

---

# NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Teoretická teoretická zápočtová práce | 10. 02. 2021

(Celkově 20 bodů | Čas: 90 minut)

---

1. (12 bodů) Uvažujte náhodný výběr  $Z_1, \dots, Z_n$  z rozdělení, které je dané hustotou

$$f(z; \theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot z^{-(1/\sqrt{\theta}+1)}, \quad \text{pro } z > 1,$$

kde  $\theta > 0$  je neznámý parametr.

- (a) Najděte maximálně věrohodný odhad  $\hat{\theta}_n$  pro neznámý parametr  $\theta > 0$  a bez užití obecných vlastností maximálně věrohodných odhadů vyšetřete jeho konzistenci. [2]
- (b) Najděte asymptotický rozptyl odhadu  $\hat{\theta}_n$  a sestrojte přibližný 95% interval spolehlivosti pro neznámý parametr  $\theta > 0$ . [2]
- (c) Pomocí transformace  $g(\theta) = \sqrt{\theta}$  zkonstruuje přibližný 95% interval spolehlivosti pro parametr  $\theta$  a porovnejte ho s intervalem nájdným v (b). [2]
- (d) Najděte odhad  $\tilde{\theta}_n$  neznámého parametru  $\theta$  metodou momentů a opět vyšetřete jeho konzistenci. [2]
- (e) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr  $\mu = E Z_1$  a určete asymptotické rozdělení takového odhadu. [2]
- (f) Zkonstruuje přibližný 95%-ní interval spolehlivosti pro  $\mu > 0$ , přičemž rozptyl odhadu nahradíte odhadem rozptylu tohoto odhadu. [2]

2. (8 bodů) Uvažujte náhodný výběr  $X_1, \dots, X_{2n}$  z rozdělení s hustotou

$$f(x; \lambda) = \lambda x^{\lambda-1} 1_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

kde  $\lambda > 0$  je neznámý parametr.

- (a) Pomocí náhodných veličin  $X_1, \dots, X_n$  a CLV sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro  $\lambda > 0$ . [2]
- (b) Najděte odhad parametru  $\lambda > 0$  metodou maximální věrohodnosti a pomocí jeho asymptotických vlastností sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro  $\lambda > 0$ . [2]
- (c) Pomocí transformace  $W_i = -\log X_i$  sestrojte přesný interval spolehlivosti pro neznámý parametr  $\lambda > 0$ . [2]
- (d) Nechť  $Y = \sum_{i=1}^n W_i$  a  $Z = \min_{i=n+1, \dots, 2n} W_i$ . Najděte rozdělení náhodného vektoru  $(Y, Z)^T$ . [2]

*K úspěšnému napísaní teoretické opravnej zápočtové práce je potřebných aspoň 60 % z celkového počtu bodů, t.j. aspoň 12 bodů.*