

Name:

1	2	3	4	Σ

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- 4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.
- Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
- Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.
- Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
- Číselné výsledky tvaru $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$ apod. není potřeba dále zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.

-
1. (a) Zformulujte horní a dolní odhad na $n!$, které se liší jen o faktor n .
- (b) Máme férovou 40-stěnnou kostku se stěnami očíslovanými postupně od 1 do 40. Kostkou n -krát po sobě hodíme. Vyjádřete pravděpodobnost p_n , že nám v nějakém pořadí padnou přesně čísla od 1 po n , každé jednou.
- (c) Číslo p_{27} je opravdu malé – odhadněte ho shora jako $1/10^c$ pro vhodnou konstantu c . Tj. odhadněte p_{27} shora pomocí části (a) a najděte největší celé číslo c takové, že tento horní odhad je menší než $1/10^c$. Použijte aproximace $e \approx 2,7$ a $2^{10} \approx 1000$. [6 points]

2. Máme za úkol obarvit hrany úplného grafu K_n několika barvami tak, aby hrany každé barvy tvořily kliku (úplný podgraf) K_4 .
- (a) Dokažte, že pro $n \in \{10, 11\}$ to nelze. (Hint: celkový počet hran.)
 - (b) Dokažte, že pro $n = 12$ to nelze. (Hint: stupeň vrcholu.)
 - (c) Dokažte, že pro $n = 13$ to lze. (Hint: může se hodit nějaká konečná projektivní rovina.) [7 points]

3. (a) Zformulujte tvrzení o vztahu vrcholové a hranové souvislosti.
(b) Definujte pojmy *most* a *artikulace* v souvislém grafu G .
(c) Najděte souvislý graf, který má artikulaci, ale nemá žádný most.
(d) Uvažme souvislý graf G , který má 3 mosty. Kolik nejméně může mít artikulací? (Ukažte, že tolik to být může a že méně to být nemůže.) [8 points]

4. (a) Zformulujte Cayleyho větu o počtu koster.
(b) Dokažte ji.

[9 points]

Extra page 1/2 if you need it.

Extra page 2/2 if you need it.
