Domácí úlohy 1

1. Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl **rovnoměrného diskrétního rozdělení** v intervalu $1 \leq k \leq n$.

Řešení:
$[E[k] = \frac{n+1}{2}$, $V[k] = \frac{n^2-1}{12}]$

2. Výstup velice přesného teplotního čidla je připojen k zařízení, jehož displej je však pouze čtyřmístný. Tím vzniká zaokrouhlovací chyba, vůči níž je chyba měřícího čidla zcela zanedbatelná. Displej ukazuje hodnotu 122,1 K. Vyjádřete v milikelvinech **očekávanou hodnotu** vzniklé zaokrouhlovací chyby a také její **standardní odchylku**.

Řešení:
Interval teplot, který se po zaokrouhlení zobrazí na displeji jako 122,1 K, je $\langle 122,05,\ 122,15)$ K. Nemáme žádnou dodatečnou informaci o nějakém zvláštním chování teploty na tomto intervalu, je tedy v pořádku předpokládat, že všechny možné hodnoty jsou na intervalu rozloženy **rovnoměrně**. Zaokrouhlujeme-li teploty z tohoto intervalu hodnotu 122,1 K, tvoří vzniklé zaokrouhlovací chyby interval $\langle -0,05,\ 0,05)$ K. Použijeme tedy **rovnoměrné rozdělení** pravděpodobnosti s okrajovými body $a = -0,05$ K, $b = 0,05$ K.
Střední hodnotu zaokrouhlovací chyby pak snadno vypočteme jako $\mu_{\text{zaokr.}} = \frac{a+b}{2}$ a standardní odchylku jako $\sigma^2_{\text{zaokr.}} = V = \frac{(b-a)^2}{12}$. Zaokrouhlovací chyba tak vyjde 0 mK, její standardní odchylka 29 mK.
Výsledek 0 mK chápeme tak, že zaokrouhlováním se nedopouštíme žádné systematické chyby – v průměru zaokrouhlovací chyba vychází nulová.

3. Vypočítejte, jaká bude **střední hodnota čtverce vzdálenosti**, kterou urazíme při jednorozměrné náhodné procházce po N krocích. Velikost jednoho kroku je L. Jednorozměrná náhodná procházka (random walk) je pohyb po přímce po krocích $\pm L$ se stejnou pravděpodobností $p = 1/2$.

Řešení:
$[NL^2]$

4. Displej voltmetru je 5-místný, ale bohužel je v místě poslední číslice rozbitý. Takže pátou cifru nelze přečíst a jste nuceni ji ignorovat, čímž je způsobena dodatečná zaokrouhlovací chyba. Displej ukazuje hodnotu 234,5□ V. Spočítejte **střední hodnotu** takto vzniklé chyby a její **standardní odchylku**, a také určete pravděpodobnost, že se žádné dodatečné chyby nedopouštíte.

Řešení:
[Dodatečná chyba 45 mK, její standardní odchylka 30 mK. $P = 10$ %]

5. Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl **binomického rozdělení** $B(n, k, p)$.

Řešení:
$[E[k] = np$, $V[k] = np(1-p)]$

6. Pozitron je antičástice elektronu. Pokud se setká elektron a pozitron, dojde k anihilaci a obě částice se změní na záření. Nejčastěji (v 99.27% případů) dojde ke změně anihilujího páru elektron-pozitron na dva fotony. Zbylé vzácné případy odpovídají tří-fotonové anihilaci. Kolik opakovaných měření pozitronové anihilace je nutné provést, aby pravděpodobnost, že v naměřené sadě dat bude **aspoň jedna** tří-fotonová anihilace, byla 0.99?
Řešení:
$[N = 629]$