VL

Výrokový jazyk nad P tvorí: a) neprázdná množina P **prvovýroku** (též výrokových promenných či atomu), b) logické spojky ¬, →
Výroky cili (výrokové) formule nad P jsou práve designátory (použití F_P) z $D(F_P)$, kde $F_P = P \cup \{\neg,\rightarrow\}$; pritom prvky z P jsou nulární, ¬ je unární, → je binární. **VF_P** je množina všech výroků nad P. **var(φ)** jsou prvovyroky z φ.
Výroková teorie nad P, též **P-teorie**, je množina $T\subseteq VF_P$ její prvky jsou její axiomy. Symbol **P(T)** značí množinu prvovýroku jazyka teorie T. Výrok teorie T je výrok jejího jazyka.

Pravdivý výrok ⊤ specifikujeme jako p → p, **lživý výrok** ⊥ jako ¬(p → p); na konkrétní volbe p nezáleží.
Výrok je **literál**, je-li to prvovýrok nebo negace prvovýroku. Disjunkce literálu se nazývá **klauzule**, konjunkce literálu též **elementární konjunkce**. Výrok je v DNF resp. CNF, je-li to disjunkce konjunkcí literálu resp. konjunkce disjunkcí literálu.

Pravdivostní ohodnocení P cili **model výrokového jazyka** nad P je funkce $v\in {}^P2$.
Třída všech modelu teorie T: $M^P(T) = \{v\in {}^P2;\ v|=T\}$
Formule φ, ψ z VF_P jsou **T-sémanticky ekvivalentní**, pokud $M^P(T,\varphi) = M^P(T, \psi)$; píšeme $\varphi\sim_T\psi$.
Formule φ je sémanticky ekvivalentní formuli jak v DNF, tak formuli v CNF.
(O sémantické ekvivalenci.) Vznikne-li formule φ‘ z φ nahrazením některého výskytu podformule ψ formulí ψ‘, tak $\psi \sim_T \psi' \Rightarrow \varphi \sim_T \varphi'$
Př: (p → q) & q ~ (¬p ∨ q) & q ~ (¬p & q) ∨ (q & q) ~ (¬p & q) ∨ q ~ q.
•Fle φ je **pravdivá (tautologie)** v teorii T, platí-li ∀ modelu T, píšeme **T |= φ.**
• Fle φ je **lživá** v teorii T, neplatí-li v žádném modelu T, píšeme **T |= ¬φ.**
Množ. všech P-formulí pravdivých resp. lživých v T znacíme **Θ(T)** resp. Θ‘(T) Platí: 1) M(Θ(T))=M(T) 2) T⊆Θ(T) T⊆S→Θ(T)⊆Θ(S) Θ(T)=Θ(Θ(T))
• Není-li φ ani pravdivá ani lživá v T , je **nezávislá** v T
• Není-li φ lživá v T je **splnitelná(konzistentní)** v T
• Když T |= φ→ψ , je φ **silnější** než ψ a ψ **slabší** než φ v T

Teorie S je **extenze(rozšíření)** T, když P(T)⊆P(S) a Θ(T)⊆Θ(S) nebo ⇔ M(S)⊆M(T). Je-li P(T)=P(S), je to **jednoduchá extenze**. Teorie T je **ekvivalentní** s S, je-li každá z nich extenzí druhé nebo ⇔ M(S) = M(T).
Teorie je **konecne axiomatizovatelná**, je-li ekvivalentní teorii s konecne axiomy.
Teorie T je **kompletní**, jestliže má model a ∀formuli φ jejího jazyka je T |= φ nebo T |= ¬φ, tj. T nemá nezávislý výrok, a nebo ⇔ má právě 1 model.
(O sémantické kompaktnosti.) Teorie má model ⇔ každá její konecná cást má model.

Množina $K\subseteq {}^P2$ je **axiomatizovatelná** resp. **konecne axiomatizovatelná**, existuje-li teorie resp. konecná teorie T tak, že K= M(T). Je-li K konecne axiomatizovatelná, je zrejme K = M(φ) pro nejakou formuli φ.

a) **Prunik** neprázdného systému uzavrených množin je uzavrená množina. b) **Sjednocení** konecne mnoha uzavrených množin je uzavrená množina.
(O axiomatizovatelnosti) 1) Množina $K\subseteq {}^P2$ je konecne axiomatizovatelná ⇔ ona i její komplement jsou axiomatizovatelné. 2) a) Množina $K\subseteq {}^P2$ je axiomatizovatelná ⇔ je uzavrená(K obsahuje každé v, které není oddelené od K) b) Množina $K\subseteq {}^P2$ je konecne axiomatizovatelná ⇔ je obojetná(K i její komplement jsou uzavrené)

(Logické axiomy LAx) (...)
(Pravidlo Modus ponens) A,A->B|-B
Dukaz v T je {MP}-odvození z T ∪LAx ; je to dukaz formule, která je jeho posledním clenem . Formule φ je **dokazatelná (teorém)** v T, existuje-li nejaký její dukaz v T ; píšeme **T|-φ** ⇔ M(T) ⊆ M(φ)
Formule φ je **vyvratitelná (spor) v T** , když T |-¬φ. Když T=∅, vypouštíme v uvedených pojmech výraz „v T“ ci jej nahradíme výrazem „logicky“. Množinu všech teorému teorie T znacíme **Thm(T) nebo Thm_T** .
Tedy Thm(T) je {MP}-uzáver T∪LAx. Speciálne jsou teorémy teorie T definovány induktivne pravidly: • Každý axiom teorie T a každý logický axiom je teorém teorie T • Jsou-li φ, φ→ψ teorémy teorie T , je ψ teorém teorie T
Teorie T je **sporná**, je-li v ní dokazatelná každá formule; jinak je **bezesporná**. Má-li teorie model, je bezesporná.
(O korektnosti.) Každá v T dokazatelná formule je v T pravdivá.
(O dedukci.) T,A|-B ⇔ T|-A→B
(Důkaz sporem) T, ¬φ je sporrná⇔ T|-φ
(O existenci modelu ve VL) Teorie má model, práve když je bezesporná (není sporná).
(O kompaktnosti v VL) Teorie má model, práve když každá její konecná podteorie má model.
(O úplnosti ve VL/PL) Formule teorie T je v T dokazatelná (T|-φ) ⇔ je v T pravdivá (T|=φ)
(O ekvivalenci.) Vznikne-li formule φ z φ' nahrazením nekterého výskytu podformule ψ formulí ψ‘, tak
a) |- ψ↔ψ‘→φ↔φ‘ b) T|- ψ↔ψ‘⇒φ↔φ‘

PL

Teorie je dvojice <L,T>, kde L je jazyk a $T \subseteq F_{mL}$ je množina **mimologických axiomu**, strucneji axiomu. Ríkáme pak také, že T je teorie, a to v jazyce L cili **L-teorie**. Jazyk teorie T znacíme L(T) ten je ovšem urcen jednoznacne. Místo L(T)-formule se ríká též **formule teorie T** . **Teorie s rovností** je taková teorie, jejíž jazyk je s rovností.
Teorie rovnosti v L je teorie $TE_L=\emptyset$ v jazyce L s rovností, tj. teorie bez mimologických axiomu v jazyce L s rovností; je-li L prázdný jazyk s rovností, znacíme $TE_\emptyset$ jako **PE** a ríkáme, že to je **teorie ciste rovnosti**.
x je **vázaná** v A pokud je v nějaké podformuli jako (∀x) nebo (∃x) jinak je **volná.** Fle je **uzavrená (sentence)** neobs. volné promenné Fle je **otevrená (bezkvantifikátorová)** neobs. vázané promenné (není-li v ní žádný kvantifikátor). **Teorie** je **otevřená**, je-li její každý mimologický axiom otevřená formule.
věta 3.1.52. 3) Je-li $\mathcal{B}$ model otevřené teorie T, pak každá podstruktura $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ je také model T.
(Generální) uzáver A je formule (∀x1, . . . , xn)A, kde mezi x1, . . . , xn jsou všechny volné promenné A. Množinu všech otevrených L-formulí znacíme OFm_L.

(Logické axiomy LAx)
(PL1) A→(B→A)
(PL2) (A→(B→C)) →((A→B) →(A→C))
(PL3) (¬B→¬A)→(A→B)
(Axiom substituce) (∀x)A→A(x/t) pokud pro kazdou y z t žádná podfle A tvaru (∀y)B nebo (∃y)B neobsahuje x volné v A
(Axiom zavedení ∀) (∀x)(A→B) → (A → (∀x)B), x není volná v A
(Axiomy rovnosti) x=x,
$x_1=y_1\to..\to x_n=y_n \to F(x_1,..,x_n) = F(y_1,..,y_n)$,
$x_1=y_1\to..\to x_n=y_n \to R(x_1,..,x_n) \to R(y_1,..,y_n)$
(Pravidlo Modus ponens) A,A→B|-B
(Pravidlo Generalizace) A |-(∀x)A

fle φ **vyvratitelná(spor) v T ,** když T|-¬φ, **nezávislá** v T , když T|/-φ a T|/-¬φ, **konzistentní** s T , když T|/-¬φ.
Varianta fle – vznikne pomocí substituce
Th(A) - Teorie L-struktury A je množina L-sentencí platných v A
Množina všech teorému T je **Thm(T)** a pokud jsou i sentence tak **Th(T)**
Teorie je **κ-kategorická**, cili kategorická v kardinalite κ, má-li až na izomorfizmus jediný model kardinality κ.
Teorie je **ω-kategorická**, má-li až na izomorfizmus jediný model spočetné kardinality(=ω). Je to spec.případ κ-kategoricnosti.

Model jazyka L=<R,F> je **L-struktura** A=<A,R^A,F^A>. Pokud L je jazyk s rovností, pak $=^A$ je = identita na A.
(O existenci modelu) Každá bezesporná teorie T má model kardinality nejvýše **||L(T)||**=max(ω,|L|)(kard.jazyka teorie T)
(O úplnosti ve VL/PL) Formule teorie T je v T dokazatelná (T|-φ) ⇔ je v T pravdivá (T|=φ)
(O kompaktnosti) Teorie má model, práve když každá její konecná cást má model.

T je **sporná**, je-li v ní dokazatelná každá L(T)-formule; jinak je bezesporná. T|-⊥ ⇔ T je sporná
T je **kompletní**, je-li bezesporná a každá L(T)-sentence je v ní dokazatelná nebo vyvratitelná (pro každou sentenci S obsahuje S nebo ¬S)
- κ-kategoricnost(pro κ nespočetná?) nebo ω-kat. ⇒ kompletnost
- T má jen nekonecné modely a v nejaké kardinalite κ≥||L má až na izomorfizmus jediný model,⇒T je kompletní.

T‘ je **extenze** teorie T , když L(T)⊆L(T‘) a Thm(T) ⊆Thm(T‘);
T je **jednoduchá**, když navíc L(T) = L(T‘).
teorie jsou **ekvivalentní**, je-li každá z nich extenzí druhé. Pro teorii T tedy platí díky Thm(T) = Thm(Thm(T)): T je ekvivalentní s Thm(T).
Extenze T‘ teorie T je **konzervativní**, je-li každá L(T)-formule dokazatelná v T‘ dokazatelná i v T .
- T|-⊥↔φ jakmile φ je vyvratitelná v T .
- T|-⊤↔φ jakmile φ je dokazatelná v T .

Rozhodnutelnost - vyjadřuje, zda existuje konečný algoritmus, který pro každou formuli určí, zda je v dané teorii dokazatelná nebo není.
Omezené fle jaz.L – nejm.obor L-flí obs.všechny otevřené a je uzavřený na log.spojky a má omezenou kvantifikaci (Qx≤y)
$\sum_1$ fle je tvaru $(\exists \overline{x})\varphi$ kde φ je nějaká omezená fle
T je **$\sum_1$ axiomizovaná** jeli její axiomatika $\sum_1$
(4.2.13 (2)) Kompletní $\sum_1$-axiomatizovaná (rekurzivne axiomatizovaná) teorie T je rozhodnutelná.
relace $R\subseteq N^2$ je **$\sum_1$-kompletace** L-teorie T , když:
a) R je $\sum_1$,
b) pro každé a∈dom(R) je R[a] L-axiomatika kompletní extenze teorie T ,
c) každá kompletní L-extenze T je ekvivalentní L-teorii s axiomatikou tvaru R[a].
(Kompletacní kriterium rozhodnutelnosti.) Když teorie T je $\sum_1$-axiomatizovaná a má $\sum_1$-kompletaci, je rozhodnutelná.
Struktura $\mathcal{A}$ je **silne nerozhodnutelná**, je-li nerozhodnutelná každá teorie, která ji má za model. (např. standardní model $\mathcal{N}$ prirozených císel)
(O nerozhodnutelnosti.) Bezesporná teorie rozširující Robinsonovu ar. Q je nerozhodnutelná a je-li navíc $\sum_1$-axiomatizovaná, není kompletní.
(První Gödelova veta.) Bud T bezesporné Δ_1-axiomatizované rozšírení Q. Pak existuje Π_1-sentence pravdivá v $\mathcal{N}$ a nedokazatelná v T .

ELIMINACE

$A \prec B$ (**elementární podstruktura**) pokud $A \subseteq B$ a $\forall\varphi(\overline{x})$ jazyka A a $\overline{a} \in A$^l($\overline{x}$) platí: $A|=\varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow B|=\varphi[\overline{a}]$
T je **modelove kompletní**, když pro ∀ její modely A, B s A⊆B je $A \prec B$.
Budte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dve L-struktury. Funkce f : A→B je **vnorení** $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, je-li prostá a dále platí:
- ∀m>0 a ∀ m-ární relacní symbol R jazyka L a a_1,.., a_m∈ A je $R^A(a_1, \dots , a_m) \Leftrightarrow R^B(f(a_1), \dots , f(a_m))$.
- ∀m a ∀m-ární funkcní symbol F jazyka L a a_1,.., a_m∈ A je $f(F^A(a_1, \dots , a_m)) = F^B(f(a_1), \dots , f(a_m))$.

Je-li $f[\mathcal{A}] \prec \mathcal{B}$, ríkáme, že f je **elementární vnorení** $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, nebo $(\mathcal{A} \models \varphi(\overline{a})) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \models \varphi(f(\overline{a})))$
Model T je její **algebraický prvomodel** lze-li jej vnorit do každého modelu T**. Prvomodel** lze elementárne vnorit do každého modelu T**.**
Parciální vnorení $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ je funkce f⊆ A×B taková, že $\mathcal{A}|=\varphi[\overline{a}]$, $\mathcal{B} |=\varphi[f\ \overline{a}]$ platí pro každou atomickou (otevrenou) L-formuli $\varphi(\overline{x})$ a $\overline{a} \in dom(f)^{l(x)}$. Takové parciální vnorení f lze **bezprostredne prodloužit**, když pro každé a∈ A existuje b∈ B tak, že $f \cup \{\langle a, b\rangle\}$ je parciální vnorení $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.
- T má algebraický prvomodel a T modelove kompletní⇒ kompletní a algebraický prvomodel=prvomodel.

eliminace kvantifikátorů definice
1. Nejmenší množina formulí obsahující danou množinu Γ formulí a uzavrená na ¬, &, ∨ se znací b(Γ); její prvky se nazývají **booleovské kombinace** formulí z Γ.
2. Bud Γ množina L-formulí a T teorie v L. Množina Γ je eliminační pro teorii T , jestliže ke každé L-formuli $\varphi(\overline{x})$ s $l(\overline{x})>0$ existuje booleovská kombinace $\psi(\overline{x})$ formulí z Γ tak, že T |- $\varphi(\overline{x})\leftrightarrow\psi(\overline{x})$. Je-li Γ množina všech atomických formulí, ríkáme, že T má **eliminaci kvantifikátoru**.

(Eliminacní kriterium.) Když pro každé A |= T , B |= T lze každé konecné neprázdné parciální vnorení A do B bezprostredne prodloužit, má T eliminaci kvantifikátoru.

Robinsonova aritmetika Q
Je peanova bez indukce ☺

teorie naslednika SC
Jazyk: L =<S>, kde S je je unární funkcní symbol
Axiomy:
(Q0) $(\exists x)((\forall y)(Sy \neq x)\ \&\ (\forall z \neq x)(\exists y)(Sy=z))$ „ex. právě jeden počátek a pak další prvky pokr.souvisle“
(Q2) $Sx = Sy \to x=y$
SC-schema $x \neq S^n x$; $n>0$ je přirozené

teorie grafu Gh
Teorie Gh grafu (obycejných neorientovaných bez smycek)
Jazyk: L^{gh} =<E>, kde E je binární relacní symbol
Axiomy: $xEy \to yEx$, $\neg(xEx)$.

„Lehky“

Neekvivalentní (kompletní) P-teorie.

Existuje $2^{(2^l)}$ neekvivalentních P-teorií a právě 2^l kompletních neekvivalentních P-teorií.

Všech modelů na $|P| = l$ prvovýrocích je 2^l (každý prvovýrok může nabývat jedné ze dvou hodnot). Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model. Teorie jsou neekvivalentní, když mají různé třídy modelů. Proto počet **kompletních neekvivalentních P-teorií** je 2^l (stačí vybrat jeden z možných modelů).

Když nemusí být teorie kompletní, může mít modelů více – a to libovolnou podmnožinu možných modelů. Takových podmnožin je $2^{(2^l)}$, proto je tolik i **neekvivalentních P-teorií**.

P množina prvovýroků velikosti l, p je prvovýrok z P:

a) určete počet neekvivalentních teorií T takových, že T |- p (v T je dokazatelné p)

b) určete počet neekvivalentních teorií T takových, že T sjednoceno s {p} je sporná teorie

a) p musí byt ve všech T – jako bysme měli o 1 prvovyrok min (počet ohodnocení ${}^P2$ je 2^l, počet pomnožin ${}^P2$ je 2^{2^l}) , takže $2^{(2^{l-1})}$

b) ¬p musí byt ve všech T – jako bysme měli o 1 prvovyrok min (počet ohodnocení ${}^P2$ je 2^l, počet pomnožin ${}^P2$ je 2^{2^l}) , takže $2^{(2^{l-1})}$

Neekvivalentní pravdivé, lživé a nezávislé výroky.

Teorie T má $2^{(2^l-|M(T)|)}$ neekvivalentních pravdivých a také lživých výroků a dále má $(2^{|M(T)|} - 2) * 2^{(2^l - |M(T)|)}$ nezávislých.

- Výrok a je **pravdivý** v T , neboli T |= a, jestliže platí v každém modelu teorie T , neboli $M(T)\subseteq M(a)$. Všechny neekvivalentní pravdivé výroky v T mají stejné ty modely, které má T a liší se v těch ostatních. Tedy nás zajímá, kolik je těch ostatních – tolik, co podmnožin $2^l - |M(T)|$. Proto má T $2^{(2^l - |M(T)|)}$ neekvivalentních pravdivých výroků.
- Výrok a je **lživý** v T , jestliže T |= ¬a, neboli ¬a platí v každém modelu jako T . Tedy stejnou úvahou jako v předchozím (je místo a uvažujeme ¬a) dojdeme ke stejnému výsledku $2^{(2^l - |M(T)|)}$.
- Počet všech neekvivalentních **nezávislých** výroků v T je počet všech – počet pravdivých – počet lživých, tedy $2^{2^l} - 2^{(2^l-|M(T)|)} - 2^{(2^l-|M(T)|)} = 2^{2^l} - 2 * 2^{(2^l-|M(T)|)} = (2^{|M(T)|} - 2) * 2^{(2^l - |M(T)|)}$

Teorie T = {p0, p0 ⇒ p1} nad mnozinou prvovyroku P={p0, p1, p2}

a) Kolik existuje neekvivalentnich pravdivych vyroku teorie T?

b) Kolik existuje neekvivalentnich lzivych vyroku teorie T?

c) Kolik existuje neekvivalentnich nezavislych (ani pravd. ani lživých) vyroku teorie T?

M(T)={<1,1,0>,<1,1,1>} , |M(T)|=2

a) počet různých $M(\varphi)$ (S je ekv. T ⇔ M(S)=M(T)) takových, že $M(T)\subseteq M(\varphi)$ je tolik, kolik je podmnožin množiny ${}^P2$-M(T), takže $2^{(2^l-|M(T)|)}$

b) pravdivé negované, takže $2^{(2^l-|M(T)|)}$

c) všechny neekvivaletní (počet ohodnocení ${}^P2$ je 2^l, počet pomnožin ${}^P2$ je 2^{2^l}) – pravdivé a lživé neekvivaletní, takže $2^{2^l} - 2 * 2^{(2^l-|M(T)|)} = (2^{|M(T)|} - 2) * 2^{(2^l - |M(T)|)}$

a) počet nezávislých neekv. výroků v teorii T

b) počet vyvratitelných výroků v teorii T

c) výrok a, spočtěte počet neekv. výroků b: v T není dokazatelné a -> b a v T není dokazatelné b -> ¬a

a) všechny neekvivaletní (počet ohodnocení ${}^P2$ je 2^l, počet pomnožin ${}^P2$ je 2^{2^l}) – pravdivé a lživé neekvivaletní, takže $2^{2^l} - 2 * 2^{(2^l-|M(T)|)} = (2^{|M(T)|} - 2) * 2^{(2^l - |M(T)|)}$

b) počet negovaných dokazatelných, takže: počet různých $M(\varphi)$ takových, že $M(T)\subseteq M(\varphi)$ je tolik, kolik je podmnožin množiny ${}^P2$-M(T), takže $2^{(2^l-|M(T)|)}$

c) b -> ¬a se převede na a -> ¬b a pak se počítá počet neekv.nezávislých výroků v T,a: $(2^{|M(T,a)|} - 2) * 2^{(2^l - |M(T,a)|)}$

Řekl mi, že |P|= l∈N a teorie T má k dokazatelných výroků -- otázka tedy byla, kolik má modelů.

Použil sem vzoreček $k=2^{(2^l-|M(T)|)}$ a pak je to: $|M(T)| = 2^l - \log(k)/\log(2)$

Dodatečná otázka byla, „Co když ta teorie bude kompletní?“

Bude mít právě jeden model

Neekvivalentní (kompletní) jednoduché extenze teorie

Existuje právě |M(T)| neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí T a 2|M(T)| neekvivalentních jednoduchých extenzí T (z nichž jedna je sporná).

Teorie S je extenze T , jestliže $\Theta(T) \subseteq \Theta(S)$, což je právě tehdy, když $M(S) \subseteq M(T)$. S je jednoduchá extenze T , jestliže P(T) = P(S).

Extenze S teorie T tedy má některé z modelů teorie T , kterých je |M(T)|. Pokud má být S kompletní, tak musí mít model jediný, tedy **neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí** teorie T je |M(T)|

Pokud nemusí být S kompletní, tak si vybere libovolnou podmnožinu modelů T , tedy **neekvivalentních jednoduchých extenzí** T je $2^{|M(T)|}$

Množina prvovýroků P={p,q,r} a teorii T={q, p v r}. Otázky:
a) počet neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie T
b) počet neekvivalentních nezávislých výroků teorie T

M(T)={<1,1,0>,<0,1,1>,<1,1,1>} , |M(T)|=3

a) počet podmnožin M(T), protože extenze má model vždy podmožinu M(T) **(2.1.12. 1)),** takže $2^{|M(T)|}$

b) všechny neekvivaletní (počet ohodnocení ${}^{P}2$ je 2^{l}, počet pomnožin ${}^{P}2$ je $2^{\wedge}2^{l}$) – pravdivé a lživé neekvivaletní, takže $2^{\wedge}2^{l} - 2 * 2^{\wedge}(2^{l} - |M(T)|) = (2^{\wedge}|M(T)| - 2) * 2^{\wedge}(2^{l} - |M(T)|)$

T -sémanticky neekvivalentní nezávislé výroky teorie T

Kolik je T -sémanticky neekvivalentních nezávislých výroků teorie T ?

Výroky a a b jsou **T-sémanticky ekvivalentní**, neboli $a \sim_T b$, jestliže

$M(T,a) = M(T,b)$, neboli $M(T \cup a) = M(T \cup b)$. Neboli $M(T) \cap M(a) = M(T) \cap M(b)$.

Ukážeme, že dva libovolné výroky a, b pravdivé v T jsou T-sémanticky ekvivalentní.

$T \models a$, $M(T) \subseteq M(a) \Rightarrow M(T, a) = M(T) \cap M(a) = M(T)$.

$T \models b$, $M(T) \subseteq M(b) \Rightarrow M(T, b) = M(T) \cap M(b) = M(T)$.

Tedy T -sémanticky neekvivalentní výrok pravdivý v T je jediný. Stejně tak lživý.

Všech T -sémanticky neekvivalentních výroků je tolik, kolik je podmnožin M(T) (neboť se musí lišit právě v modelech teorie T), tedy $2^{|M(T)|}$.

Proto všech T -sémanticky neekvivalentních nezávislých výroků je $2^{|M(T)|} - 2$.

Neekvivalentní výroky T-sémanticky ekvivalentní fixnímu výroku a

Buď $a \subseteq V F_P$. Kolik je neekvivalentních výroků b takových, že $a \sim_T b$ (jsou T -sémanticky ekvivalentní a)?

Musí tedy platit, že $M(T) \cap M(a) = M(T) \cap M(b)$. Všechny takové výroky se tedy musí shodovat v těch modelech, co má a společné s teorií T , ale lišit se v těch ostatních. Ty, co má a společné s T , jsou již dané. Zajímá nás tedy jen to, v kolika modelech se mohou lišit – v tolika, co je podmnožin $2^{l} - |M(T)|$. Proto všech neekvivalentních výroků T -sémanticky ekvivalentních ' je $2^{\wedge}2^{l} - |M(T)|$

Neekvivalentní výroky b, že b|=a nebo a|=b

Nechť a je výrok. Kolik je neekvivalentních výroků b takových, že b|=a nebo a|=b?

Neekvivalentních b takových, že $b \models a \Leftrightarrow M(b) \subseteq M(a)$ je tolik, co podmnožin M(a), tedy $2^{|M(T)|}$.

Neekvivalentních b takových, že $a \models b \Leftrightarrow M(a) \subseteq M(b)$ je tolik, co „nadmnožin“ M(a), tedy $2^{\wedge}(2^{l} - |M(T)|)$.

Neekvivalentní takový, že b|=a a a|=b , tedy M(b) = M(a), je jediný (neboť modely a jsou dané a on má mít přesně ty stejné).

Proto neekvivalentních výroků takových, že b|=a nebo a|=b je $2^{|M(T)|} + 2^{\wedge}(2^{l} - |M(T)|) - 1$ (jednoduchý princip inkluze a exkluze).

Neekvivelntní výroky pravdivé v teorii { a ∨ b }.

Nechť {a, b} nemá model. Kolik je neekvivalentních pravdivých výroků c teorie {a ∨ b}?

Má platit $\{a \vee b\} \models c$, tedy $M(a \vee b) = (M(a) \cup M(b)) \subseteq M()$. Zajímá nás tedy, kolik je „nadmnožin“ $M(a) \cup M(b)$. Tolik, co podmnožin ${}^{P}2 - (M(a) \cup M(b))$, tedy $2^{\wedge}(2^{l} - |M(a) \cup M(b)|)$.

Uvědomme si, že $|M(a) \cup M(b)| = |M(a)| + |M(b)| - |M(a) \cap M(b)| = |M(a)| + |M(b)|$,

neboť $M(a) \cap M(b) = \emptyset$, jelikož {a, b} nemá dle zadání žádný model.

Tedy neekvivalentních výroků pravdivých v teorii { a ∨ b } je $2^{\wedge}(2^{l} - |M(a) \cup M(b)|)$.

Predikatova logika. Predpokladame jazyk s rovnosti.
Urcete, zda-li jsou uvedene teorie ekvivalentni nejake otevrene teorii:
a) DiLO
b) teorie grup <+,-,0>
c) teorie následníka SC
d) T={(∃x,y)R(x,y)}, kde R je binarni relacni symbol.
Def.: Teorie je otevřená, je-li její každý mimologický(mimo PL1-3) axiom otevřená formule.
Teorie jsou ekv. pokud M(T)=M(S)
věta 3.1.52. 3) Je-li B model otevřené teorie T, pak každá podstruktura A⊆B je také model T.

a) DiLO, nema ekvivalentni otevrenou teorii, protoze pro model < Z,≤ > podstruktura < N,≤ > neni modelem DiLO (1 nema predchudce).
b) Teorie grup je sama otevrena. (nema žádné kvantifikátory)
c) teorie následníka SC, nema ekvivalentni otevrenou teorii, protoze pro model < N,S > podstruktura < N-{2},S > neni modelem SC (1 nema následníka).
d) Posledni teorie nema ekv. otevrenou teorii, opet se vyuzije vyse zminena veta, staci vzit libovolny model teorie a pro tento model muzeme vzit podstrukturu, ktera po zuzeni bude mit R = ∅ , potom nebude modelem T.

T je jednoducha bezesporna extense Peanovy aritmetiky. Zdůvodnete, jestli plati nasledujici tvrzeni:
a) T ma silne nerozhodnutelny model.
c) $\mathcal{A}$ je modelem T. Potom Th($\mathcal{A}$) ma silne nerozhodnutelny model.

a) "Teorie"(1.7.2), ze libovolny model $\mathcal{A}$ teorie T (kde T je bezesporná extenze Q) je silne nerozhodnutelna struktura a ze to plyne z vety o nerozhodnutelnosti. Takto:
Pokud T je bezesporná extenze Robinsonovy aritmetiky Q (což jednoduchá bezesporná extenze Peanovy aritmetiky je), tak platí dle věty 4.3.4 (O nerozhodnutelnosti), že je T nerozhodnutelná. Také platí, že $\mathcal{A}$|=Q. A teď ještě potřebujeme ukázat, že každá teorie T', která má $\mathcal{A}$ za model, je nerozhodnutelná. Nechť tedy $\mathcal{A}$|=T‘. Pak T‘∪Q je jednoduché rozšíření T' o konečně axiomů. Tedy dle věty 4.3.6 je i T' nerozhodnutelná. Proto A je silně nerozhodnutelná.

c) Již víme, že $\mathcal{A}$ je silně nerozhodnutelná struktura. Dále platí, že $\mathcal{A}$|=Th($\mathcal{A}$). Proto jednak Th($\mathcal{A}$) je nerozhodnutelná a zřejmě má i silně nerozhodnutelný model - a to $\mathcal{A}$.

Rozšiřte Peanovu aritmetiku o axiom sudosti
celej axiom by mel podle me vypadat teda: Sude(x) <-> (∃ y)(x=S(S(0))*y)

důkaz že DeLO má eliminaci kvantifikátorů:
Každé neprázdné konecné parciální vnorení mezi modely DeLO lze jasne bezprostredne prodloužit, DeLO je tedy koexistencní a tedy má eliminaci kvantifikátoru.

Jsou nasledujici teorie <u>rozhodnutelne</u>, zduvodnete:
a) PE (čistá rovnost) rozsirene o schema "existuje nekonecne prvku"
b) Th($\mathcal{N}$)
c) DeLO*
a) je- je kompletní a je $\sum_1$ axiomizovana (nema zadne axiomy) (T 4.2.13 (2))
b) $\mathcal{N}$ = <N, S,+, ·, 0, ≤ > není rozhodnutelná ($\mathcal{N}$ silně nerozhodnutelná a platí, že $\mathcal{N}$ |= Th($\mathcal{N}$), proto jednak Th($\mathcal{N}$) je nerozhodnutena a zřejmě má i silně nerozhodnutelný model - a to $\mathcal{N}$)
c) je – má právě 4 neekvivalentní kompletní extenze DeLO -, +,+-, prázdné (ma $\sum_1$ kompletaci) a muzeme ji vzit jako Δ_1 (rekurzivni)

Určete
a) κ-kategoričnost a ω-kategoričnost
b) rozhodnutelnost a kompletnost
c) prvomodel a algebraický prvomodel (pokud existují)

U těchto teorií:
1) teorie následníka SC
2) Vektorové prostory nad R
3) DeLO

1) a) κ-kategorická(SC má jen nekonečné modely a je kategorická v ∀ nespočetné kardinalitě) , není ω-kategorická (např tyto 2 modely v kardinalite ω : <N,S> a <Z,S> nejsou izomorfni) b) kompletní (plyne z toho že je kategorická v ∀ nespočetné kardinalitě), rozhodnutelná (kompletnost + rekurzivní) c) prvomodel, algebraický prvomodel: <N,S>
2) a) není ω-kategorická, je κ-kategorická pro kazdy nekonecny kardinal κ>|R| (dva modely T s mohutností κ mají každý bázi o mohutnosti κ a tak jsou izomorfní) b) kompletní (z kategoricnosti), není rozhodnotelná c) <R,+,−,0, r> (je modelově kompl. => je to i prvomodel)
3) a) je κ-kategorická, je ω-kategorická b) kompletní(z ω-kategoričnosti), rozhodnutelná (kompletnost + rekurzivně axiomatizovaná) c) prvomodel, algebraický prvomodel: < Q,≤ >

Jen mě zarazil, když jsem tvrdil, že z **k-kategoričnosti plyne kompletnost** (což platí) i rozhodnutelnost (to už ne...) Pak chtěl ode mě příklad nějaký teorie, která je právě kompletní a není rozhodnutelná, což jsem naštěstí vymyslel (vzpomněl jsem si na N, která je silně nerozhodnutelná ☺)

Mejme jazyk <c0, c1, c2, c3> a teorii T={$c_i \neq c_j$} pro i,j=0,1,2,3 kde i≠j.
a) Jake ma teorie T izomorfni spektrum?
b) Vyjmenujte vsechny jednoduche kompletni extenze teorie T.
c) Je T rozhodnutelna?
a) I(k, T)=1 pro κ≥4 (pro každou kardinalitu≥4 máš spektrum 1, pro κ menší to model nemá) **(viz. příklad 3.1.21.)**
b) jednoduchá (P(T)=P(S)), kompletní (⇔má 1 model), extenze (M(S)⊆M(T)) S:

- rozsireni o system axiomu: "existuje nekonečně prvků" (pro každné n přidám: $\exists x_1,\dots,x_n(\bigwedge_{0<i<j\leq n} x_i \neq x_j)$)

Poznámka: $\exists x_1,\dots,x_n(\bigwedge_{0<i<j\leq n} x_i \neq x_j)$ tohle tvrdí, že existuje takový ohodnocení proměnných x_1 až x_n, že nejsou žádný dvě ohodnocený stejně. Tedy že máš alespoň tolik možností, jak který prvek ohodnotit, kolik sis vymyslel proměnných, tzn. máš *alespoň* (≥)*n* prvků.
No a axiom je konečný, čili tohle můžeš napsat pro libovolně velké *n*, ale nemůžeš do toho dotlouct "existuje těch proměnných nekonečně mnoho". Na to v predikátový logice nemáš výrazový prostředky, takže si pomůžeš tím, že do té extenze přidáš ne jeden axiom, ale nekonečně mnoho axiomů..
Pro každé n to bude "ex. alespoň *n* prvků" a tím máš zaručeno, že jedinej model je nekonečnej - protože pro každej konečnej model o kardinalitě *m* najdeš $n_0 > m$, že máš v teorii axiom, který požaduje alespoň tolik prvků.
"Existuje právě" je prodloužení tohohle výroku o to, že "pro libovolné ohodnocení proměnné *y* vím, že bude stejné jako jeden z *x*ů", tedy že nemám už žádný jiný prvek, kterým bych mohl to poslední *y* odlišit.

- každé rozsireni o axiom: „existuje *právě* *n* prvků“ ($\exists x_1,\dots,x_n(\bigwedge_{0<i<j\leq n} x_i \neq x_j \mathbin{\&} \forall y (\bigvee_{0<i\leq n} x_i \neq y))$) pro n>=4

c) podle b) existuje kompletace T a z jejího tvaru je vidět že jí lze vzít jako Δ_1 ⇒T je rozhodnutelná

Prazdna teorie v jazyce <c> kde c je konstantni symbol
a) je kompletni
b) je ω-kategoricka
c) je rozhodnutelna?
a) neni, dokazeme existenci 1prvkoveho <{0},c> i 2prvkoveho modelu <{0,1},c> a formuli ∀x(x=c) ktera je nezavislá (v jednom modelu plati v druhym ne)
b) je, model <N,c> je isomorfni se vsemi modely velikosti ω (c je funkcni symbol)
c) je - Σ_1 axiomizovana (nema zadne axiomy) a protoze ma nejakou kompletaci:

- rozsireni o system axiomu: "existuje nekonečně prvků" (pro každné n přidám: $\exists x_1,\dots,x_n(\bigwedge_{0<i<j\leq n} x_i \neq x_j)$)

- každé rozsireni o axiom: „existuje právě n prvků“ ($\exists x_1,\dots,x_n(\bigwedge_{0<i<j\leq n} x_i \neq x_j \mathbin{\&} \forall y (\bigvee_{0<i\leq n} x_i \neq y))$) pro n>=1

Predikatova logika. Uloha je v logice s rovnosti, neni-li uvedeno jinak.
Bud $\mathcal{A}$ = <A> model teorie ciste rovnosti PE.
1) bud A nekonecne. Uvedte vsechny podmnoziny A^2, definovatelne bez parametru ve strukture $\mathcal{A}$
2) bud A konecne. Uvedte vsechny podmnoziny A, definovatelne bez parametru ve strukture $\mathcal{A}$ a vsechny podmnoziny definovatelne z parametru ve strukture $\mathcal{A}$

1) Každá podmnožina $\boldsymbol{A}^2$ definovatelná v $\mathcal{A}$ je definována nějakou formulí φ(x,y), přičemž každá taková by měla být v PE ekvivalentní jedné z formulí ⊤, x=y, x≠y a ⊥, což dává po řadě množiny $\boldsymbol{A}^2$, {<a,a>, a∈$\boldsymbol{A}$}, {<a,b>, a,b∈$\boldsymbol{A}$, a≠b}, ∅
2) Pro definovatelné bez parametrů vychází s obdobným argumentem jako u 1) množiny $\boldsymbol{A}$, ∅. S parametry je definovatelná libovolná podmnožina $\boldsymbol{A}$ – můžeme si kýžené prvky prostě vyjmenovat, jelikož je jich vždy konečně mnoho.

Dostal sem uspořádání racionálních čísel, < Q, ≤ >; otázky byly:
1) Jaké všechny jednoprvkové podmnožiny Q lze definovat v < Q, ≤ > bez parametrů?
2) Jaké všechny podmnožiny Q^2 lze definovat v < Q, ≤ > bez parametrů?

Přičemž množina je definovaná bez parametrů v A s jazykem L, když je to množina {< a_1,..,a_n> : A|=φ[a_1,..,a_n]} pro nějakou φ∈Fm_L.

Po definici definované množiny už nebyly moje znalosti tak úžasné. Vypsal sem mu nějaké množiny, co se daly definovat z nějakých formulí jako a≤b, a<b, a≠b, atd., ale neměl sem důkaz -- ani mě žádný nenapadal --, že to jsou množiny všechny. Při pokecu s Mlčkem sem se dozvěděl, že na to du „překvapivě správně“, neboť **< Q, ≤ >** je model DeLO, která má eliminaci kvantifikátorů -- tedy by zřejmě stačilo vzít všechny booleovské kombinace atomických formulí a z nich definovat množiny, pak by to měly být množiny všechny. (Pokud sem Mlčka pochopil správně.)

mas P prvovyroky, k tomu n >0 prirozene , pak teda vezmes {T_i, i<n} teorie a
hledas axiomaticky systém (φ_1,..,φn)
T kde sjednoceni modelu T_i pro i<n je roven modelum T

jde o to ze tam resis axiomaticky system (jako v podstate ty axiomy co definuji celou mnozinu vsech pripustnych formuli, tj to pomoci ceho dokazujes zda v te teorii neco plati)
a ukazes ze to je tak, ze vezmes n tice kde je φ_i
kde to je vlastne vsechny ntice ktery vyreberes z vyroku kazdy ty teorie - takze mas vsechny mozny ntice co si schopen dat dokupy.
vpodstate jen zajistis aby platila vzdy alespon jedna formule ze vsech tech teorii v te ntici
pak ukazes - ze kdyz by tam neco nebylo tak by to nebylo ani v tom sjednoceni modelu
a naopak kdyz tam je neco navic tak by to byl nejaky spor co si tak pamatuji
dukay sporem

"Tezky"

Dostal jsem zkoumat teorii T=Th($\langle (0,1) \subset \mathbf{R}, \leq^{\mathbf{R}} \rangle$)
Po chvili premysleni jsem dospel k zaveru, ze tahle teorie bude ekvivalentni s DeLO. (A taky pry opravdu je, ale to se mi nepovedlo dokazat - nicmene to nevadilo).
Tedy zbytek "vyzkumu" uz bylo obycejne DeLO (bez koncu, protoze (0,1) je otevreny interval).
Myslim, ze kdybych mel zkoumani teorie v poradku, tak by se me snad uz ani na nic dalsiho neptal a odesel bych s jednickou.
Bohuzel jsem mu "dokazal", ze T nema elim.kv., i kdyz spravne je, ze ji ma. To Mlcka moc nepotesilo, a tak mi dal dokazat, ze z elim.kv. plyne modelova kompletnost. Jak tady uz zaznelo, clovek si muze jit sednout a promyslet to, ale po nekolika minutach se asi nudil, a tak mi rekl, at uz mu to jdu predvest. Dukaz jsem mel skoro cely, chybel jeden krok - navrhnul mi dvojku.
Rikal jsem si, proc to nezkusit rovnou na 1 (krom toho, ze jsem byl mega stastnej, ze to vubec mam ☺).
Tak se me zeptal na jeden silne nerozhodnutelny a jeden rozhodnutelny model teorie teles. Ten silne nerozhodnutelny je zcela urcite standardni **Q** , a rozhodnutelny je nejaky model teorie uzavrenych teles (to uz jsem ale nevymyslel, takze jsem odesel s dvojkou).

Vypadá to, že těžká otázka je obvykla analýza nějaké teorie. Na (možná řečnickou) otázku pana doc. Mlčka, jakou teorii bych měl dostat, jsem odpověděl, že nějakou pěknou jednoduchou - a dostal jsem skutečně tu nejjednodušší, tedy PE (teorie prázdného jazyka s rovností bez axiomů).

Pana Mlčka zajímala
- kompletnost - PE není kompletní, kompletace jsou právě extenze o axiomy "existuje právě n prvků" a "existuje nekonečně prvků"
- rozhodnutelnost - je rozhodnutelná, protože podle předchozího má Σ_1 kompletaci. Ještě je potřeba, že je Σ_1-axiomatizovaná, což je nicméně triviální, když nemá žádné axiomy.
- modelová kompletnost - není modelově kompletní (to mi trochu napověděl), snadno se najde protipříklad - pro struktury A={0}, B={0,1} platí, že obě jsou modelem PE, A je podstruktura B, ale formule $(\exists x,y)x\neq y$ v B platí, ale v A ne, tedy A není elementární podstruktura B
- eliminace kvantifikátorů - nemá (plyne z předchozího)
- izomorfní spektrum - I(k, PE) = 1 pro každé k

Potom se ještě ptal jakými axiomy vyjádřím "existuje nekonečně prvků" (pro každné n přidám: $\exists x_1,\ldots,x_n(\bigwedge_{0<i<j\leq n} x_i\neq x_j)$), jaká je definice 1-koexistence, co se změní, když se do PE přidá jeden konstantní symbol (nic, je to konzervativní extenze).

jestli je f-homogenita silnější než 1-koexistence

Tímto myslel podle mně větu 5.2.5.2) (Eliminační kriterium), resp. Poslední poznámku z 5.2.4. Když pro každé A|=T, B|=T lze každé neprázdné konečné parciální vnoření f modelu A do B bezprostředně prodloužit, je T 1-koexistenční. Tedy f-homogenita implikuje 1-koexistenci. (Která je již ekvivalentní s eliminací kvantifikátorů, ze které zase plyne modelová kompletnost, jak již zde bylo řečeno.)
A pozor na to, pojem f-homogenita není v textu k přednášce definován. Je až na konci textu o analýzách teorií na str. 25 (a to až v tom nejnovějším, kterého jsem si třeba já ke zkoušce nevšimla, že byl updatován).

tezka otazka byla docela jednoducha:
1) mejme konecnou mnozinu K modelu (ve vyrokove logice), najdete jeji axiomatiku.
reseni: konecnost mnoziny implikuje uzavrenost, axiomatizovatelna tedy je; staci vzit pro kazdou koncenou podmnozinu prvovyroku disjunkci konjunkci predepisujici hodnoty odpovidajici jednotlivym modelum (tedy pro k-tici prvovyroku neco jako"funkce se na k-tici chova jako prvni model z K" nebo "... druhy ... ".
2) Je K konecne axiomatizovatelna pro nekonecne P?
No neni, nebot kazdy vyrok axiomatiky fixuje pouze hodnoty konecneho poctu provyroku.
3) Je doplnek K axiomatizovatelny?
No neni, jinak by K musela byt konecne axiomatizovatelna.