

Midterm (ukázka příkladů)

1. Je dána otevřená množina

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 9, z < \sqrt{x^2 + y^2}, x > 0\}$$

a necht' $\nu(x, y, z)$ je jednotkový vektor vnější normály určený ve s.v. bodech hranice $(x, y, z) \in \partial\Omega$. Spočtěte

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle dS$$

pro vektorové pole

$$F(x, y, z) = (xy^2z, z, x^2 + y^2).$$

Můžete použít Gaussovu-Ostrogradského větu.

2. Necht' $U = (-\pi, \pi) \times (0, 1)$ a zobrazení $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou dána předpisy

$$\varphi(\alpha, t) = (\cos \alpha, \sin \alpha, t),$$

$$\psi(\alpha, t) = ((3 + \cos(2\pi t)) \cos \alpha, (3 + \cos(2\pi t)) \sin \alpha, \sin(2\pi t)).$$

- (a) Zobrazení φ a ψ jsou mapy (ověřte pro jednu z nich), a popište plochy $S := \varphi(U)$, $T := \psi(U)$.
- (b) Ověřte, že $\Phi := \psi \circ \varphi^{-1} : S \rightarrow T$ je difeomorfismus.
- (c) Pro $p = \varphi(\alpha, t)$ popište tečné prostory $T_p S$ a $T_{\Phi(p)} T$.
- (d) Uveďte definici diferenciálu $D\Phi(p)$ v bodě $p \in S$ a popište jej.

Můžete použít věty z přednášky.

Za každý příklad můžete získat nejvýše 10 bodů.
