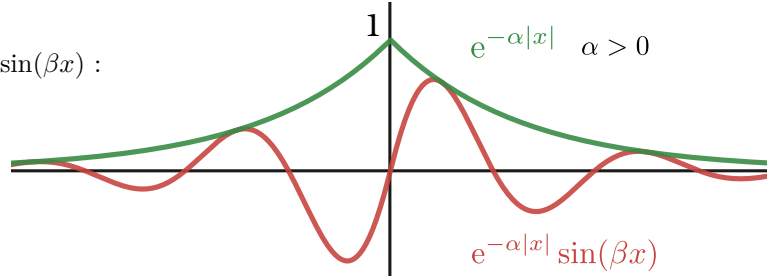
### Příklad

**Zadání:** Pro  $\alpha > 0$  a  $\beta \in \mathbb{R}$  spočtěte:  $\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x))$

Vysvětlete také, jakou definici Fourierovy transformace používáte a proč.

### Řešení:

Nejprve si vykreslíme  $e^{-\alpha|x|}$  a  $e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x)$ :



Pro  $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$  je  $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x) \in L^1(\mathbb{R})$  Proto lze použít standardní definici na  $L^1(\mathbb{R})$ .

Protože je funkce  $f$  lichá, máme:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x) [\cos(2\pi x \cdot \xi) - i \sin(2\pi x \cdot \xi)] dx = \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x)}_{\text{lichá}} \underbrace{\sin(2\pi x \xi)}_{\text{lichá}} dx = -2i \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) \sin(2\pi x \xi) dx = \left[ \begin{array}{l} \text{goniometrické} \\ \text{vzorce} \end{array} \right] = \dots \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{cis}(A+B) = \text{cis}(A) + \text{cis}(B) \Rightarrow \cos(A+B) + i \sin(A+B) = (\cos(A) + i \sin(A))(\cos(B) + i \sin(B)) \\ \cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \\ -(\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)) \end{array} \right] \rightarrow \sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$\begin{aligned} \dots &= -2i \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (\cos(\beta x - 2\pi x \xi) - \cos(\beta x + 2\pi x \xi)) dx = -i \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (\cos(\beta x - 2\pi x \xi) dx \\ &+ i \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x + 2\pi x \xi)) dx = -i \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{i(\beta x - 2\pi x \xi)} dx + i \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{i(\beta x + 2\pi x \xi)} dx = \\ &= -i \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{[-\alpha + i(\beta - 2\pi \xi)]x} dx + i \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{[-\alpha + i(\beta + 2\pi \xi)]x} dx = -i \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{[-\alpha + i(\beta - 2\pi \xi)]x}}{-\alpha + i(\beta - 2\pi \xi)} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$+ i \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{[-\alpha + i(\beta + 2\pi \xi)]x}}{-\alpha + i(\beta + 2\pi \xi)} \right]_0^{\infty} = -i \operatorname{Re} \left( \left[ \frac{e^{-\alpha x} \overbrace{e^{i\beta x}}{\|\cdot\|=1} \overbrace{e^{-2\pi i \xi x}}{\|\cdot\|=1}}{-\alpha + i(\beta - 2\pi \xi)} \right]_0^{\infty} - \left[ \frac{e^{-\alpha x} \overbrace{e^{i\beta x}}{\|\cdot\|=1} \overbrace{e^{-2\pi i \xi x}}{\|\cdot\|=1}}{-\alpha + i(\beta + 2\pi \xi)} \right]_0^{\infty} \right) =$$

$$= -i \operatorname{Re} \left( 0 - \frac{1}{-\alpha + i(\beta - 2\pi \xi)} - 0 + \frac{1}{-\alpha + i(\beta + 2\pi \xi)} \right) = i \operatorname{Re} \left( \frac{1}{-\alpha + i(\beta - 2\pi \xi)} - \frac{1}{-\alpha + i(\beta + 2\pi \xi)} \right) =$$

[Nyní zlomky rozšíříme komplexně sdruženým jmenovatelem]

$$\dots = i \operatorname{Re} \left( \frac{-\alpha - i(\beta - 2\pi \xi)}{\alpha^2 + (\beta - 2\pi \xi)^2} - \frac{-\alpha - i(\beta + 2\pi \xi)}{\alpha^2 + (\beta + 2\pi \xi)^2} \right) = \frac{i\alpha}{\alpha^2 + (\beta + 2\pi \xi)^2} - \frac{i\alpha}{\alpha^2 + (\beta - 2\pi \xi)^2} = \left[ \begin{array}{l} \text{společný} \\ \text{jmenovatel} \end{array} \right] \dots$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(e^{-\alpha|x|} \sin(\beta x)) = -i \frac{8\pi \xi \beta \alpha}{(\alpha^2 + (\beta + 2\pi \xi)^2)(\alpha^2 + (\beta - 2\pi \xi)^2)}$$

### Příklad

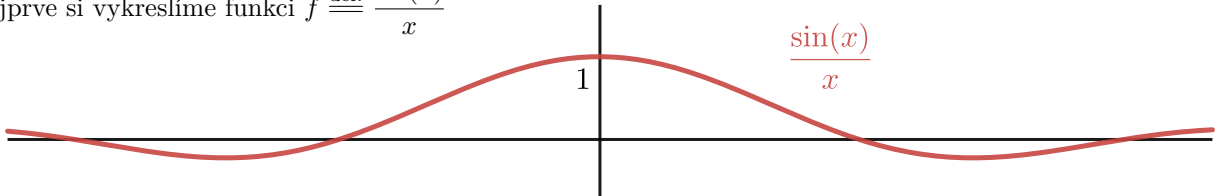
**Zadání:** Spočítejte

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

V jakém smyslu Fourierovu transformaci počítáte? Okomentujte!

✓ **Řešení:**

Nejprve si vykreslíme funkci  $f \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sin(x)}{x}$



Zjevně  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , ale  $f \notin L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$ ; (Residuovou větou)

$f$  je sudá funkce, tedy máme:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(\xi) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} \left( \cos(-2\pi \xi x) + \underbrace{i \sin(-2\pi \xi x)}_{\text{lichá}} \right) dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} \cos(-2\pi \xi x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x) \cos(2\pi \xi x)}{x} dx = \left[ \begin{array}{c} \text{goniometrické} \\ \text{vzorce} \end{array} \right] = \dots \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{cis}(A+B) = \text{cis}(A) + \text{cis}(B) \Rightarrow \cos(A+B) + i \sin(A+B) = (\cos(A) + i \sin(A))(\cos(B) + i \sin(B)) \\ \left. \begin{array}{l} \sin(A+B) = \underbrace{\sin(A) \cos(B)}_{\text{dashed}} + \underbrace{\cos(A) \sin(B)}_{\text{red}} \\ + \sin(A-B) = \underbrace{\sin(A) \cos(B)}_{\text{dashed}} - \underbrace{\cos(A) \sin(B)}_{\text{red}} \end{array} \right\} \rightarrow \sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2} (\sin(A+B) + \sin(A-B)) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x + (2\pi \xi x)) + \sin(x - (2\pi \xi x))}{2x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{\sin((1+2\pi \xi)x) + \sin((1-2\pi \xi)x)}{x} dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \int_{-R}^R \frac{i \sin((1+2\pi \xi)x)}{x} + \frac{i \sin((1-2\pi \xi)x)}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \text{p.v.} \int_{-R}^R \frac{e^{ix(1+2\pi \xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi \xi)}}{x} dx = \end{aligned}$$

[Zlomek se chová jako  $1/x$  v počátku, tam fce není integrovatelná, proto měníme typ integrálu na p.v.]

Parametrisujeme si integrál pomocí  $\alpha$ :  $I_\alpha := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix \alpha}}{x} dx$ , což nám dá následující 3 případy:

$$\alpha > 0 \Rightarrow \xi > -\frac{1}{2\pi}; \xi < \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \xi \in \left(-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right) \quad \text{oba 2 zlomky obíhají v horní polorovině}$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \xi < -\frac{1}{2\pi}; \xi > \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \xi \in \left(-\infty, -\frac{1}{2\pi}\right) \quad \text{1. zlomek v horní, 2. ve spodní polorovině}$$

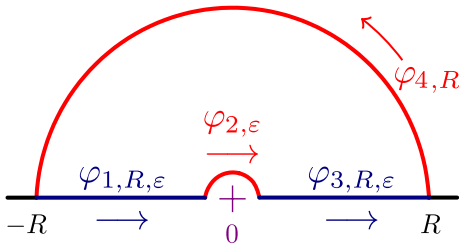
$$\Rightarrow \xi \in \left(\frac{1}{2\pi}, \infty\right) \quad \text{1. zlomek ve spodní, 2. v horní polorovině}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \xi = -\frac{1}{2\pi}; \xi = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \text{Jeden integrál dává ze sinu 0, druhý dává ze symetrie vždy } \frac{e^{i2x}}{x}$$

tedy oběh v horní polorovině, neb pro druhý integrál vždy  $\alpha = 2$

• Horní polorovina,  $\alpha > 0$

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v  $\text{Int}(\varphi) \Rightarrow \int_{\varphi} = 0$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0 \quad (\text{lajdácky zapsáno})$$

$$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{R \rightarrow \infty} I_{\alpha}$$

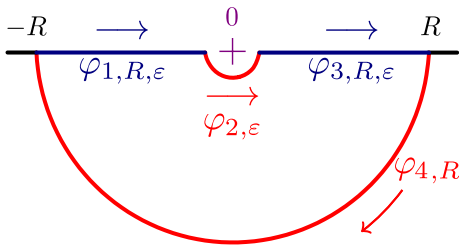
$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\text{(LOOPN1)}} (0 - \pi)i \text{Res}_0 \left( \frac{e^{ix\alpha}}{x} \right) = -\pi i \left( \frac{e^0}{1} \right) = -\pi i$$

$$\int_{\varphi_4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha > 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow 0 = I_{\alpha} + (-\pi i) \Rightarrow \boxed{I_{\alpha} = \pi i}$$

• Spodní polorovina,  $\alpha < 0$

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v  $\text{Int}(\varphi) \Rightarrow \int_{\varphi} = 0$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0 \quad (\text{lajdácky zapsáno})$$

$$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{R \rightarrow \infty} I_{\alpha}$$

$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\text{(LOOPN1)}} (2\pi - \pi)i \text{Res}_0 \left( \frac{e^{ix\alpha}}{x} \right) = \pi i \frac{e^0}{1} = \pi i$$

$$\int_{\varphi_4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha < 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow 0 = I_{\alpha} + \pi i \Rightarrow \boxed{I_{\alpha} = -\pi i}$$

Provedeme dosazení do parametrisovaného integrálu:

- $\xi \in \left(-\infty, -\frac{1}{2\pi}\right)$ , 1. zlomek v horní, 2. ve spodní polorovině

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \text{p.v.} \int_{-R}^R \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} dx = \frac{1}{2i} ((\cancel{\pi i}) + (-\cancel{\pi i})) = \boxed{0}$$

- $\xi \in \left(-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right)$ , oba 2 zlomky obíhají v horní polorovině

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \text{p.v.} \int_{-R}^R \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} dx = \frac{1}{2i} ((\pi i) + (\pi i)) = \frac{2\cancel{\pi}}{2i} = \boxed{\pi}$$

- $\xi \in \left(\frac{1}{2\pi}, \infty\right)$ , 1. zlomek ve spodní, 2. v horní polorovině

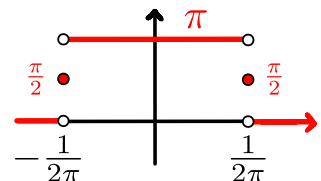
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \text{p.v.} \int_{-R}^R \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} dx = \frac{1}{2i} ((-\cancel{\pi i}) + (\cancel{\pi i})) = \boxed{0}$$

- $\xi \in \left\{-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right\}$ , 1. zlomek = 0, 2. v horní polorovině

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \text{p.v.} \int_{-R}^R \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} dx = \frac{1}{2i} (0 + (\pi i)) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

**Celkem:** 
$$\mathcal{F} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right) (\xi) = \begin{cases} \pi & x \in \left(-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right) \\ \frac{\pi}{2} & x \in \left\{-\frac{1}{2\pi}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2\pi}\right\} \\ 0 & x \notin \left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right] \end{cases} = \pi \chi_{\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]} \text{ s.v.}$$

Kde jsme FT počítali ve smyslu  $L^2(\mathbb{R})$ , ale vyšla nám i bodově.



**Příklad**

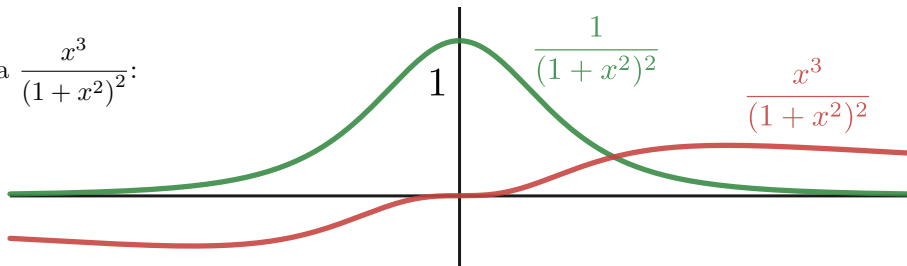
**Zadání:** Spočítejte  $\left( (x \in \mathbb{R}) \mapsto \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right)$

$$\mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right)$$

V jakém smyslu Fourierovu transformaci počítáte? Okomentujte!

✓ **Řešení:**

Vykreslíme si funkce  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$  a  $\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$ :



Funkce  $f \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$  se na okolí nekonečen chová jako  $f \sim \frac{1}{x}$ , tedy  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ , ale  $f \in L^2(\mathbb{R})$

Využijeme definice na  $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right) (\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^3}{(1+x^2)^2} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$ ; (Residuovou větou)

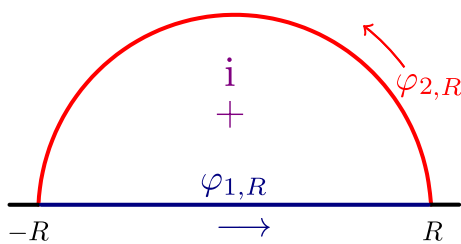
Funkci  $g = \frac{z^3}{(1+z^2)^2} e^{-2\pi i \xi \cdot z}$  si holomorfně rozšíříme na  $\mathbb{C}$ :  $g(z) = \frac{z^3}{(1+z^2)^2} e^{-2\pi i \xi \cdot z}$

Funkce  $f$  je lichá, vezmeme  $\xi < 0 \Rightarrow \alpha > 0$ , integrujeme v horní polorovině a pak liše dodefinujeme pro  $\xi > 0$ .

- Vietovými vztahy nebo skrze diskriminant zjistíme kořeny jmenovatele:  $\{-i, i\}$
- Zajímá nás pouze residuum v  $i$ , neb bod  $-i$  jest mimo integrační konturu horní poloroviny
- Dvojnásobný kořen,  $\Rightarrow$  využijeme (2. pravidla pro výpočet residuí) pro  $n = 2$

• **Horní polorovina,  $\alpha > 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$



Dvojnásobný pól  $i$  v  $\text{Int}(\varphi)$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{a_j} g = 2\pi i \text{Res}_i g \quad (\text{lajdácky})$$

$$\int_{\varphi_1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right) (\xi)$$

$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha > 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + 0 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \boxed{\mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right) (\xi) = 2\pi i \text{Res}_i g}$$

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Res}_i g &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} (g(z)(z-a)^n)^{(n-1)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(1+z^2)^2} e^{-2\pi i \xi \cdot z} (z-i) \right)' = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(z-i)^2 (z+i)^2} e^{-2\pi i \xi \cdot z} (z-i) \right)' = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(z+i)^2} e^{-2\pi i \xi \cdot z} \right)' = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(z+i)^2} \right)' e^{-2\pi i \xi \cdot z} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(z+i)^2} \right) (e^{-2\pi i \xi \cdot z})' = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(z+i)^2} \right)' e^{-2\pi i \xi \cdot z} &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{3z^2(z+i) - 2(z+i)z^3}{(z+i)^3} \right) e^{-2\pi i \xi \cdot z} = 2\pi i \left( \frac{3(-1)(2i) - 2(-i)}{(2i)^2} \right) e^{2\pi \xi} = \\
&= 2\pi i \frac{-3+1}{4(-1)} e^{2\pi \xi} = 2\pi i \frac{1}{2} e^{2\pi \xi} = \pi i e^{2\pi \xi} \\
2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(z+i)^2} \right) (e^{-2\pi i \xi \cdot z})' &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z^3}{(z+i)^2} \right) (e^{-2\pi i \xi \cdot z}) (-2\pi i \xi) = 2\pi i \left( \frac{-i}{(2i)^2} \right) (e^{2\pi \xi}) (-2\pi i \xi) = \\
&= \left( \frac{2\pi(-2\pi i \xi)}{(2i)^2} \right) (e^{2\pi \xi}) = \frac{-4\pi^2 i \xi}{4(-1)} e^{2\pi \xi} = \pi^2 i \xi e^{2\pi \xi}
\end{aligned}$$

Pro  $\xi < 0$  tedy máme:  $\mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right) (\xi) = 2\pi i \operatorname{Res}_i g = \pi i e^{2\pi \xi} + \pi^2 i e^{2\pi \xi} = (\pi + \pi^2 \xi) i e^{2\pi \xi}$

Pro  $\xi = 0$  máme z lichosti fce  $f$ :  $\mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right) (0) = 0$

Pro  $\xi > 0$  liše doplníme:  $\mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right) (\xi) = (-1)(\pi - \pi^2 \xi) i e^{-2\pi \xi} = (\pi^2 \xi - \pi) i e^{-2\pi \xi}$

**Celkem:**  $\mathcal{F} \left( \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right) (\xi) = (\pi^2 \xi - \operatorname{sgn}(\xi) \pi) i e^{-2\pi |\xi|}$

### Příklad

**Zadání:** Uvažujte funkci  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1+x^3}{1+x^4}$$

V jakých Lebesgueových prostorech tato funkce leží? Spočítejte její Fourierovu transformaci a vysvětlete, v jakém smyslu provádíte výpočet.

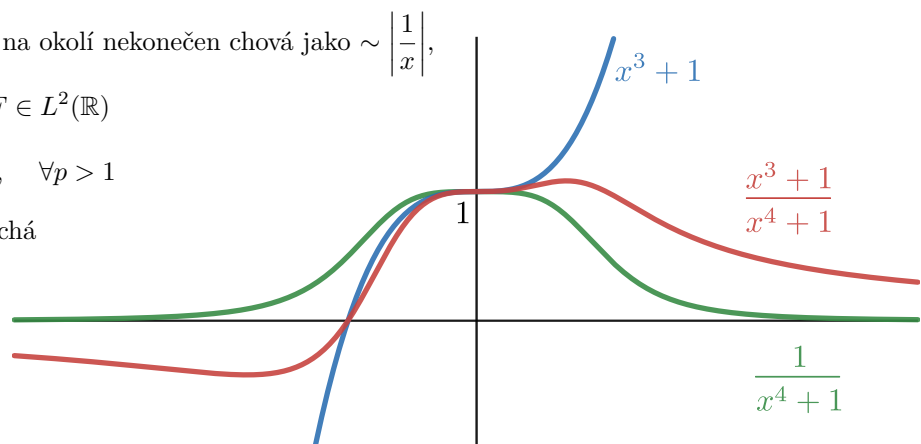
### Řešení:

Vykreslíme si funkce  $x^3 + 1$ ,  $\frac{1}{x^4 + 1}$  a  $\frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}$ :

- Funkce  $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}$  se na okolí nekonečen chová jako  $\sim \left| \frac{1}{x} \right|$ ,

tedy  $F \notin L^1(\mathbb{R})$ , ale  $F \in L^2(\mathbb{R})$

- Přesněji  $\frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $\forall p > 1$
- $F(x)$  není ani sudá ani lichá

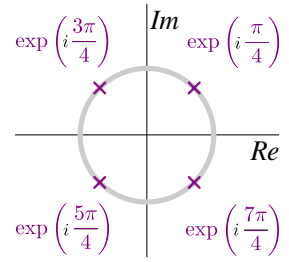


Využijeme definice FT na  $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}(F(x))(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$ ; (Residuovou větou)

Funkci  $G(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} e^{-2\pi i \xi \cdot x}$  holomorfně rozšíříme na  $\mathbb{C}$ :  $G(z) = \frac{z^3 + 1}{z^4 + 1} e^{-2\pi i \xi \cdot z}$

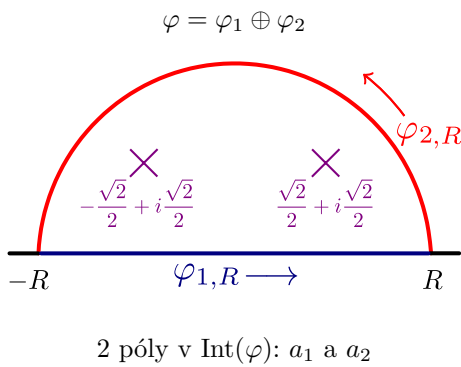
Vypočítáme kořeny jmenovatele:  $\sqrt[4]{z} = -1 \rightarrow \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|} \exp(i[\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}])$

Kořeny jsou: 
$$\begin{cases} a_1 = \exp(i\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & a_2 = \exp(i\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a_3 = \exp(i\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, & a_4 = \exp(i\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



- Pro  $\xi < 0$  máme  $\alpha > 0$  obíháme tedy v horní polorovině
- Pro  $\xi > 0$  máme  $\alpha < 0$  obíháme tedy ve spodní polorovině
- Všechny kořeny jsou jednonásobné,  $\Rightarrow$  využijeme (4. pravidla pro výpočet residuí)

• **Horní polorovina,  $\alpha > 0$**



$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}_{a_j} G \quad (\text{lajdácky zapsáno})$$

$$\int_{\varphi_1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}(F(x))(\xi)$$

$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha > 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

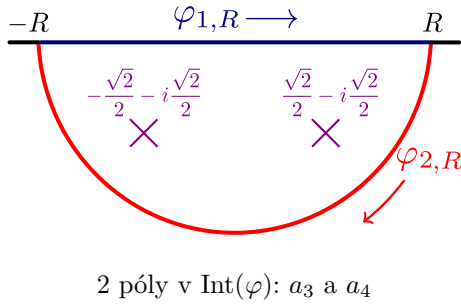
$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + 0 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \boxed{\mathcal{F}(F(x))(\xi) = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}_{a_j} G}$$

$\xi < 0$

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}_{a_j} G &= 2\pi i \left[ \left( \frac{z^3 + 1}{(z^4 + 1)'} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left( \frac{z^3 + 1}{(z^4 + 1)'} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right] = \\ &= 2\pi i \left[ \left( \frac{z^3 + 1}{4z^3} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left( \frac{z^3 + 1}{4z^3} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right] = \\ &= 2\pi i \left[ \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4z^3} \right) \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4z^3} \right) \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right] = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{\pi}{4}}) \right] + \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{e^{i\frac{3\cdot 3\pi}{4}}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right] = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{\pi}{4}}) \right] + \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right] = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)) \right] + \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{7\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)) \right] = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) e^{\sqrt{2}\pi\xi} e^{-i\sqrt{2}\pi\xi} \right] + \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{7\pi}{4}} \right) e^{\sqrt{2}\pi\xi} e^{i\sqrt{2}\pi\xi} \right] = \\ &= \frac{\pi i}{2} e^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 1 + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] e^{-i\sqrt{2}\pi\xi} + \frac{\pi i}{2} e^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] e^{i\sqrt{2}\pi\xi} = \\ &= \frac{\pi i}{4} e^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} \right] \left( \cos(\sqrt{2}\pi\xi) - i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) + \frac{\pi i}{4} e^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} \right] \left( \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) = \\ &= \frac{\pi i}{4} e^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[ \left( 4 - 2i\sqrt{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + \left( 2\sqrt{2} \right) i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right] = \boxed{\pi i e^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[ \left( 1 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right]} \end{aligned}$$

• Spodní polorovina,  $\alpha < 0$

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$



$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} = -2\pi i \sum_{j=3}^4 \text{Res}_{a_j} G \quad (\text{lajdácky zapsáno})$$

$$\int_{\varphi_1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}(F(x))(\xi)$$

$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha > 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + 0 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \boxed{\mathcal{F}(F(x))(\xi) = -2\pi i \sum_{j=3}^4 \text{Res}_{a_j} G}$$

$\xi > 0$

$$\begin{aligned} -2\pi i \sum_{j=3}^4 \text{Res}_{a_j} G &= -2\pi i \left[ \left( \frac{z^3 + 1}{(z^4 + 1)'} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{5\pi}{4}}} + \left( \frac{z^3 + 1}{(z^4 + 1)'} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{7\pi}{4}}} \right] = \\ &= -2\pi i \left[ \left( \frac{z^3 + 1}{4z^3} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{5\pi}{4}}} + \left( \frac{z^3 + 1}{4z^3} \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{7\pi}{4}}} \right] = \\ &= -2\pi i \left[ \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4z^3} \right) \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{5\pi}{4}}} + \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4z^3} \right) \exp(-2\pi i \xi z) \right) \Big|_{z=e^{i\frac{7\pi}{4}}} \right] = \\ &= -\frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{e^{i\frac{3\cdot 5\pi}{4}}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{5\pi}{4}}) \right] - \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{e^{i\frac{3\cdot 7\pi}{4}}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{7\pi}{4}}) \right] = \\ &= -\frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{-i\frac{7\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{5\pi}{4}}) \right] - \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{-i\frac{5\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi e^{i\frac{7\pi}{4}}) \right] = \\ &= -\frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)) \right] - \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \exp(-2\pi i \xi \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)) \right] = \\ &= -\frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) e^{-\sqrt{2}\pi\xi} e^{i\sqrt{2}\pi\xi} \right] - \frac{\pi i}{2} \left[ \left( 1 + e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) e^{-\sqrt{2}\pi\xi} e^{-i\sqrt{2}\pi\xi} \right] = \\ &= -\frac{\pi i}{2} e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] e^{i\sqrt{2}\pi\xi} - \frac{\pi i}{2} e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 1 + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] e^{-i\sqrt{2}\pi\xi} = \\ &= -\frac{\pi i}{4} e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \right] \left( \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) - \frac{\pi i}{4} e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[ 2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} \right] \left( \cos(\sqrt{2}\pi\xi) - i\sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) = \\ &= -\frac{\pi i}{4} e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[ \left( 4 + 2i\sqrt{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + \left( 2\sqrt{2} \right) i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right] \\ &= \boxed{-\pi i e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[ \left( 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right]} \end{aligned}$$

Celkem tedy máme:

$\mathcal{F}(F(x))(\xi) = \pi i e^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[ \left( 1 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right]$	pro $\xi < 0$
$\mathcal{F}(F(x))(\xi) = -\pi i e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[ \left( 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right]$	pro $\xi > 0$
$\mathcal{F}(F(x))(\xi) = \text{NaN}$ integrál diverguje	pro $\xi = 0$



### Příklad

**Zadání:** Uvažujte funkci  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{|x|^2}{1 + |x|^4}.$$

V jakých Lebesgueových prostorech tato funkce leží? Spočítejte její Fourierovu transformaci a vysvětlete, v jakém smyslu provádíte výpočet.

**Poznámka:** Připomeňme, že pro  $f(r) = F(x)$  a pro tři prostorové dimenze platí, že  $\mathcal{F}(T_F) = T_h$ , kde

$$h(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(r) \frac{2r}{|\xi|} \sin(2\pi r|\xi|) dr$$

(pokud limita existuje). Odůvodněte, že daná limita opravdu existuje!

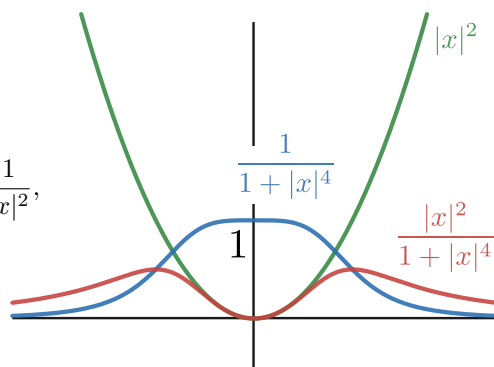
### ✓ Řešení:

Vykreslíme si v 1D funkce  $|x|^2$ ,  $\frac{1}{1 + |x|^4}$  a  $\frac{|x|^2}{1 + |x|^4}$ :

- Funkce  $F(x) = \frac{|x|^2}{1 + |x|^4}$  se na okolí nekonečen chová jako  $\sim \frac{1}{|x|^2}$ ,  
ve 3D je hraniční pokles  $\frac{1}{|x|^3}$  a my máme  $\sim \frac{1}{|x|^2}$

- Tedy  $\frac{|x|^2}{1 + |x|^4} \in L^p(\mathbb{R}^3), \quad \forall p > \frac{3}{2}$

protože  $\left(\frac{1}{|x|^2}\right)^{\frac{3}{2} + \varepsilon} = \frac{1}{|x|^{3 + \varepsilon}} < \frac{1}{|x|^3}$  na okolí nekonečen.  $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow F \notin L^1(\mathbb{R}^3)$ , ale  $F \in L^2(\mathbb{R}^3)$



Proto  $\mathcal{F}(F(x))(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_r} F(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$

To, že existuje  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(r) \frac{2r}{|\xi|} \sin(2\pi r|\xi|) dr$ , plyne z toho, že daný integrál  $\left(\int_0^\infty \frac{P(r)}{Q(r)} \sin(r) dr\right)$  existuje v Newtonově smyslu pro  $\text{st. } P \leq \text{st. } Q - 1$ .

**Poznámka:** Případně lze argumentovat důkazem *Věty o Fourierově transformaci radiálně symetrické distribuce (druhá věta)*

Počítejme tedy ve smyslu výše uvedené limity:

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(r) \frac{2r}{|\xi|} \sin(2\pi r|\xi|) dr = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2}{|\xi|} \int_0^R \frac{r^3}{1 + r^4} \sin(2\pi r|\xi|) dr = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|\xi|} \int_{-R}^R \frac{r^3}{1 + r^4} \sin(2\pi r|\xi|) dr = \\ &= \frac{1}{|\xi|} \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Im} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{r^3}{1 + r^4} e^{2\pi i r|\xi|} dr}_J = \text{(Residuovou větou)} \end{aligned}$$

**Poznámka:** Poslední integrál existuje jako *Newtonův*, případně jako *zobecněný Lebesgueův*

Pro  $\xi = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(T_F)(\xi) = 0$  (integrujeme nulové siny,  $\sin(0) = 0$ )

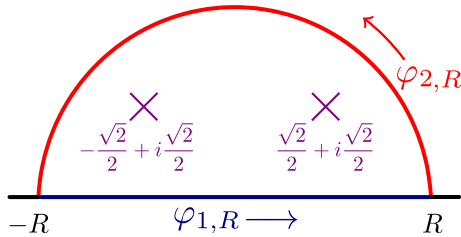
Pro  $\xi \neq 0$  máme díky absolutní hodnotě  $|\xi|$  automaticky splněno, že vždy  $\alpha > 0$

Vypočítáme kořeny jmenovatele:  $\sqrt[4]{z} = -1 \rightarrow \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|} \exp(i[\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}])$

Kořeny jsou: 
$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \exp(i\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_2 = \exp(i\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a_3 = \exp(i\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_4 = \exp(i\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \dots \text{viz. (Předchozí příklad)}$$

• Horní polorovina,  $\alpha > 0$

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$



2 póly v  $\text{Int}(\varphi)$ :  $a_1$  a  $a_2$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}_{a_j} f(r) \quad (\text{lajdácky zapsáno})$$

$$\int_{\varphi_1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} J$$

$$\int_{\varphi_2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Jordan}) \text{ pro } \alpha > 0, M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\int_{\varphi} = \int_{\varphi_1} + 0 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \boxed{J = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}_{a_j} G}$$

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}_{a_j} f(r) &= 2\pi i \left[ \left( \frac{r^3}{(r^4+1)'} \exp(2\pi i|\xi|r) \right) \Big|_{r=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left( \frac{r^3}{(r^4+1)'} \exp(2\pi i|\xi|r) \right) \Big|_{r=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right] = \\ &= 2\pi i \left[ \left( \frac{r^3}{4r^3} \exp(2\pi i|\xi|r) \right) \Big|_{r=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left( \frac{r^3}{4r^3} \exp(2\pi i|\xi|r) \right) \Big|_{r=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right] = \\ &= \frac{\pi i}{2} \exp\left(2\pi i|\xi| \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{\pi i}{2} \exp\left(2\pi i|\xi| \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| + i\sqrt{2}\pi|\xi|\right) + \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| - i\sqrt{2}\pi|\xi|\right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi|\right) \left[ \exp\left(i\sqrt{2}\pi|\xi|\right) + \exp\left(-i\sqrt{2}\pi|\xi|\right) \right] = \\ &= \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi|\right) \left[ \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right) + \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right) - i\sin\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right) \right] = \\ &= \pi i \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi|\right) \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right) = J \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(T_F) = T_h = \frac{1}{|\xi|} \text{Im } J = \text{Im } i \frac{\pi}{|\xi|} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi|\right) \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right) = \boxed{\frac{\pi}{|\xi|} e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right)}$$

Celkem tedy máme:

$\mathcal{F}(T_F)(\xi) = 0$	pro $\xi = 0$
$\mathcal{F}(T_F)(\xi) = \frac{\pi}{ \xi } e^{-\sqrt{2}\pi \xi } \cos\left(\sqrt{2}\pi \xi \right)$	pro $\xi \neq 0$

... vidíme, že  $\mathcal{F}(T_F)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^3)$   
a dokonce  $\mathcal{F}(T_F)(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^3)$

# 4 THEORIE DISTRIBUCÍ

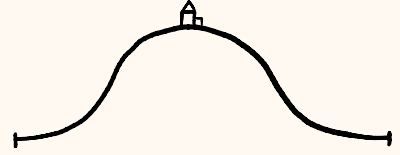
## Definice 5 (Nosič funkce).

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Nosič funkce je množina  $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$ .

→ automaticky je to uzavřená množina

→ pokud je  $\text{supp } f$  navíc omezený, je i kompaktní (kpt.)



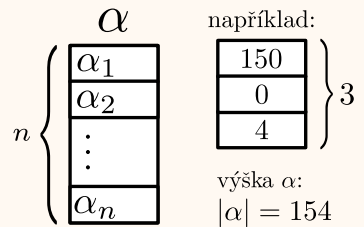
## Definice 6 (Multiindex).

• Multiindex:  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$

• Výška (stupeň) multiindexu = jeho celkový řád:  $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$

• Pro  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :  $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$

• Pro  $x \in \mathbb{R}^n$ :  $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n})$



## Definice 7 (Základní vlastnosti distribucí).

- $\mathcal{D}(\Omega)$  ... prostor funkcí  $C^\infty(\Omega)$  s kpt. nosičem v  $\Omega$  otevřená+souvislá (prostor testovacích fci)

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); \text{supp } f \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}$$

Například:  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{na } (-1, 1) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ , kde  $\text{supp } f = [-1, 1]$

- **Konvergence** v  $\mathcal{D}(\Omega)$  :

Posloupnost  $\{\varphi_m\}$  konverguje k fci  $\varphi$  v  $\mathcal{D}(\Omega)$ :  $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Leftrightarrow \varphi_m - \varphi \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0$ , pokud:

1)  $\exists K \subset \Omega$  kompaktní, že:  $\text{supp } (\varphi_m - \varphi) \subset K \quad \forall m \in \mathbb{N}$

2)  $D^\alpha \varphi_m \Rightarrow D^\alpha \varphi \Leftrightarrow D^\alpha (\varphi_m - \varphi) \Rightarrow 0$  pro každý multiindex  $\alpha$

- $\mathcal{D}'(\Omega)$  ... množina všech spojitých lineárních funkcionálů nad  $\mathcal{D}(\Omega)$ , (prostor distribucí)

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ je spojitý lineární zobrazení}\}$$

- **Spojitosť funkcionálu** v  $\mathcal{D}(\Omega)$ :  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$

- **Rovnost distribucí**:  $T_1 = T_2$  v  $\mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Poznámka 1: Platí, že  $\mathcal{D}'(\Omega)$  je duální prostor k  $\mathcal{D}(\Omega)$  (tzv. algebraický duál)

Poznámka 2: Ekvivalentní značení:  $\langle T, \varphi \rangle \equiv T(\varphi)$

**Definice 8 (Základní distribuce).**

- **Regulární distribuce**  $T_f$ : (tj. dané „obyčejnou funkcí“  $f$ )

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \forall \text{ kpt. } K \subset \Omega : f \in L^1(K)\}$$

$$\text{Pro } f \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ def. } T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) := \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(dualita)

Kde  $T_f \rightarrow$  nazýváme *regulární distribuce s hustotou  $f$* ,  $f$  je *generující funkce distribuce  $T_f$*

Poznámka:  $T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$  skoro všude v  $\Omega$

- **Diracova distribuce**  $\delta_x$ : Pro  $x \in \mathbb{R}^n$  def.  $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Poznámka 1:  $\delta_x$  není regulární distribuce, neodpovídá žádné (generující) funkci

Poznámka 2: Často značíme  $\delta \equiv \delta_0$

- **Distribuce ve smyslu hlavní hodnoty**  $T_{p.v. \frac{1}{x}}$ :

$$\text{Pro } x \in \mathbb{R} \text{ def. } T_{p.v. \frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) := \left\langle T_{p.v. \frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

**Vzorečky: Základní operace s distribucemi**

**Posunutí  $\tau_b$  o  $b \in \mathbb{R}^n$ , (kde  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ):**

- $\langle \tau_b T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-b} \varphi \rangle \equiv [\tau_{-b} \varphi](x) = \varphi(x - b)$

**Škálování  $S_\lambda$  koeficientem  $\lambda > 0$ , (kde  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ):**

- $\langle S_\lambda T, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{1}{\lambda^n} S_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \right\rangle \equiv \left[ S_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \right](x) = \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

**Součin distribuce s hladkou funkcí:**

- $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $a \in C^\infty(\Omega)$ , pak  $aT \in \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow aT(\varphi) = T(a\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Příklad:  $x\delta_0 : \langle x\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, x\varphi \rangle = x\varphi(x)|_{x=0} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x\delta_0 \equiv 0}}$

**Derivace distribuce:**

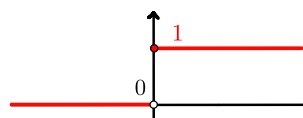
- $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\alpha$  multiindex dimense  $N$ , ( $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ) :  $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Zobrazení  $T \mapsto D^\alpha T$  jest spojité vzhledem k  $\rightarrow^*$

Příklad: Derivace *Diracovy distribuce*:  $\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} [D^\alpha \varphi](0)$

$\rightarrow$  speciálně pro  $d = 1$ , (tedy  $\Omega = \mathbb{R}$ ) :  $\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$

Příklad:  $Y(x) = \chi_{[0, \infty)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$



$Y \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \dots \exists$  regulární distribuce  $T_Y$

$$\langle T'_Y, \varphi \rangle = \langle T_Y, -\varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} Y \varphi' \, dx = - \int \varphi' \, dx = - [\varphi]_0^\infty = - (0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

### Příklad

**Zadání:** Zjednodušte zápis distribuce  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :  $x^k D^n \delta$ , kde  $\delta \equiv \delta_0$ ;  $k, n \in \mathbb{N}$

✓ **Řešení:**

$$\begin{aligned}
\langle x^k D^n \delta, \varphi \rangle &= \langle D^n \delta, x^k \varphi \rangle = \langle \delta, (-1)^n D^n x^k \varphi \rangle = \\
&= (-1)^n \left\langle \delta, \sum_{j=0}^n D^j x^k D^{(n-j)} \varphi \binom{n}{j} \right\rangle = \\
&= \text{zůstane jen jeden člen } j = k, \text{ protože } \begin{cases} j < k & \dots \text{ po derivování zůstanou členy } x^{k-n} \\ & \text{kde dosadíme 0, kvůli Diracovi} \\ j > k & \dots \text{ derivací se dostaneme na 0} \end{cases} \\
&= \left[ (-1)^k \binom{n}{k} k! D^{n-k} \varphi \right] (0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} x^k D^n \delta = (-1)^k \binom{n}{k} k! \delta^{(n-k)} & \text{pro } k \leq n \\ 0 & \text{pro } k > n \end{array}}
\end{aligned}$$

**Definice 9** (Hvězdička slabá konvergence).

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Pak  $T_k \rightharpoonup^* T$  ( $T_k$  konverguje slabě\* k  $T$ ) v  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , pokud

$$T_k(\varphi) = \langle T_k, \varphi \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle = T(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Analogicky zavádíme (slabý\*) součet řady distribucí  $\sum_{k=1}^\infty T_k =: T$  podmínkou:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Věta 12.** Charakterizace slabé\* konvergence distribucí

Pokud  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \exists \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\varphi)$  vlastní, pak  $T(\varphi) := \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\varphi)$  splňuje  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  a  $T_k \rightharpoonup^* T$

Poznámka: Pojem slabá\* limita pak odkazuje pouze na výsledek „limitění“ alias  $T$

**Lemma 4** (Postačující podmínky pro koncentraci).

(Kontrace)

Nechť  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C(\mathbb{R})$  posloupnost splňující pro  $(\forall M > 0)(\exists C > 0)$ :

$$-M \leq a < b \leq M \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f_k(x) dx \right| \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Nechť navíc pro  $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}$  omezený platí:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin [a, b] \end{cases}$

Pak  $T_k \rightharpoonup^* \delta_0$

**Příklad**

**Zadání:** Ukažte, že posloupnosti  $h_m(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(mx)}{x}$  konvergují v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  k  $\delta_0$  distribuci.

✓ **Řešení:** Pro  $\forall f_m$  dodefinujeme spojitě v  $0 (= \frac{m}{\pi}) \dots$  tedy pak  $f_m \in C(\mathbb{R})$

$$\int_a^b \frac{1}{\pi} \frac{\sin(mx)}{x} dx = \left[ \begin{array}{l} y = mx \quad a \rightarrow ma \\ dy = m dx \quad b \rightarrow mb \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{ma}^{mb} \frac{\sin(y)}{y} dy$$

$$0 \in (a, b) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_{ma}^{mb} \frac{\sin y}{y} dy \right) = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy}_{= \pi \text{ z (Residuové věty)}} = 1$$

$$\underbrace{0 \notin (a, b)}_{\substack{\text{BÚNO} \\ a, b > 0}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_{ma}^{mb} \frac{\sin y}{y} dy \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \underbrace{\left( \int_0^{bm} - \int_0^{am} \right)}_{= \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \text{ z (Residuové věty)}} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \blacksquare$$

**Příklad**

**Zadání:** Nalezněte slabou\* limitu posloupnosti temperovaných distribucí pro  $k \rightarrow \infty$

$$T_k := T_{\frac{-2k^3 x}{\pi(k^2 x^2 + 1)^2}}$$

Spočtete:  $\left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} T_k, \varphi \right\rangle$  pro  $\varphi(x) = x e^{-x^2}$ .

**Návod:** Všimněte si, že:  $\frac{d}{dx} \frac{k}{\pi(k^2 x^2 + 1)} = \frac{-2k^3 x}{\pi(k^2 x^2 + 1)^2}$   
a využijte vhodnou větu na toto téma. Uvědomte si, že věta platí i pro temperované distribuce. Pečlivě ověřte splnění jejich předpokladů.

✓ **Řešení:**

Z návodu v zadání zjevně plyne derivační vztah i pro distribuci:  $D T_{\frac{k}{\pi(k^2 x^2 + 1)}} = T_{\frac{-2k^3 x}{\pi(k^2 x^2 + 1)^2}}$

Distributivní derivace je spojitá vzhledem ke slabé\* konvergenci, chceme tedy zjistit, co dává

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{\frac{k}{\pi(k^2 x^2 + 1)}} \text{ v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ (popř. } \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$$

Protože:  $0 \leq \int_I \frac{k}{\pi} \frac{1}{k^2 x^2 + 1} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{k}{\pi} \frac{1}{k^2 x^2 + 1} dx = \left[ \begin{array}{l} kx = y \\ k dx = dy \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \left[ \overbrace{\arctg y}^{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi} \right]_{-\infty}^{\infty} = 1$

A též:  $\int_a^b \frac{k}{\pi} \frac{1}{k^2 x^2 + 1} dx = \left[ \begin{array}{l} kx = y \quad a \rightarrow ka \\ k dx = dy \quad b \rightarrow kb \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1 + y^2} = \begin{cases} 0 & \overline{-\infty \leq a < b < 0 \cup 0 < a < b \leq \infty} \\ 1 & a < 0 < b \quad \text{v limitě } \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ \frac{1}{2} & \overline{-\infty \leq a < b = 0 \cup 0 = a < b \leq \infty} \\ & \text{v limitě } \frac{1}{\pi} \left( 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \text{ nebo } \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \end{cases}$

Ověřili jsme předpoklady  
(**Lemma o koncentraci**)  
 $\Rightarrow T_k \rightharpoonup^* \delta_0$

Tedy  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle T_{\frac{k}{\pi(k^2 x^2 + 1)}}, \varphi \right\rangle = \text{koncentrační lemma} = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$   
 Proto  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle T_{\frac{-2k^3 x}{\pi(k^2 x^2 + 1)^2}}, \varphi \right\rangle = \langle D\delta, \varphi \rangle = -\langle \delta, D\varphi \rangle = -\varphi'(0)$   
 Proto pro  $\varphi(x) = x e^{-x^2}$  je  $\langle D\delta, \varphi \rangle = -\varphi'(0) = -\left( x e^{-x^2} \right)' \Big|_{x=0} = -1$

## 4.1 HOMOGENNÍ DISTRIBUCE

Homogenní distribuce - příslušné reálné funkce  $x^\lambda$  jsou homogenní ve smyslu  $(tx)^\lambda = t^\lambda x^\lambda$

Pro  $\lambda \in \mathbb{C}$  zavádíme:

$$x_+^\lambda := \begin{cases} x^\lambda & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases} \quad x_-^\lambda := (-x)_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \geq 0 \\ |x|^\lambda & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Pokud  $\operatorname{Re} \lambda > -1 \Rightarrow$  existuje regulární distribuce  $T_{x_+^\lambda}$ , protože  $x_+^\lambda \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

Pokud  $\operatorname{Re} \lambda \leq -1 \Rightarrow$  ???

**Definice 10** (Parametrické systémy distribucí).

Nechť  $k \in \mathbb{N}$ .

Pak na  $G_k := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > -k - 1, -\lambda \notin \mathbb{N}\}$  definujeme parametrické systémy distribucí:

$$\left\{ H_{x_+^\lambda} \right\}_{\lambda \in G_k} \quad \text{a} \quad \left\{ H_{x_-^\lambda} \right\}_{\lambda \in G_k} \quad \text{pomocí předpisu}$$

$$H_{x_+^\lambda} = \frac{D^k T_{x_+^{\lambda+k}}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)} \quad \text{a} \quad \langle H_{x_-^\lambda}, \varphi \rangle = \langle H_{x_+^\lambda}, \varphi(-x) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

**Vzorečky: Pravidla pro práci s homogenními distribucemi**

- $xH_{x_+^\lambda} = H_{x_+^{\lambda+1}} \quad \text{a} \quad -xH_{x_-^\lambda} = H_{x_-^{\lambda+1}}$
- $H_{x_+^0} = T_{x_+^0} = T_H$ , kde  $H$  jest Heavisideova funkce
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}_0\} : DH_{x_+^\lambda} = \lambda H_{x_+^{\lambda-1}} \quad \text{a} \quad DH_{x_-^\lambda} = \lambda H_{x_-^{\lambda-1}}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$  mají systémy  $\{H_{x_+^\lambda}\}$  a  $\{H_{x_-^\lambda}\}$  v bodě  $-k$  izolovanou singularitu

$$\operatorname{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda} = (-1)^{k-1} \frac{D^{k-1} \delta_0}{(k-1)!} \quad \text{a} \quad \operatorname{Res}_{-k} H_{x_-^\lambda} = \frac{D^{k-1} \delta_0}{(k-1)!},$$

$$\text{kde definujeme: } \langle \operatorname{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda}, \varphi \rangle = \operatorname{Res}_{-k} \langle H_{x_+^\lambda}, \varphi \rangle \quad \text{a} \quad \langle \operatorname{Res}_{-k} H_{x_-^\lambda}, \varphi \rangle = \operatorname{Res}_{-k} \langle H_{x_-^\lambda}, \varphi \rangle$$

$T_{x_+^\lambda}$  lze ale rozšířit i jinak:

$$\begin{aligned} \langle T_{x_+^\lambda}, \varphi \rangle &= \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx = \int_0^1 x^\lambda \varphi(x) dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx = \underbrace{\int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx}_{\text{dobře definováno pro: } \operatorname{Re} \lambda > -2, \lambda \neq -1} + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx \\ &= \dots = \int_0^1 x^\lambda \cdot \left( \varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \dots - \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} x^{m-1} \right) + \sum_{k=1}^m \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)! (\lambda+k)} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx \\ &\Leftrightarrow \text{a toto funguje pro } \operatorname{Re} \lambda > -m - 1, \lambda \neq -k, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Označení	Definice	Vztahy
$H_{x+}^{\lambda}$	$T_{x+}^{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > -1$  $\frac{D^k T_{x+}^{\lambda+k}}{(\lambda+1)\dots(\lambda+k)} \quad \operatorname{Re} \lambda > -k, k \in \mathbb{N}, -\lambda \notin \mathbb{N}$	$\operatorname{Res}_{-k} H_{x+}^{\lambda} = (-1)^{k-1} \frac{D^{k-1} \delta_0}{(k-1)!}$  $DH_{x+}^{\lambda} = \lambda H_{x+}^{\lambda-1}$  $xH_{x+}^{\lambda} = H_{x+}^{\lambda+1}$  $H_{x+}^0 = T_H$
$H_{x-}^{\lambda}$	$T_{(-x)+}^{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > -1$  $\langle H_{x-}^{\lambda}, \varphi \rangle = \langle H_{x+}^{\lambda}, \varphi(-x) \rangle \quad -\lambda \notin \mathbb{N}$	$\operatorname{Res}_{-k} H_{x-}^{\lambda} = \frac{D^{k-1} \delta_0}{(k-1)!}$  $DH_{x-}^{\lambda} = -\lambda H_{x-}^{\lambda-1}$  $-xH_{x-}^{\lambda} = H_{x-}^{\lambda+1}$
$H_{x+}^{\lambda}$	$\frac{H_{x+}^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$DH_{x+}^{\lambda} = H_{x+}^{\lambda-1}$  $H_{x+}^{-k} = D^{k-1} \delta_0 \quad k \in \mathbb{N}$
$H_{x-}^{\lambda}$	$\frac{H_{x-}^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$DH_{x-}^{\lambda} = -H_{x-}^{\lambda-1}$  $H_{x-}^{-k} = (-1)^{k-1} D^{k-1} \delta_0 \quad k \in \mathbb{N}$
$H_{ x ^{\lambda}}$	$H_{x+}^{\lambda} + H_{x-}^{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C}, -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{ x ^{\lambda} \operatorname{sign} x}$	$H_{x+}^{\lambda} - H_{x-}^{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C}, -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{x-2n}$	$\lim_{\lambda \rightarrow -2n} H_{ x ^{\lambda}} \quad n \in \mathbb{N}$	$H_{x-2} = T_{f.p.} \frac{1}{x^2}$
$H_{x-2n+1}$	$\lim_{\lambda \rightarrow -2n+1} H_{ x ^{\lambda} \operatorname{sign} x} \quad n \in \mathbb{N}$	$H_{x-1} = T_{p.v.} \frac{1}{x}$
$H_{(x+i0)^{\lambda}}$	$\lim_{y \rightarrow 0+} T_{(x+iy)^{\lambda}} \quad \operatorname{Re} \lambda > -1$ $H_{x+}^{\lambda} + e^{i\lambda\pi} H_{x-}^{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C}, -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{(x-i0)^{\lambda}}$	$\lim_{y \rightarrow 0-} T_{(x+iy)^{\lambda}} \quad \operatorname{Re} \lambda > -1$ $H_{x+}^{\lambda} + e^{-i\lambda\pi} H_{x-}^{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C}, -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{(x+i0)^{-k}}$	$\lim_{\lambda \rightarrow -k} H_{(x+i0)^{\lambda}} \quad k \in \mathbb{N}$	$H_{(x+i0)^{-k}} = H_{x-k} - \frac{i\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1} \delta_0$  $H_{x-k} = \frac{1}{2}(H_{(x+i0)^{-k}} + H_{(x-i0)^{-k}})$
$H_{(x-i0)^{-k}}$	$\lim_{\lambda \rightarrow -k} H_{(x-i0)^{\lambda}} \quad k \in \mathbb{N}$	$H_{(x-i0)^{-k}} = H_{x-k} + \frac{i\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1} \delta_0$  $H_{(x+i0)^{-k}} - H_{(x-i0)^{-k}} = \frac{-2i\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1} \delta_0$



**Příklad**

**Zadání:**

(i) Ukažte, že distribuce (limita je ve smyslu slabé\* konvergence na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ )

$$H_{x^{-2}} := \lim_{\lambda \rightarrow -2} H_{|x|^\lambda} \quad \text{je dobře definovaná.}$$

(ii) Ukažte, že

$$H_{x^{-2}} = H_{\text{f.p. } \frac{1}{x^2}},$$

kde

$$\langle H_{\text{f.p. } \frac{1}{x^2}}, \varphi \rangle = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$$

**Řešení:**

Z předchozí tabulky se dočteme:  $H_{|x|^\lambda} = H_{x^+_\lambda} + H_{x^-_\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C}, -\lambda \notin \mathbb{N}$

Zajímají nás homogenní distribuce na okolí  $-2$ , ale nechceme zahrnout vedlejší celá čísla.

Pro  $\lambda \in (-3, -1) \setminus \{-2\}$  máme:

$$\begin{aligned} \langle H_{|x|^\lambda}, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{D^2 H_{|x|^{\lambda+2}}}{(\lambda+2)(\lambda+1)}, \varphi \right\rangle = \left| \begin{array}{l} \text{linearita} \\ + \text{distributivní derivace} \end{array} \right| = \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} (-1)^2 \langle H_{|x|^{\lambda+2}}, D^2 \varphi \rangle = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{(dualita)} \\ |x|^{-2} \in L^1(\mathbb{R}) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} |x|^{-2} \text{ má okolo } 0 \text{ problém} \\ \text{Přecházíme k p.v. kvůli pozdějšímu per partes, zatím ještě problém není} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\lambda+2} \varphi'' dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} |x|^{\lambda+2} \varphi'' dx = [\text{P.P}] \dots \end{aligned}$$

$\pm$	Der	Int
+	$ x ^{\lambda+2}$	$\varphi''(x)$
-	$(\lambda+2)  x ^{\lambda+1} \text{sgn}(x)$	$\varphi'(x)$
+	$(\lambda+2)(\lambda+1)  x ^\lambda \text{sgn}^2(x)$	$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) - \varphi(0) \dots \text{trik}$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \left[ |x|^{\lambda+2} \varphi' \right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \left[ |x|^{\lambda+2} \varphi' \right]_{\varepsilon}^{\infty} \\ - \left[ \frac{(\lambda+2) |x|^{\lambda+1} \text{sgn}(x) \varphi}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[ \frac{(\lambda+2) |x|^{\lambda+1} \text{sgn}(x) \varphi}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \right]_{\varepsilon}^{\infty} + \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{(\lambda+2)(\lambda+1)} |x|^\lambda \varphi dx = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \left[ |x|^{\lambda+2} \varphi' \right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \left[ |x|^{\lambda+2} \varphi' \right]_{\varepsilon}^{\infty} &= \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \left[ |\varepsilon|^{\lambda+2} \varphi'(-\varepsilon) - 0 + 0 - |\varepsilon|^{\lambda+2} \varphi'(\varepsilon) \right] = \\ &= \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \left[ |\varepsilon|^{\lambda+3} \frac{\varphi'(-\varepsilon) - \varphi'(\varepsilon)}{|\varepsilon|} \right] = K \left[ |\varepsilon|^{\lambda+3} (-2) \frac{\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(-\varepsilon)}{2|\varepsilon|} \right] = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{z definice derivace} \\ \text{pro } \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{array} \right| = K \left[ |\varepsilon|^{\lambda+3} \underbrace{(-2) \varphi''(0)}_{\text{omezená}} \right] \xrightarrow[\lambda > -3]{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{1}{(\lambda+1)} |x|^{\lambda+1} \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{-1} \varphi \right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[ \frac{1}{(\lambda+1)} |x|^{\lambda+1} \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_1 \varphi \right]_{\varepsilon}^{\infty} = \left| \begin{array}{l} \text{trik z per partes} \\ \int \varphi' = \varphi(x) - \varphi(0) \\ \varphi(0) \text{ integrační konstanta} \end{array} \right| = \\
& = \frac{1}{(\lambda+1)} \left( \left[ (-x)^{\lambda+1} (\varphi(x) - \varphi(0)) \right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[ x^{\lambda+1} (\varphi(x) - \varphi(0)) \right]_{\varepsilon}^{\infty} \right) = \\
& = \tilde{K} \left( \left[ \frac{\varepsilon^{\lambda+2} \varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} - 0 - 0 + \varepsilon^{\lambda+2} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} \right] \right) = \dots
\end{aligned}$$

A jelikož platí: 
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \varepsilon = -\varepsilon \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon} = -\varphi'(0)$$

Máme: 
$$\tilde{K} \left( \left[ \frac{\varepsilon^{\lambda+2} \varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} + \varepsilon^{\lambda+2} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} \right] \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tilde{K} (\varepsilon^{\lambda+2} \cancel{\varphi'(0)} + \varepsilon^{\lambda+2} \cancel{\varphi'(0)}) = 0$$

Celkem tedy: 
$$\langle H_{|x|^\lambda}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) |x|^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx$$

Nyní lze provést limitu  $\lim_{\lambda \rightarrow -2}$ , neboť je stejnoměrná vůči  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$  a tudíž lze obě limity prohodit.

Potřebuji rozdělit limity tak, abych se odrazil od nuly, proto vztah rozepíšeme do 4 integrálů:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow -2} \langle H_{|x|^\lambda}, \varphi \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow -2} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 + \int_1^{\infty} \right) |x|^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right) = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow -2} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) |x|^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right) + \lim_{\lambda \rightarrow -2} \left( \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) |x|^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right) = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow -2} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) |x|^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right) + \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) |x|^{-2} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow -2} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) |x|^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right) + \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx = \dots
\end{aligned}$$

K prohození limit pro integrály s mezemi obsahujícími  $\varepsilon$  potřebujeme využít Taylorův rozvoj  $\varphi(x)$  v 0

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi), \quad \xi \in (0, x) \quad \dots \text{poslední člen} = \text{Lagrangeův tvar zbytku}$$

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi), \quad \xi \in (0, x)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow -2} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) |x|^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow -2} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) |x|^\lambda \left( \overbrace{x\varphi'(0)}^{=0} + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi) \right) dx \right) = \\
\left| \int \text{přes symetrické meze} \right| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) |x|^{-2} \left( \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi) \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) \frac{\varphi'(0)}{x} + \frac{1}{2}\varphi''(\xi) dx =
\end{aligned}$$

Opět jsme do integrálu přičetli člen  $x\varphi'(0) = 0$ , čímž se jeho hodnota nezměnila. Nyní ale již máme prohozené limity. Čehož jsme chtěli dosáhnout. Všimneme si, že:

$$\frac{\varphi'(0)}{x} + \frac{1}{2}\varphi''(\xi) = \frac{1}{x^2} \left( x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi) \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Taylor} \\ \text{viz výše} \end{array} \right| = \frac{1}{x^2} (\varphi(x) - \varphi(0))$$

A konečně dostáváme:

$$\boxed{\langle H_{\text{f.p. } \frac{1}{x^2}}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx}$$

## 4.2 TEMPEROVANÉ DISTRIBUCE

Temperované distribuce

- Tvoří podmnožinu distribucí
- Musí dávat smysl jejich dualita s testovacími funkcemi nejen v  $\mathcal{D}$  (jako u standardních distribucí), ale i ve Schwartzově prostoru  $\mathcal{S}$ , což je větší třída funkcí.

**Definice 11** (Prostor temperovaných distribucí  $\mathcal{S}'$ ).

Připomenutí vlastností **Schwartzova prostoru**:

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty} < \infty; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ (multiindexy)} \right\}$$

$$\text{Konvergence na } \mathcal{S} : \quad f_m \xrightarrow{\mathcal{S}} f \Leftrightarrow \|f_m - f\|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

**Prostor temperovaných distribucí**:

$$\boxed{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \dots \text{ množina spojitých lineárních funkcionálů nad } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \text{ kde spojitost je:}$$

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Rightarrow \langle T, \varphi_k \rangle \rightarrow 0 \quad \text{a} \quad T_k \rightharpoonup^* T \text{ v } \mathcal{S}' \Leftrightarrow \langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

**Temperované distribuce mají větší prostor testovacích funkcí:**

$$\mathcal{S}(\Omega) : \quad \mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathcal{S}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega) \\ \mathcal{S}'(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}(\Omega)$$

**Definice 12** (Temperované distribuce).

**Temperované distribuce** jsou speciální případ distribucí:  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

(Například pro  $f = e^{2x^2}$ :  $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ale  $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ )

Platí:  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  a  $|f(x)| \leq C(1+|x|^2)^n \Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  (nejvyšší polynomiální růst v  $\infty$ )  
 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  pro  $p \in [1, \infty] \Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

**Definice 13** (Pomalou rostoucí funkce).

(Pomalou)

**Pomalou rostoucí funkce**  $\Theta_M$ :

$$\Theta_M := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n) (\exists m_\alpha \in \mathbb{N}_0) (\exists c_\alpha > 0) : \|D^\alpha f(x)\| \leq c_\alpha (1+|x|^2)^{m_\alpha} \right\}$$

Jest-li  $a \in \Theta_M$ , pak  $\varphi \mapsto a\varphi$  spojitě zobrazuje  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  do  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definujeme:

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$a \in \Theta_M \quad aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \quad \langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ regulární, } b \in \mathbb{R}^n \quad \langle T(\mathbf{A}y + b), \varphi(y) \rangle := \left\langle T(x), \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \cdot \varphi(\mathbf{A}^{-1}(x - b)) \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

**Poznámka:** Narozdíl od klasických distribucí, regulární temperované distribuce můžeme vytvořit **POUZE pro pomalu rostoucí funkce!**

### Vzorečky: Laplaceův operátor pro radiální funkce

Nechť  $f$  je **radiální funkce** na  $\mathbb{R}^n$ , tj.  $f(x) = R(r)$ , kde  $r = |x|, n \geq 2$

Nechť fce  $R(r), R'(r), R''(r)$  existují a jsou spojité na  $\mathbb{R}_+$ , jsou (**Pomalou rostoucí funkce**) a  $\Delta f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$

Dále necht existuje limita:  $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} R'(r) = A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Potom:  $\Delta T_f = T_{\Delta f} + A \kappa_n \delta_0$

kde:  $\Delta T_f \dots$  „distributivní Laplace“,  $T_{\Delta f} \dots$  regulární distribuce pro funkci  $\Delta f$ ,  
 $\kappa_n \dots$  povrch jednotkové koule v  $\mathbb{R}^n$ , tedy  $\kappa_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

### Příklad

**Zadání:** Určete distribuci  $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  pro:

$$u(x) = |x|^\lambda, \quad \lambda \geq 2 - n, n \geq 2$$

### ✓ Řešení:

Máme-li radiální funkci...

$$\left. \begin{aligned} R(r) &= r^\lambda \\ R'(r) &= r^{\lambda-1} \\ R''(r) &= \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} \end{aligned} \right\} \text{ Funkce spojité na } \mathbb{R}_+ \text{ a pomalu rostoucí}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\lambda}{2}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\lambda}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} \cdot 2x_j \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \lambda \left( \frac{\lambda}{2} - 1 \right) (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\lambda}{2}-2} 2x_j x_j + (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} \right] = \\ &= \lambda(\lambda-2)|x|^{\lambda-4}|x|^2 + \lambda n|x|^{\lambda-2} \end{aligned}$$

$$\Delta f(x) = \lambda |x|^{\lambda-2} (\lambda-2+n) = \lambda(\lambda-2+n) r^{\lambda-2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} R'(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} \lambda r^{\lambda-1} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \lambda r^{\lambda+n-2} = \begin{cases} 0 & (\lambda > 2-n) \\ 2-n & (\lambda = 2-n) \\ \infty & (\lambda < 2-n) \end{cases}$$

Závěr: 
$$\Delta T_{|x|^2} = \begin{cases} T_{\Delta f} = \lambda(\lambda+n-2)T_{|x|^{\lambda-2}} & \text{pro } \lambda > 2-n \\ T_{\Delta f} = 0 + (2-n)\kappa_n \delta_0 & \text{pro } \lambda = 2-n \end{cases}$$

### Příklad

**Zadání:** Zjednodušte zápis distribuce  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ :

$$T = |x|^2 \Delta \delta_0, \quad \text{kde } \Delta \dots \text{ Laplaceův operátor, } \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

✓ **Řešení:**  $\langle |x|^2 \Delta \delta_0, \varphi \rangle = \langle \Delta \delta_0, |x|^2 \varphi \rangle = \left| \begin{array}{l} (-1)^2 = 1 \\ + \text{derivate distribuce} \\ + \text{linearita} \end{array} \right| = \langle \delta_0, \Delta(|x|^2 \varphi) \rangle = \dots$

$$\Delta(|x|^2 \varphi) : \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j^2 \varphi) = 2\delta_{ij} x_j \varphi + x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( 2\delta_{ij} \varphi + x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = 2\delta_{ij} \delta_{ij} \varphi + 2\delta_{ij} x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + 2\delta_{ij} x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + x_j^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$$

$$\delta_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (x_j^2 \varphi) \right) = 2\delta_{ij} \varphi(0) \quad \Rightarrow \quad \delta_0 (\Delta |x|^2 \varphi) = 2n \varphi(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2n \delta_0}$$

**Definice 14** (Skládání distribucí s difeomorfismy).

**Difeomorfismus** = „difeo-“ → diferencovatelné zobrazení, „morfismus“ → vzájemně jednoznačné zobrazení

Mějme  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  je  $C^\infty$  difeomorfismus zobrazující  $\Omega$  na  $\tilde{\Omega}$ . Necht dále  $T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$

$$\Rightarrow \text{Pak } (T \circ h) \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ je definováno jako } \langle T \circ h, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|} \cdot \varphi(h^{-1}(y)) \right\rangle$$

### Fourierovy řady vs. distribuce

Necht  $f \in L^1((0, 1))$ , její Fourierovy koeficienty:  $c_k := \int_0^1 f(x) e^{2\pi i k x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\text{její Fourierova řada jest: } f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$$

Pro  $f \in L^1$  ale **neplatí** rovnost mezi  $f$  a její FR! Můžeme ale integrovat!  $F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{2\pi i k} e^{2\pi i k x} + c_0 x + d_0$

(Můžeme integrovat tak dlouho, dokud řada vpravo nebude konvergovat stejnoměrně, což je případ, kdy  $c_k$  roste jako polynom v  $k$ .)

$$\text{Dále: } \langle T_F, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} F \varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m \frac{c_k}{2\pi i k} e^{2\pi i k x} + c_0 x + d_0 \right) \varphi dx, \quad \left[ \begin{array}{l} \text{kde můžeme prohodit lim a } f, \\ \text{řada totiž konverguje stejnoměrně.} \end{array} \right]$$

$$\langle DT_F, \varphi \rangle = -\langle T_F, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} F \varphi' = \int_{\mathbb{R}} F' \varphi = \int_{\mathbb{R}} f \varphi = \langle T_f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\langle DT_F, \varphi \rangle = -\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m \frac{c_k}{2\pi i k} e^{2\pi i k x} + c_0 x + d_0 \right) \varphi' dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k=-m}^m c_k e^{2\pi i k x} \right) \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

A odtud  $T_f = \lim_{m \rightarrow \infty} T_{\sum_{k=-m}^m c_k e^{2\pi i k x}}$

### 4.3 FOURIEROVA TRANSFORMACE DISTRIBUCÍ

**Definice 15** (Fourierova transformace distribucí).

(FTD)

Pro  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  definujeme její  $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  a inverzní  $\mathcal{F}^{-1}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  předpisy:

$$\begin{cases} \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle & \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle & \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Platí:  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T$  a  $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = T$   $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

**Vzorečky: Vlastnosti Fourierovy transformace distribucí**

(Vlastnosti FTD)

- **Linearita:**  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$  jsou lineární zobrazení
- **Spojitosť:**  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$  jsou spojitá zobrazení z  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  na  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  (vzájemný isomorfismus)
- **Transformace testovací funkce:**

$\mathcal{F}(\varphi)$  je „klasická“ Fourierova transformace (na funkcích):

$$\text{FT: } \hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \quad \text{kde: } \langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$$

$$\text{Zpětná FT: } \check{\varphi}(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi \quad \text{kde: } \langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$$

- **Vlastnosti inverzní transformace:**  $[\mathcal{F}^{-1}(f)](\xi) = [\mathcal{F}(f)](-\xi)$   
 $\overline{[\mathcal{F}^{-1}(f)](\xi)} = [\mathcal{F}(\bar{f})](\xi)$
- **Posunutí v parametru:**  $[F(f(x-b))](\xi) = e^{-2\pi i \langle b, \xi \rangle} [F(f)](-\xi), \quad b \in \mathbb{R}^n$   
 $[F(f)](\xi - \alpha) = [F(e^{2\pi i \langle x, \alpha \rangle} f(x))](\xi), \quad \alpha \in \mathbb{R}^n$
- **Škálování:**  $[\mathcal{F}(\varepsilon f)](\xi) = |\varepsilon|^{-n} [F(f)](\xi \varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon > 0$
- Fourierova transformace (včetně inverzní) zachovává paritu funkce (sudost/lichost)
- Fourierova transformace (včetně inverzní) zachovává radiální symetričnost funkce
- **Transformace derivace v multiindexu:**

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = (2\pi i \xi)^\alpha [\mathcal{F}(T)](\xi) \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n; \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(x) = (-2\pi i \xi)^\alpha [\mathcal{F}^{-1}(f)](x) \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

- **Multiindexová derivace transformace:**

$$D^\alpha [\mathcal{F}(f)](\xi) = [\mathcal{F}(-2\pi i x)^\alpha f(x)](\xi) \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n; \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$$

$$D^\alpha [\mathcal{F}^{-1}(f)](x) = [\mathcal{F}^{-1}(2\pi i \xi)^\alpha f(\xi)](x) \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

- **Funkce  $T_1$ :**  $\mathcal{F}(\delta) = T_1 \equiv 1$  a  $\mathcal{F}(T_1) = \delta$

### 4.3.1 KONVOLUCE DISTRIBUCÍ A JEJÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

**Definice 16** (Konvergence k 1 - k definici konvoluce distribucí).

(24.3.11)

Nechť  $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ . Píšeme, že  $\eta_k \rightarrow 1$  v  $\mathbb{R}^{2N}$ , jestliže:

(i) pro každý kompaktní  $K \subset \mathbb{R}^{2N}$  existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  takové, že

$$\eta_k \equiv 1 \quad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$  je  $\{D^\alpha \eta_k\}_{k=1}^\infty$  stejně stejnoměrně omezená.

**Definice 17** (Konvoluce distribucí).

(24.3.13)

Nechť  $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  a distribuce  $T \otimes G$  připouští prodloužení (spojité vůči slabé\* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle := \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y) \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde  $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$  splňuje  $\eta_k \rightarrow 1$  v  $\mathbb{R}^{2N}$  a navíc je naše limita nezávislá na volbě posloup.  $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ .

Pak distribuci  $T * G$  (konvoluce distribucí  $T$  a  $G$ ) definujeme předpisem:

$$\langle T * G, \varphi \rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

**Věta 13.** O vlastnostech konvoluce distribucí

(24.3.17)

Nechť  $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  a  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ .

(i) Jestliže existuje  $T * G$ , pak existuje i  $G * T$  a platí  $T * G = G * T$  (tedy konvoluce je **komutativní**).

(ii) Jestliže existuje  $T * G$ , pak existují i  $D^\alpha T * G$  a  $T * D^\alpha G$  a platí

$$D^\alpha(T * G) = D^\alpha T * G = T * D^\alpha G.$$

(iii) Konvoluce distribucí však **NENÍ asociativní**, např. platí:

$$(T_1 * D\delta_0) * T_H = T_0 * T_H = T_0 \quad \text{ale} \quad T_1 (D\delta_0 * T_H) = T_1 * \delta_0 = T_1$$

**Příklad**

(24.3.16)

Dokažte, že pokud  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ , pak  $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$ .

✓ **Řešení:**

Skutečně, na jednu stranu máme:

$$\begin{aligned} \langle T * \delta_0, \varphi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(x) \otimes \delta_0(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y) \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(x), \langle \delta_0(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y) \rangle \rangle = [\eta_k(x,0) \varphi(x) = \varphi(x) \text{ pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ dost velké}] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(x), \eta_k(x,0) \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Druhou rovnost nám pak dává komutativita tenzorového součinu.

Nechť  $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ .

- (i) Jestliže distribuce  $G$  má kompaktní nosič, pak existuje  $T * G$  a navíc platí

$$\langle T * G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  je libovolná funkce splňující  $\eta \equiv 1$  na nějakém okolí  $\text{supp } G$ .

- (ii) Jestliže distribuce  $G$  má kompaktní nosič a navíc  $T = T_f$  je regulární distribuce reprezentovaná funkcí  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ , pak  $T_f * G$  je regulární distribuce reprezentovaná funkcí

$$x \mapsto \langle \tilde{G}(y), f(x-y) \rangle,$$

kde  $\tilde{G}$  je prodloužení distribuce  $G$  na prvek  $(C^\infty(\mathbb{R}^N))'$ .

- (iii) Nechť  $N = 1$  a  $\text{supp } T$  spolu se  $\text{supp } G$  jsou zleva omezené. Pak  $T * G$  existuje a platí

$$\langle T * G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

kde  $\xi, \eta$  jsou libovolné  $C^\infty(\mathbb{R})$ -funkce splňující  $\xi \equiv 1$  na nějakém okolí nosiče  $T$  a  $\eta \equiv 1$  na nějakém okolí  $\text{supp } G$ , a též  $\xi \equiv 0$  a  $\eta \equiv 0$  na nějakém intervalu tvaru  $(-\infty, -K)$ ,  $K > 0$ .

- (i) Nechť  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  a  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  má kompaktní nosič. Pak  $T * G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  a

$$\langle T * G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

kde  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  je libovolná funkce splňující  $\eta \equiv 1$  na nějakém okolí  $\text{supp } G$ .

- (ii) Pro zafixované  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  s kompaktním nosičem je operace  $T \mapsto T * G$  spojitě zobrazení  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  do  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ .

Pro zafixované  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  je operace  $G \mapsto T * G$  spojitě zobrazení distribucí z  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  s nosiči obsaženými ve společné kompaktní množině do  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ .

- (iii) Nechť  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  a  $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ . Pak existuje  $T * G_\eta$  a jedná se o regulární temperovanou distribuci reprezentovanou funkcí  $h \in \Theta_M$ .

Navíc platí  $\langle T * G_\eta, \varphi \rangle = \langle T, \eta(-x) * \varphi \rangle$  pro všechna  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ,

kde  $\eta(-x) * \varphi := \int_{\mathbb{R}^N} \eta(y-x)\varphi(y)dy$ , a existuje  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  takové, že pro všechna  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$  platí ( $C$  závisí na  $\alpha$ )

$$D^\alpha(T * G_\eta) = T_{D^\alpha h} \quad \text{a} \quad |D^\alpha h(x)| \leq C \|T\|_{\mathcal{S}'^{-m}(\mathbb{R}^N)} (1 + |x|^2)^m \|\eta\|_{\mathcal{S}^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^N)}.$$



- (i) Necht  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  má kompaktní nosič. Pak  $\mathcal{F}(T)$  je regulární distribuce reprezentovaná funkcí  $h \in \Theta_M$  a lze psát

$$h(\xi) = \left\langle T(x), \eta(x) e^{-i2\pi(x,\xi)} \right\rangle \quad \text{pro } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

kde  $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  je libovolná funkce, která se rovná jedné na nějakém okolí  $\text{supp } T$ . Dále pro každé  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$  platí

$$D^\alpha \mathcal{F}(T) = T_{D^\alpha h}$$

a existují  $c_\alpha \geq 0$  a  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  taková, že

$$|D^\alpha h(\xi)| \leq c_\alpha \|T\|_{\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \quad \text{pro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

- (ii) Necht  $T$  je taková distribuce, že pro jisté  $\sigma > 0$  je  $e^{\sigma|x|^2} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ . Pak  $\mathcal{F}(T)$  je regulární distribuce reprezentovaná funkcí  $g \in \Theta_M$  a lze psát

$$g(\xi) = \left\langle e^{\sigma|x|^2} T(x), e^{-i2\pi(x,\xi)} e^{-\sigma|x|^2} \right\rangle \quad \text{pro } \xi \in \mathbb{R}^N$$

**Fourierova transformace konvoluce funguje dobře pro následující případy:**

- 1) 1 distribuce má kompaktní nosič
- 2) 1 distribuce je regulární distribuce odpovídající funkci z  $S$  (umíme dobře charakterisovat)
- 3) 2 regulární distribuce integrovatelných funkcí

Necht  $T, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  a  $G$  má kompaktní nosič. Pak

$$\mathcal{F}(T * G) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(G),$$

kde pravou stranu čteme jako  $g\mathcal{F}(T)$ , přičemž  $g \in \Theta_M$  je funkce reprezentující  $\mathcal{F}(G)$ .

- (i) Necht  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  a  $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ . Pak

$$\mathcal{F}(T * G_\eta) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(G_\eta),$$

kde pravou stranu čteme jako  $g\mathcal{F}(T)$ , přičemž  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  je funkce reprezentující  $\mathcal{F}(G_\eta)$ .

- (ii) Necht  $T_f, G_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  jsou regulární distribuce, přičemž distribuce  $T_f$  je reprezentovaná funkcí  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , distribuce  $G_g$  je reprezentovaná funkcí  $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ ;  $p, q \in [1, 2]$  a  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{3}{2}$ . Pak

$$\mathcal{F}(T_f * G_g) = \mathcal{F}(T_f)\mathcal{F}(G_g),$$

kde pravou stranu chápeme jako regulární distribuci  $T_h$  reprezentovanou součinem reprezentujících funkcí distribucí  $\mathcal{F}(T_f)$  a  $\mathcal{F}(G_g)$ . Navíc  $h \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ , kde  $r \in [1, 2]$  a je dáno vztahem  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ .

**Definice 18** (Besselovy funkce).

(24.7.4)

Nechť  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ . Pak Besselovu funkci prvního druhu řádu  $s$  definujeme předpisem

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Pro  $s \in \{-1, -2, \dots\}$  dále definujeme

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=-s}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

**Význam Besselových funkcí:**

Besselovy funkce řeší Besselovu rovnici řádu  $s$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - s^2)y = 0,$$

hledáme-li řešení ve tvaru  $x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  (pro každé  $s \in \mathbb{R}$  vyjdou jako řešení  $J_s$  a  $J_{-s}$ , tato řešení jsou pro  $s \in \mathbb{Z}$  lineárně závislá).

**Věta 19.** O Fourierově transformaci radiálně symetrické funkce

(24.7.8)

Nechť  $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$  je radiálně symetrická funkce,  $T_F$  je temperovaná distribuce a funkce  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je definovaná předpisem

$$F(x) = f(|x|) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^N.$$

Jestliže existují  $C > 0$  a  $K > 0$  taková, že

$$h_R(\xi) := \int_0^R 2\pi f(r) r \left(\frac{r}{|\xi|}\right)^{\frac{N}{2}-1} J_{\frac{N}{2}-1}(2\pi r|\xi|) dr$$

splňuje

$$|h_R(\xi)| \leq C \left( |\xi|^K + |\xi|^{\frac{1}{K}-N} \right) \quad \text{pro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ a } R > 0$$

a pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  existuje

$$h(\xi) := \lim_{R \rightarrow \infty} h_R(\xi),$$

pak  $\mathcal{F}(T_F)$  je regulární temperovaná distribuce reprezentovaná funkcí  $h$ .

Distribuce	Fourierova transformace
$f \in L^1(\mathbb{R}^N), T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	$T_{\mathcal{F}(f)}, \mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i(x,\xi)} dx$
$f \in L^2(\mathbb{R}^N), T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	$T_{\mathcal{F}(f)}, \mathcal{F}(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} f(x) e^{-2\pi i(x,\xi)} dx$
$\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(\delta) = T_1$
$T_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(T_1) = \delta$
$T_{x^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(T_{x^n}) = \frac{1}{(-2\pi i)^n} D^n \delta$
$D^n \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(D^n \delta) = (2\pi i)^n T_{\xi^n}$
$T_{e^{2\pi i b x}} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}(T_{e^{2\pi i b x}}) = \delta_b$
$T_{\sin(2\pi b x)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}(T_{\sin(2\pi b x)}) = \frac{1}{2i}(\delta_b - \delta_{-b})$
$T_{\cos(2\pi b x)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}(T_{\cos(2\pi b x)}) = \frac{1}{2}(\delta_b + \delta_{-b})$
$T_{\sinh(2\pi b x)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}(T_{\sinh(2\pi b x)}) = \frac{1}{2}(\delta_{-ib} - \delta_{ib})$
$T_{\cosh(2\pi b x)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}(T_{\cosh(2\pi b x)}) = \frac{1}{2}(\delta_{ib} + \delta_{-ib})$
$H_{x_+^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}\left(\frac{H_{x_+^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = \mathcal{F}(H_{\chi_+^\lambda}) = \frac{e^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^{\lambda+1}} H_{(\xi-i0)^{-\lambda-1}}$
$T_{x_+^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(T_{x_+^n}) = \frac{n!}{(2\pi i)^{n+1}} H_{\xi^{-n-1}} + \frac{1}{2(-2\pi i)^n} D^n \delta$
$T_H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi i} T_{p.v.\frac{1}{\xi}} + \frac{1}{2} \delta$
$H_{x_-^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}\left(\frac{H_{x_-^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = \mathcal{F}(H_{\chi_-^\lambda}) = \frac{e^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^{\lambda+1}} H_{(\xi+i0)^{-\lambda-1}}$
$H_{ x ^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, -\lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{ x ^\lambda}) = \frac{-2\Gamma(\lambda+1)}{(2\pi)^{\lambda+1}} \sin(\lambda\frac{\pi}{2}) H_{ \xi ^{-\lambda-1}}$
$T_{ x } \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(T_{ x }) = \frac{-1}{2\pi^2} H_{ \xi ^{-2}} = \frac{-1}{2\pi^2} T_{f.p.\frac{1}{\xi^2}}$
$H_{ x ^\lambda \text{ sign } x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{ x ^\lambda \text{ sign } x}) = \frac{-2i\Gamma(\lambda+1)}{(2\pi)^{\lambda+1}} \cos(\lambda\frac{\pi}{2}) H_{ \xi ^{-\lambda-1} \text{ sign } \xi}$
$T_{\text{sign } x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$	$\mathcal{F}(T_{\text{sign } x}) = \frac{1}{i\pi} T_{p.v.\frac{1}{x}}$
$H_{x^{-2n}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(H_{x^{-2n}}) = \frac{(-1)^n \pi (2\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} T_{ \xi ^{2n-1}}$
$H_{x^{-2}} = T_{f.p.\frac{1}{x^2}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(H_{x^{-2}}) = -2\pi^2 T_{ \xi }$
$H_{x^{-2n+1}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(H_{x^{-2n+1}}) = \frac{(-1)^n i\pi (2\pi)^{2n-2}}{(2n-2)!} T_{ \xi ^{2n-2} \text{ sign } \xi}$
$H_{x^{-1}} = T_{p.v.\frac{1}{x}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(H_{x^{-1}}) = -i\pi T_{\text{sign } \xi}$
$H_{(x+i0)^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{(x+i0)^\lambda}) = \frac{e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^\lambda \Gamma(-\lambda)} H_{\xi_+^{-\lambda-1}}$
$H_{(x-i0)^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{(x-i0)^\lambda}) = \frac{e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^\lambda \Gamma(-\lambda)} H_{\xi_-^{-\lambda-1}}$
$H_{(x+i0)^{-k}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad k \in \mathbb{N},$ $k = 2n \text{ nebo } k = 2n - 1$	$\mathcal{F}(H_{(x+i0)^{-2n}}) = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} T_{\xi_+^{2n-1}}$ $\mathcal{F}(H_{(x+i0)^{-2n+1}}) = \frac{(-1)^n i (2\pi)^{2n-1}}{(2n-2)!} T_{\xi_-^{2n-2}}$
$H_{(x-i0)^{-k}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad k \in \mathbb{N},$ $k = 2n \text{ nebo } k = 2n - 1$	$\mathcal{F}(H_{(x-i0)^{-2n}}) = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} T_{\xi_-^{2n-1}}$ $\mathcal{F}(H_{(x-i0)^{-2n+1}}) = -\frac{(-1)^n i (2\pi)^{2n-1}}{(2n-2)!} T_{\xi_-^{2n-2}}$
$H_{ x ^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}\left(\frac{H_{ x ^\lambda}}{\Gamma(\frac{\lambda+N}{2})}\right) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2}) \pi^{\lambda+\frac{N}{2}}} H_{ \xi ^{-\lambda-N}}$

## Příklad

### Zadání:

(i) Necht

$$F_n := n \left( \delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0 \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Ukažte, že se jedná o posloupnost temperovaných distribucí a že  $F_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$   
b) Nalezněte  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  takovou, že  $F_n \rightharpoonup^* F$  v  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$   
c) Přímým výpočtem ověřte, že skutečně platí:

$$\mathcal{F}(F_n) \rightharpoonup^* \mathcal{F}(F)$$

(ii) Necht

$$G_n := n^4 \left( \delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 4\delta_{\frac{1}{2n}} - 4\delta_{-\frac{1}{2n}} + 6\delta_0 \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

- d) Ukažte, že posloupnost  $G_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a určete, k jaké distribuci tato posloupnost slabě hvězdička konverguje.

### Řešení:

- a)  $F_n := n \left( \delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0 \right)$ :  $\delta_{\frac{1}{n}}, \delta_0$  jsou temperované distribuce (distribuce s kompaktním nosičem),  
 $F_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , neboť je to lineární kombinace dvou distribucí  $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

b) Aplikujeme testovací funkci  $\varphi$  na  $T_n$

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle F_n, \varphi \rangle &= n \langle \delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0, \varphi \rangle = n \left( \varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0) \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Taylorův polynom v bodě 0:} \\ T_{0,f}^k(x) = f(0) + \sum_{j=1}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (x-0)^j \end{array} \right| \\ &= n \left( \cancel{\varphi(0)} + \varphi'(0) \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\varphi''(0)}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right) - \cancel{\varphi(0)} \right) \\ &= \varphi'(0) + \varphi''(0) \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \varphi'(0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{\varphi'(0) = -\langle \delta'_0, \varphi \rangle} \\ &\Rightarrow \boxed{F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} -\delta'_0 = -D\delta_0} \end{aligned}$$

c)  $\mathcal{F}(F_n) \rightharpoonup^* \mathcal{F}(F)$

$$\boxed{\text{LS:}} \quad \mathcal{F}(F_n) = n \left( \mathcal{F}\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right) - \mathcal{F}(\delta_0) \right) = n\mathcal{F}\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right) - nT_1 = \dots$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right), \varphi \rangle &= \left| \begin{array}{l} \text{Z (definice) FT} \\ \text{distribucí} \end{array} \right| = \langle \delta_{\frac{1}{n}}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \left| \begin{array}{l} \text{(Vlastnosti)} \\ \text{FT distribucí} \end{array} \right| = \left\langle \delta_{\frac{1}{n}}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i(x, \xi)} dx \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-\frac{2\pi i x}{n}} dx = \left[ \int_{\mathbb{R}} \varphi f = \langle T_f, \varphi \rangle \right] = \langle T_{e^{-\frac{2\pi i x}{n}}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(F_n), \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} n \left( e^{-\frac{2\pi i x}{n}} - 1 \right) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{e^{-\frac{2\pi i x}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}_{\text{je odhadnuto konst.} \cdot x} \varphi(x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{Lebesgueova věta} \\ \text{o majorisované} \\ \text{konvergenci} \end{array} \right| = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{-2\pi i x \frac{e^{-\frac{2\pi i x}{n}} - 1}{-\frac{2\pi i x \frac{1}{n}}}}_{\rightarrow 1} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x) \varphi(x) dx = \langle T_{-2\pi i x}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{PS:}} \quad \mathcal{F}(F) &= \mathcal{F}(-D\delta_0) = \langle \mathcal{F}(-D\delta_0), \varphi \rangle = (\text{FTD}) = \langle -D\delta_0, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = (-1)^1 \langle \delta_0, -D\mathcal{F}(\varphi) \rangle = \\
&= D(\mathcal{F}(\varphi)(0)) = (\text{Vlastnosti FTD}) = [\mathcal{F}(-2\pi i x)^1 \varphi(x)](\xi) \Big|_{\xi=0} = \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x) \varphi(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \Big|_{\xi=0} = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x) \varphi(x) dx = \langle T_{-2\pi i x}, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{LS:}} = \boxed{\text{PS:}} \quad \blacksquare$$

d)  $G_n := n^4 \left( \delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 4\delta_{\frac{1}{2n}} - 4\delta_{-\frac{1}{2n}} + 6\delta_0 \right)$ ,  $G_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , neboť je lineární kombinací pěti  $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle G_n, \varphi \rangle &= n^4 \left\langle \delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 4\delta_{\frac{1}{2n}} - 4\delta_{-\frac{1}{2n}} + 6\delta_0, \varphi \right\rangle = \\
&= n^4 \left( \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - 4\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) - 4\varphi\left(-\frac{1}{2n}\right) + 6\varphi(0) \right) = \left| \text{Taylorův rozvoj} \right| \\
&= n^4 \left[ \cancel{\varphi(0)} + \cancel{\varphi'(0)} \frac{1}{n} + \cancel{\frac{\varphi''(0)}{2}} \frac{1}{n^2} + \cancel{\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}} \frac{1}{n^3} + \frac{\varphi^{(4)}(0)}{24} \frac{1}{n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right) \right. \\
&\quad + \cancel{\varphi(0)} - \cancel{\varphi'(0)} \frac{1}{n} + \cancel{\frac{\varphi''(0)}{2}} \frac{1}{n^2} - \cancel{\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}} \frac{1}{n^3} + \frac{\varphi^{(4)}(0)}{24} \frac{1}{n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right) \\
&\quad - 4\cancel{\varphi(0)} - 4\cancel{\varphi'(0)} \frac{1}{2n} - 4\cancel{\frac{\varphi''(0)}{2}} \frac{1}{4n^2} - 4\cancel{\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}} \frac{1}{8n^3} - 4\frac{\varphi^{(4)}(0)}{24} \frac{1}{16n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right) \\
&\quad - 4\cancel{\varphi(0)} + 4\cancel{\varphi'(0)} \frac{1}{2n} - 4\cancel{\frac{\varphi''(0)}{2}} \frac{1}{4n^2} + 4\cancel{\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}} \frac{1}{8n^3} - 4\frac{\varphi^{(4)}(0)}{24} \frac{1}{16n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right) \\
&\quad \left. + 6\cancel{\varphi(0)} \right] = \frac{\varphi^{(4)}(0)}{12} - \frac{\varphi^{(4)}(0)}{12} \frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{\frac{\varphi^{(4)}(0)}{16} = \frac{1}{16} \langle D^4 \delta_0, \varphi \rangle} \\
\Rightarrow \quad &\boxed{G_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} * \frac{1}{16} D^4 \delta_0}
\end{aligned}$$

### 4.3.2 KONVOLUČNÍ ROVNICE

#### Příklad

**Zadání:** Zjednodušte zápis distribuce

$$G = e^{-(x+1)^2} (T_{|x|} * \delta_0''') + (\delta_b'' * T_{|x|})$$

tak, aby byl výsledek zapsán pomocí lineárních kombinací Diracovy distribuce a její derivace s nosičem ve vhodných bodech.

#### ✓ Řešení:

$$\begin{aligned} \bullet T_{|x|} * D^3 \delta_0 &= [(2. \text{ vlastnost konvoluce distribucí})] = DT_{|x|} * D^2 \delta_0 = T_{\text{sgn}(x)} * D^2 \delta_0 = DT_{\text{sgn}(x)} * D \delta_0 = \\ &= 2 \delta_0 * D \delta_0 = 2 (\delta_0 * D \delta_0) = [\text{konvoluce s Diracem}] = 2 D \delta_0 = 2 \delta_0' \end{aligned}$$

A proto:

$$\begin{aligned} \langle e^{-(x+1)^2} T_{|x|} * D^3 \delta_0, \varphi \rangle &= \langle T_{|x|} * D^3 \delta_0, e^{-(x+1)^2} \varphi \rangle = \langle 2 \delta_0', e^{-(x+1)^2} \varphi \rangle = 2(-1)^1 \langle \delta_0, D(e^{-(x+1)^2} \varphi) \rangle = \\ &= -2 \langle \delta_0, (e^{-(x+1)^2})' \varphi + \varphi' e^{-(x+1)^2} \rangle = -2 \langle \delta_0, e^{-(x+1)^2} (-2(x+1)) \varphi + \varphi' e^{-(x+1)^2} \rangle = \\ &= -2 (e^{-1}(-2)\varphi(0) + \varphi'(0) e^{-1}) = 2 e^{-1} (2\varphi(0) - \varphi'(0)) = \boxed{2 e^{-1} (2 \langle \delta_0, \varphi \rangle + \langle \delta_0', \varphi \rangle)} \end{aligned}$$

$$\bullet D^2 \delta_b * T_{|x|} = D \delta_b * DT_{|x|} = D \delta_b * T_{\text{sgn}(x)} = \delta_b * DT_{\text{sgn}(x)} = \delta_b * 2 \delta_0 = 2 \delta_b$$

A proto:

$$\begin{aligned} \langle e^{-(x+1)^2} D^2 \delta_b * T_{|x|}, \varphi \rangle &= \langle D^2 \delta_b * T_{|x|}, e^{-(x+1)^2} \varphi \rangle = \langle 2 \delta_b, e^{-(x+1)^2} \varphi \rangle = \langle \delta_b, 2 e^{-(x+1)^2} \varphi \rangle \\ &= 2 e^{-(b+1)^2} \varphi(b) = \boxed{2 e^{-(b+1)^2} \langle \delta_b, \varphi \rangle} \end{aligned}$$

**Celkem tedy máme:**

$$G = 2 e^{-1} (2 \delta_0 + \delta_0') + 2 e^{-(b+1)^2} \delta_b$$

### Příklad

**Zadání:** Nalezněte  $y \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  řešení konvoluční rovnice:

$$y * e^{-\alpha|x|} = e^{-\beta|x|} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

Proveďte kontrolu, že jsou všechny konvoluce dobře definovány.

### ✓ Řešení:

Pro  $\alpha = \beta$ :  $Y = \delta$ , protože konvoluce  $\delta$  distribuce s další distribucí dává zpátky původní distribuci

Viz například příklad (24.3.16)

Pro  $\alpha \neq \beta$ : Máme  $\mathcal{F}(T_{e^{-\alpha|x|}}) = T_{\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})}$ , tedy

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+2\pi i \xi)x} dx$$

Aplikujeme Fourierovu transformaci na celou rovnici

$$\mathcal{F}(y * e^{-\alpha|x|})(\xi) = \mathcal{F}(e^{-\beta|x|})(\xi)$$

$$\hat{y}(\xi) \cdot \mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})(\xi) = \mathcal{F}(e^{-\beta|x|})(\xi)$$

Nyní vypočítáme transformaci  $\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})(\xi)$ , z níž dostaneme vztah i pro  $\mathcal{F}(e^{-\beta|x|})(\xi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha x - 2\pi i x \xi} dx + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x - 2\pi i x \xi} dx = \\ &= \left[ \frac{e^{x(\alpha - 2\pi i \xi)}}{\alpha - 2\pi i \xi} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-x(\alpha + 2\pi i \xi)}}{-(\alpha + 2\pi i \xi)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha - 2\pi i \xi} - 0 + 0 - \frac{1}{-(\alpha + 2\pi i \xi)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})(\xi) = \frac{1}{\alpha - 2\pi i \xi} + \frac{1}{\alpha + 2\pi i \xi} = \frac{\alpha + 2\pi i \xi + \alpha - 2\pi i \xi}{(\alpha + 2\pi i \xi)(\alpha - 2\pi i \xi)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2}; \quad \mathcal{F}(e^{-\beta|x|})(\xi) = \frac{2\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2}$$

Nyní dosadíme nalezené transformace do konvoluční rovnice:

$$\begin{aligned} \hat{y}(\xi) \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2} &= \frac{2\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2} \\ \hat{y}(\xi) &= \frac{2\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2} \cdot \frac{\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2}{2\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2} \end{aligned}$$

Výsledek si upravíme pro snazší výpočet zpětné Fourierovy transformace

$$\hat{y}(\xi) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \beta^2 + 4\pi^2 \xi^2}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2} \right) = \frac{\beta}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2} \right) = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} \frac{2\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2}$$

Nyní aplikujeme zpětnou Fourierovu transformaci

$$y = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} \frac{2\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2} \right) = \frac{\beta}{\alpha} \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(T_1)}_{\delta_0}(x) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{2\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 \xi^2} \right)}_{\mathcal{F}(e^{-\beta|x|})}(x)$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \delta_0 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} e^{-\beta|x|}$$

### Zkouška:

Pokusíme se dosadit nalezené řešení  $y$  do levé strany rovnice a uvidíme, zda nám vyjde pravá strana.

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\delta_0 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} e^{-\beta|x|}\right) * e^{-\alpha|x|} = \frac{\beta}{\alpha}\delta_0 * e^{-\alpha|x|} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} e^{-\beta|x|} * e^{-\alpha|x|} = \dots$$

Ověření, že jsou použité konvoluce dobře definované:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{kde } \delta * e^{-\alpha|x|} \text{ existuje, } \quad f_1 = \delta_0, \quad f_2 = e^{-\alpha|x|} \in L^1 \text{ a platí } T_{f_1} * \delta = T_{f_1} \\ \text{kde } e^{-\beta|x|} * e^{-\alpha|x|} \text{ existuje, } \quad f_1 = e^{-\beta|x|} \in L^1, \quad f_2 = e^{-\alpha|x|} \in L^1 \text{ a tedy platí } T_{f_1} * T_{f_2} = T_{(f_1 * f_2)} \end{array} \right]$$
$$\dots = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} e^{-\beta|x|} * e^{-\alpha|x|} = \dots$$

Konvoluci vystupující v posledním výrazu si nejprve spočítáme zvlášť:

Rozpis z definice konvoluce:

$$e^{-\beta|x|} * e^{-\alpha|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|x-y|} e^{-\alpha|y|} dy$$
$$\left[ \begin{array}{l} \boxed{x > 0} \rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{-\beta(x-y)} e^{\alpha(y)} dy + \int_0^x e^{-\beta(x-y)} e^{-\alpha(y)} dy + \int_x^{\infty} e^{\beta(x-y)} e^{-\alpha(y)} dy = \\ = e^{-\beta x} \int_{-\infty}^0 e^{y(\alpha+\beta)} dy + e^{-\beta x} \int_0^x e^{y(\beta-\alpha)} dy + e^{\beta x} \int_x^{\infty} e^{-y(\alpha+\beta)} dy = \\ = e^{-\beta x} \left[ \frac{e^{y(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} \right]_{-\infty}^0 + e^{-\beta x} \left[ \frac{e^{y(\beta-\alpha)}}{\beta-\alpha} \right]_0^x + e^{\beta x} \left[ \frac{e^{-y(\alpha+\beta)}}{-(\alpha+\beta)} \right]_x^{\infty} = \\ = e^{-\beta x} \left( \frac{1}{\alpha+\beta} - 0 \right) + e^{-\beta x} \left( \frac{e^{x(\beta-\alpha)}}{\beta-\alpha} - \frac{1}{\beta-\alpha} \right) + e^{\beta x} \left( 0 - \frac{e^{-x(\alpha+\beta)}}{-(\alpha+\beta)} \right) = \\ = e^{-\beta x} \frac{1}{\alpha+\beta} + e^{-\beta x} \left( \frac{e^{x(\beta-\alpha)}}{\beta-\alpha} - \frac{1}{\beta-\alpha} \right) + e^{\beta x} \frac{e^{-x(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} \end{array} \right]$$

A dosadíme zpátky do rovnice:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} \left( \frac{e^{-\beta x}}{\alpha + \beta} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha - \beta} + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha - \beta} + \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha + \beta} \right) = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{1}{2\alpha} \left( (\alpha - \cancel{\beta}) e^{-\beta x} - (\cancel{\alpha} + \beta) e^{-\alpha x} + (\alpha + \cancel{\beta}) e^{-\beta x} + (\cancel{\alpha} - \beta) e^{-\alpha x} \right) = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{1}{2\alpha} \left( 2\alpha e^{-\beta x} - 2\beta e^{-\alpha x} \right) = \boxed{e^{-\beta|x|}} \end{aligned}$$



### Příklad

**Zadání:** Nalezněte řešení konvoluční rovnice pro  $\alpha > 0$ :

$$y * (H(x) e^{-\alpha x}) = x_+^2 + x_+^3$$

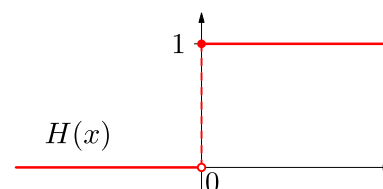
kde  $H(x)$  jest Heavisideova funkce. Počítejte nejprve formálně, po nalezení řešení ověřte, že daná konvoluce má dobrý smysl.

### ✓ Řešení:

**LS:**  $\mathcal{F}(y * (H(x) e^{-\alpha x})) = \mathcal{F}(y) \mathcal{F}(H(x) e^{-\alpha x})$

Protože  $H(x) e^{-\alpha x} \in L^1(\mathbb{R})$  máme předpis pro Fourierovu transformaci:

$$\mathcal{F}(H(x) e^{-\alpha x}) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-\alpha x} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$



Heavisideova funkce nám efektivně pouze změní meze, protože nám vynuluje všechny záporné příspěvky

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-\alpha x} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_0^{\infty} e^{(-\alpha - 2\pi i \xi)x} dx = \left[ \frac{e^{(-\alpha - 2\pi i \xi)x}}{-\alpha - 2\pi i \xi} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + 2\pi i \xi}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y) \cdot \frac{1}{\alpha + 2\pi i \xi} &= \mathcal{F}(x_+^2 + x_+^3) \\ \mathcal{F}(y) &= (\alpha + 2\pi i \xi) \mathcal{F}(x_+^2 + x_+^3) \\ \mathcal{F}(y) &= (\alpha T_1 + 2\pi i \xi T_1) \mathcal{F}(x_+^2 + x_+^3) \\ \mathcal{F}(y) &= (\mathcal{F}(\alpha \delta_0) + \mathcal{F}(D\delta_0)) \mathcal{F}(x_+^2 + x_+^3) \end{aligned}$$

Aplikujeme inverzní Fourierovu transformaci  $\mathcal{F}^{-1}$

$$\begin{aligned} y &= (\alpha \delta_0 + D\delta_0) * (x_+^2 + x_+^3) \\ y &= \alpha \delta_0 * (x_+^2 + x_+^3) + D\delta_0 * (x_+^2 + x_+^3) \\ y &= \alpha (x_+^2 + x_+^3) + DT_{x_+^2 + x_+^3} \end{aligned}$$

Protože  $x_+^2$  i  $x_+^3$  jsou  $C^1$  na celém  $\mathbb{R}$ , derivace zprava v 0 je nulová, spojitě se napojují na 0, včetně prvých derivací, můžeme zderivovat:

$$y = \alpha (x_+^2 + x_+^3) + 2x_+ + 3x_+^2$$

Konvoluce v zadání má smysl, neboť obě funkce mají zleva omezený nosič

$\Rightarrow$  výsledek je lokálně integrovatelná funkce (polynomiální růst v nekonečnu).

### Příklad

**Zadání:** Nalezněte řešení konvoluční rovnice (tedy nalezněte temperovanou distribuci  $G$ )

$$T_H * G = \delta$$

Řešte nejprve formálně, za předpokladu, že konvoluce existuje a platí příslušné věty o Fourierově transformaci, po získání výsledku vysvětlete, že postup šlo využít; speciálně vysvětlete, že konvoluce má smysl a že její Fourierova transformace má očekávaný tvar, který má smysl v temperovaných distribucích.

### ✓ Řešení:

Za předpokladu, že existuje Fourierova transformace všech distribucí, aplikujeme Fourierovu transformaci na rovnici:

$$\mathcal{F}(T_H)\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(\delta)$$

Využijeme tabulky FT distribucí:  $\mathcal{F}(\delta) = T_1$ ,  $\mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi i} T_{p.v.\frac{1}{\xi}} + \frac{1}{2}\delta$

$$\left( \frac{1}{2\pi i} T_{p.v.\frac{1}{\xi}} + \frac{1}{2}\delta \right) \mathcal{F}(G) = T_1$$

Tedy  $\mathcal{F}(G)$  musí splňovat

- z  $T_{p.v.\frac{1}{\xi}}$  dostanu  $T_1$ , potřebuji se zbavit výrazu  $\frac{1}{2\pi i\xi}$
- z  $\delta_0$  dostanu  $T_0$ , alias příspěvek se mi vynuluje

Taková funkce se zvolí:  $\mathcal{F}(G) = 2\pi i\xi \Rightarrow$  proto z tabulky  $G = D\delta$

### **Argumentace:**

- Konvoluce má smysl, protože  $G$  má kompaktní nosič.

A navíc  $D^n \delta * G = D^n G$  pro  $\forall G \in \mathcal{D}'$

- Násobení F.T. má také smysl, protože  $2\pi i\xi$  je pomalu rostoucí funkce ( $2\pi i\xi \in \Theta_M$ )

$$\begin{aligned} \langle \delta_0, 2\pi i\xi \rangle &= 2\pi i\xi|_0 = 0 \\ \left\langle \xi T_{p.v.\frac{1}{\xi}}, \varphi \right\rangle &= p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi} \varphi(\xi) \xi \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(\xi) \, d\xi = T_1 \end{aligned}$$

## 4.4 POZNÁMKY A POČETNÍ TRÍČKY

**Vzoreček: Eulerova reflexní formule**

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1+\lambda)\Gamma(-\lambda) = \frac{\pi}{\sin(\pi + \pi\lambda)} = -\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\pi\lambda) = -\frac{\pi}{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(-\lambda)} \\ \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(H_{(x+0i)^\lambda}\right) &= H_{\xi_+^{-\lambda-1}} \cdot e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)(2\pi)^{\lambda+1}} = H_{\xi_+^{-\lambda-1}} \cdot e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \cdot (2\pi)^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\end{aligned}$$