Lineární algebra I (pro fyziky)

Determinant

Dalibor Šmíd

MFF UK

Na první přednášce jsme zmínili, že absolutní hodnota veličiny

$$V(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) := (\mathbf{x}\times\mathbf{y}).\mathbf{z} \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}x_i y_j z_k$$

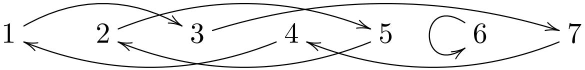
udává objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$. Připomeňme, že $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$, $\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=-1$ a $\varepsilon_{ijk}=0$, jsou-li dva indexy stejné. Takto definované zobrazení $V:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ má následující vlastnosti:

1. $V(r\mathbf{x}_1+s\mathbf{x}_2,\mathbf{y},\mathbf{z}) = rV(\mathbf{x}_1,\mathbf{y},\mathbf{z})+sV(\mathbf{x}_2,\mathbf{y},\mathbf{z})$ (linearita)
2. $V(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = -V(\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z}) = V(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x})$ (úplná antisymetrie)
3. $V(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=1$

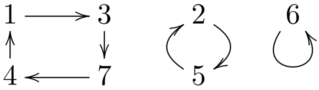
Z vlastnosti 2 plyne linearita i ve 2. a 3. argumentu a také, že $V(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=0$, kdykoli se některé dva vektory z $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ rovnají.

Vlastnosti 1,2,3 zobrazení V zcela určují ♣, zároveň je snadné je zobecnit do vyšší dimenze. Začneme zobecněním symbolu ε_{ijk}.

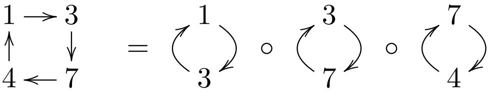
Množina všech bijektivních zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do sebe tvoří grupu s operací skládání zobrazení ♣. Grupa se označuje S_n a nazývá *symetrická grupa*, její prvky *permutace*. Permutaci můžeme znázornit obrázkem



nebo přehledněji formou *rozkladu na nezávislé cykly*



V textu se takový rozklad zapisuje (1374)(25), cykly délky 1 se vynechávají. Cyklus délky 2 se nazývá *transpozice*. Cyklus délky k lze zapsat jako složení $k - 1$ transpozic, např.:



Každou permutaci lze tedy zapsat jako složení transpozic. Pokud je počet těchto transpozic sudý, resp. lichý, mluvíme o *sudé*, resp. *liché permutaci*, jimž přiřazujeme *znaménko permutace* $\operatorname{sgn}\pi = +1$, resp. -1. Když ověříme, že složení libovolné permutace π s libovolnou transpozicí vždy mění $\operatorname{sgn}\pi$ ♣, plyne z toho korektnost následující definice znaménka

Definice

Nechť $\pi \in S_n$ je permutace a $\pi_1, \ldots, \pi_k \in S_n$ jsou transpozice takové, že $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \ldots \circ \pi_k$. Pak $\operatorname{sgn}\pi := (-1)^k$.

Příklad

Grupa S_3 obsahuje $3! = 6$ prvků: identitu, 3 transpozice a 2 cykly délky 3. Jejich znaménka jsou

$$\begin{array}{rrr} \operatorname{sgn}\mathrm{id} = +1 & \operatorname{sgn}(12) = -1 & \operatorname{sgn}(123) = 1 \\ \operatorname{sgn}(13) = -1 & \operatorname{sgn}(23) = -1 & \operatorname{sgn}(132) = 1 \end{array}$$

Pokud definujeme $\varepsilon_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)} := \operatorname{sgn}\pi$ a $\varepsilon_{ijk} = 0$ jindy, dostáváme přesně veličinu ε z definice zobrazení V.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. *Determinantem* matice A rozumíme číslo

$$\det A := \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \; a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}$$

Pro 2×2 a 3×3 matice lze $\det A$ spočíst přímo z definice

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} &= \operatorname{sgn}\mathrm{id}\, a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}(12)a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

Pro $n > 3$ je to už nepraktické. Horní či dolní trojúhelníková matice má $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, protože $\operatorname{sgn}\mathrm{id} = 1$ a v ostatních součinech je vždy alespoň jeden člen $a_{i\pi(i)}$ roven nule.

VĚTA

Nechť $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. *Pak* $\det A = \det A^T$.

DŮKAZ.

Každá permutace π je inverzní permutací k $\rho := \pi^{-1}$, tedy

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) a_{1\rho^{-1}(1)} a_{2\rho^{-1}(2)} \dots a_{n\rho^{-1}(n)}\end{aligned}$$

Protože $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \rho^{-1}$ ♣ a množina uspořádaných dvojic $\{(1, \rho^{-1}(1)), (2, \rho^{-1}(2)), \dots, (n\rho^{-1}(n))\}$ obsahuje tytéž prvky jako množina $\{(\rho(1), 1), (\rho(2), 2), \dots, (\rho(n), n)\}$, je suma rovna

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} a_{\rho(2)2} \dots a_{\rho(n)n} = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a^T_{1\rho(1)} a^T_{2\rho(2)} \dots a^T_{n\rho(n)},$$

což je z definice rovno $\det A^T$. $\square$

Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ definujme $A := (\mathbf{x}|\mathbf{y}|\mathbf{z})$. Pak z věty plyne, že

$$\begin{aligned}
\det A = \det A^T &= \sum_{\rho \in S_3} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} a_{\rho(2)2} a_{\rho(3)3} \\
&= \sum_{\rho \in S_3} \operatorname{sgn}(\rho) x_{\rho(1)} y_{\rho(2)} z_{\rho(3)} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k = V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})
\end{aligned}$$

Determinant je tedy skutečně zobecněním zobrazení V a vyplatí se na něj nahlížet jako na funkci, která přiřazuje n-prvkové posloupnosti vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ z $\mathbb{F}^n$ číslo $\det(\mathbf{a}_1| \ldots |\mathbf{a}_n)$. Zjevně $\det(\mathbf{e}_1| \ldots |\mathbf{e}_n) = 1$. Úplnou antisymetrii a linearitu v každém argumentu ukážeme v následujícím tvrzení.

Tvrzení

Nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_i \in \mathbb{F}^n$, $r, r' \in \mathbb{F}$, $\rho \in S_n$. *Pak*

1. $\det(\mathbf{a}_1 | \ldots | r\mathbf{a}_i + r'\mathbf{a}'_i | \ldots | \mathbf{a}_n) =$
   $r \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_i | \ldots | \mathbf{a}_n) + r' \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}'_i | \ldots | \mathbf{a}_n)$
2. $\det(\mathbf{a}_{\rho(1)} | \ldots | \mathbf{a}_{\rho(n)}) = \operatorname{sgn}(\rho) \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_n)$

Důkaz.

Pro první tvrzení stačí jen roznásobit každý člen sumy

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} \ldots (r a_{\rho(i)i} + r' a'_{\rho(i)i}) \ldots a_{\rho(n)n}$$

Druhé plyne z vlastnosti $\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1) \operatorname{sgn}(\pi_2)$ a úprav

$$\det(\mathbf{a}_{\rho(1)} | \ldots | \mathbf{a}_{\rho(n)}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; a_{1,\rho(\pi(1)))} a_{2,\rho(\pi(2)))} \ldots a_{n,\rho(\pi(n)))}$$

$$= \operatorname{sgn} \rho \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho \circ \pi) \; a_{1,(\rho\circ\pi)(1)} a_{2,(\rho\circ\pi)(2))} \ldots a_{n,(\rho\circ\pi)(n)}$$

$\square$

Důsledek

Nechť $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $r \in \mathbb{F}$. *Pak*

1. *Má-li* A *dva sloupce stejné nebo jeden ze sloupců nulový, pak* $\det A = 0$.
2. *ESÚ typu přičtení* r*-násobku sloupce do jiného sloupce nemění determinant.*
3. *ESÚ typu násobení sloupce číslem* r *násobí celý determinant číslem* r.
4. *ESÚ typu prohození dvou sloupců obrací znaménko determinantu.*
5. *Platí i analogická tvrzení pro řádky a EŘÚ.*

Důkaz ♣. Determinant matice můžeme tedy efektivně vypočítat pomocí posloupnosti EŘÚ a ESÚ, které matici převedou na jednodušší, nejlépe horní trojúhelníkovou matici.

Determinant matice se často značí také nahrazením závorky svislou čárou. Zkusme si výpočet determinantu na příkladě:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-6 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & -12 & -2 & -5 \\ 0 & 12 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -24 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -72 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -288$$

Věta

Matice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je regulární, právě když $\det(A) \neq 0$.

Důkaz.

Regularita i nenulovost determinantu se zachovávají pomocí EŘÚ a ESÚ, stačí se tedy dívat jen na matici v odstupňovaném tvaru. Ta je regulární, právě když má všechny prvky na hlavní diagonále nenulové, což nastává právě když je nenulový determinant. □

Minorem nebo též *subdeterminantem* rozumíme determinant nějaké čtvercové podmatice, tj. matice vzniklé vynecháním některých řádků a sloupců. Větu výše lze zobecnit tvrzením, že $\mathrm{rank}(A) = k$, právě když největší řád nenulového minoru A je k. K důkazu je třeba vybrat ze sloupců A nějakou bázi $(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k})$ prostoru $\mathrm{Im}\, A$ a ukázat, že nějakým výběrem k řádků z matice $(\mathbf{a}_{i_1}|\ldots|\mathbf{a}_{i_k})$ vznikne matice regulární ♣.

Označme A_{ij} podmatici matice A vzniklou vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta (Laplaceův rozvoj podle sloupce)

Nechť $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Pak

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Důkaz.

Protože $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1} a_{ij}\mathbf{e}_i$, dostáváme z linearity v j-tém sloupci

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{e}_i | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n)$$

Je třeba $n - j$ transpozic na přesunutí j-tého sloupce na poslední pozici a $n - i$ transpozic na přesunutí i-tého řádku na poslední pozici, determinant se tím vynásobí faktorem $(-1)^{n-j+n-i} = (-1)^{i+j}$. Matice A', která takto vznikne, má podmatici A'_{nn} rovnu A_{ij}, a poslední sloupec $\mathbf{e}_n$. Pak ale z definice determinantu $\det A' = \det(A'_{nn}) = \det(A_{ij})$ ♣. $\square$

Laplaceův rozvoj je vlastně rekurentní předpis pro determinant. Je možné jej provádět i podle kteréhokoli řádku $\clubsuit$. Kombinace úprav a rozvoje podle řádku či sloupce s velkým počtem nul je obvykle nejrychlejší cesta k výpočtu determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -11 & 0 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} - 30 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2(-10+33) - 30(-2+3) = -76$$