Písemka 20. 5. 2016

Příklad 1 (7 bodů). V čekárně je v misce naskládáno *mnoho* čokoládových bonbonů *pěti* různých příchutí. Každý z osmi zákazníků si náhodně a nezávisle na ostatních vybere jednu příchuť (*náhodně znamená, že každou příchuť si vybere se stejnou pravděpodobností*).

(a) S jakou pravděpodobností byla vybrána každá příchuť? A jak by to dopadlo, bude-li zákazníků 100?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že se všichni zákazníci shodli na stejné příchuti?

(c)* Jaká je pravděpodobnost, že bylo vybráno právě k příchutí, kde $k = 1, \dots, 5$?

Příklad 2 (4 bodů). Pro celočíselný náhodný vektor (X, Y) definujte podmíněné rozdělení a podmíněnou střední hodnotu $\mathrm{E}(X|Y)$. Dokažte

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X|Y)\big).$$

Příklad 3 (5 bodů). Nechť náhodná veličiny X a Y jsou nezávislé a mají rozdělení s hustotou

$$f(x) = \exp\{-x\} \text{ pro } x > 0, f(x) = 0, \text{ pro } x < 0.$$

Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.

Příklad 4 (8 bodů). Zdatný chovatel malých plazů se těší na své nové přírůstky. Radost ze snůšky 200 vajíček mu kazí fakt, že každé z nich se vylíhne s pravděpodobností 0,8.

(a) Na kolik malých plazích mláďátek se může chovatel těšit s pravděpodobností nejméně 0,95?

(b) Chovatel však, poučen smutnou zkušeností z minulých let ví, že jen s třetinovou pravděpodobností se vylíhnuté mládě dožije více než jednoho týdne. Jaký je očekávaný počet mláďat po prvním týdnu?

(c) Každé mládě v jednom týdnu sní denně pět much. Kolik nejméně much musí chovatel mít v zásobě, aby s pravděpodobností 0,95 nakrmil všechna živá týdenní mláďata?

(použijte asymptotickou úvahu a kvantil normálního rozdělení: $\Phi(1,96) = 0,95$.)

Příklad 5 (6 bodů). Definujte náhodný vektor, vysvětlete a spočítejte následující.

(a) Distribuční funkce dvourozměrného náhodného vektoru a její vlastnosti.

(b) Marginální rozdělení a jeho vztah ke sdruženému rozdělení. Jak poznáme nezávislost?

(c) Kovariance a její vlastnosti.

(d)* Uvažujte hod dvěma **čtyřstěnnými** hracími kostkami, modrou a červenou. Určete **korelaci** mezi *rozdílem výsledků* na modré a červené kostce *a součtem výsledků* na modré a červené kostce. (Rozdíl tedy může být i záporný, odečtete výsledek na červené kostce od výsledku na modré.)

Příklad 6 (6 bodů). Zformulujte zákon velkých čísel a ukažte jeho důkaz pomocí Čebyševovy nerovnosti. Vysvětlete pojem *konzistentní odhad parametru*.

Uvažujte $X_1, X_2, \dots, X_n$ náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$ je neznámý parametr. Najděte konzistentní odhad pravděpodobnosti $P[X_1 > 1]$. (Existují dvě přirozené možnosti tuto pravděpodobnost odhadnout. Je jedno, kterou zvolíte, ale je třeba dokázat pro ni konzistenci.)

Poznámky: Za každý příklad lze získat určený počet bodů, celkem 36. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **19 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Ne vždy musí být výsledek jednoduše vyjádřitelný (jedna hodnota, jednoduchá funkce). Pokuste se výsledek dostat do co nejkompaktnějšího tvaru (například nekonečná řada, určitý integrál,. . .).

Oddělujte, prosím, zřetelně jednotlivé otázky a jejich podotázky. Výsledky přehledně zapište.

Podepište všechny odevzdávané papíry a vyznačte jejich počet