Elektrostatika

- **Redukce Maxwellových rovnic pro elektrostatická řešení.**

Neměnná $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = 0\right)$, čistě elektrická pole ($\vec{j} = 0$), ve vakuu ($\varepsilon = \varepsilon_0$)

$$\boxed{\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0} \end{aligned}}}$$

- **Elektrický potenciál, elektrická intenzita, silové působení.**

Vztah potenciálu a elektrické intensity:

$$\boxed{\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi}}$$

Nejednoznačnost elektrického potenciálu:

$$\Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}_1) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Potenciál elektrostatického pole bodového náboje:

$$\boxed{\Phi(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}}$$

Definice elektrické intensity, elektrická síla:

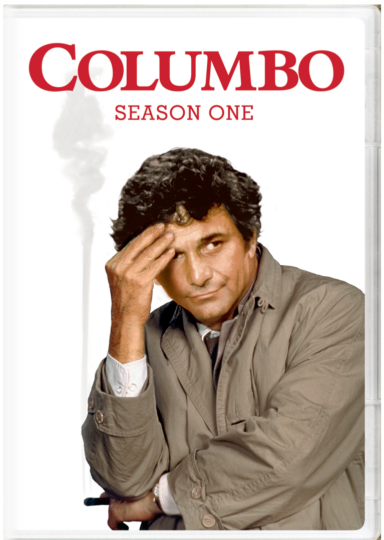
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}(\vec{x})}$$

q ... testovací náboj

Coulombův zákon ve vakuu:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}}{q} = \cancel{\frac{q}{q}} \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}\,'}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|^3}}$$

q ... testovací náboj, q' ... reálný náboj



Poznámka: *Čárkujeme zdroje (ZDROJ'), nečárkované hodnoty jsou body pole, kde měříme*

- **Rovnice siločáry a ekvipotenciály.**

Znázornění hodnot **skalárního pole**

➪ Rovnice ekvipotenciály: $\boxed{\Phi(\vec{x}) = \Phi_0}$

Znázornění hodnot **vektorového pole**

➪ Rovnice siločáry: $\boxed{\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{x}(s) = \lambda(s)\vec{E}\,(\vec{x}(s))}}$

... derivace tečného vektoru $\vec{x}(s) \parallel \vec{E}$, $\lambda(s) =$ škálovací faktor

- **Poissonova a Laplaceova rovnice.**

➪ Poissonova rovnice: $\boxed{\boxed{\Delta\Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x})}}$

$\downarrow$ $\left(\begin{matrix}\text{pokud nemáme zdroje (náboje)} \\ \varrho(\vec{x}) \equiv 0\end{matrix}\right)$

➪ Laplaceova rovnice: $\boxed{\Delta\Phi(\vec{x}) = 0}$

- **Řešení Poissonovy rovnice ve volném prostoru.**

Důležitý vzorec

$$\boxed{\boxed{\Delta\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')}}$$

Potenciál buzený spojitým rozložením náboje:

$$\boxed{\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}q\,'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} = \int\!\!\int \frac{\varrho(\vec{x}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}\,\mathrm{d}^3x'}$$

- **Gaussova věta v elektrostatice a její užití při hledání *symetrických řešení (kurzívou je označena důležitá látka probíraná na cvičení, v domácích úlohách nebo např. v přednáškách z Matematicky pro fyziky).***

- **Bodový náboj jako δ-funkce.**

- **Vztah $\Delta \frac{1}{|r|} = -4\pi\delta^{(3)}(r)$, potenciál rovnoměrně nabité koule, rovnost ve smyslu distribucí.**

- **Vodiče v elektrostatice, hraniční podmínky.**

- **Plošná nábojová hustota.**

- **Spojitost/nespojitost elektrické intenzity a potenciálu.**

- **Matice kapacit.**

- ***Přibližné určení ze superpozice řešení.***

- **Greenovy věty a jejich užití.**

- **Energie spojitého rozložení náboje a soustavy vodičů.**

- ***Extremalita energie řešení Laplaceovy úlohy při fixovaném potenciálu na hranici.***

- **Křivočaré ortogonální souřadnice, bázové vektory, Lameovy koeficienty.**

- **Vyjádření vektorového pole pomocí bázových vektorů.**

- **Gradient, divergence, Δ a rotace v křivočarých souřadnicích.**

- **Pole bodového náboje a řešení Poissonovy rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami.**

- **Kulová inverze a řešení Laplaceovy rovnice.**

- **Potenciál bodového náboje poblíž vodivé koule.**

- ***Matice kapacit dvou vodivých koulí.***

- **Polynomy v kartézských souřadnicích jako řešení Laplaceovy rovnice.**

- **Jejich kulová inverse.**

- **Holomorfní funkce jako potenciály a siločáry řešení 2D Laplaceovy rovnice.**

- **Multipólový rozvoj.**

- **Princip.**

- ***Souvislost Legendreových polynomů a multipólového rozvoje pole axiálně symetrického zdroje.***

- **Dipólový moment.**

- **Potenciál a elektrická intenzita elektrického dipólu.**

Časově neměnná magnetická pole

- **Polní rovnice pro magnetické pole stacionárních proudů.**

- **Ampérův zákon, *použití k určení pole.***

- **Vektorový potenciál.**

- **Kalibrace ve stacionárním případě.**

- **Biotův-Savartův vzorec, *použití k určení pole.***

- **Magnetický dipólový moment a dipólové pole lokalizovaného stacionárního proudu.**

- **Silové působení proudů a magnetického pole.**

- **Energie magnetického pole.**

- **Indukčnost.**

- **Materiálové vztahy.**

- **P a M, D a H.**

- **Ohmův zákon.**

- **Podmínky na rozhraní dvou prostředí, plošné náboje a proudy.**

- **Silové působení na plošné zdroje.**

- ***Pole permanentního magnetu.***

Kvazistacionární přiblížení

- **Vyjádření E a B pomocí potenciálů.**

- **Rovnice pro potenciály a „okamžité” šíření pole od zdroje.**

- **Indukčnost a elektromagnetická indukce.**

- **Svázání rovnic přes Ohmův zákon, skinový jev a rovnice difuse, hloubka vniku, relaxační doba zániku magnetického pole.**

- ***Indukované elektrické pole v časově proměnném homogenním a dipólovém magnetickém poli.***

- **Toky energie v kvazistacionárním přiblížení.**

Nestacionární pole

- **Maxwellovy rovnice.**

Rovnice kontinuity pro elektrickou nábojovou hustotu: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Úplný tvar Maxwellových rovnic:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}}$$

Předpokládáme jednoduché materiálové závisloti: $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ a $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$

- **Tenzor elektromagnetického pole.**

$$\boxed{F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}}, \quad \boxed{F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}}$$

- **Lorentzovy transformace.**

Při Lorentzově transformaci se tenzor elektromagnetického pole transformuje podle vztahu

$$\boxed{F^{ik} = \Lambda^i_m \Lambda^k_n F^{mm}}$$

- **Elektromagnetické potenciály, kalibrační volnost, Coulombova a Lorenzova kalibrace.**

Nový operátor:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt} \qquad \ldots \text{ d'Alembertův operátor}$$

Polní rovnice pro elektromagnetické potenciály:

$$\boxed{\left(-\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\vec{A}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi\right) = \mu \vec{j}}$$

$$\boxed{\Delta \Phi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon}\varrho}$$

Kalibrační volnost (nemění elektrické ani magnetické pole):

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}^{‘} &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \vec{\Phi} &= \Phi - \partial_t \chi \end{aligned}}$$

Coulombova kalibrace $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0\right)$

$$\boxed{\boxed{\begin{aligned}&\Box\vec{A}=-\mu\vec{j}+\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{\nabla}\Phi\\ &\Delta\Phi=-\frac{1}{\varepsilon}\varrho\end{aligned}}}$$

Lorenzova kalibrace $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi=0\right)$, (Lorentzovsky invariantní :)

$$\boxed{\boxed{\begin{aligned}&\Box\vec{A}=-\mu\vec{j}\\ &\Delta\Phi=-\frac{1}{\varepsilon}\varrho\end{aligned}}}$$

- **Vlnové rovnice pro potenciály.**

CVÍKO + PŘÍKLADY V POČETNÍ ČÁSTI

- **Rovnice kontinuity pro elektrický náboj, souvislost s Lorenzovou kalibrací.**

Z přednášky víme, že můžeme postupovat dvěma směry v odvozování:

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\Box\vec{A}&=-\mu_0\vec{j}\\ \Box\Phi&=-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\partial_t\varrho&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi=0}$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi&=0\\ \Box\vec{A}&=-\mu_0\vec{j}\\ \Box\Phi&=-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\partial_t\varrho=0}$$

Souvisí s tím, jestli vycházíme ze zákona zachování náboje (1. případ), nebo jestli jej vyvodíme jako důsledek kalibrace (2. případ)

- **Zákon zachování energie.**

Rovnice elektrodynamiky musejí splňovat termodynamické postuláty (energie nevzniká/nezaniká).

Výkon mechanických sil = výkon potřebný ke změně el. a mag. polí + výkon odcházející povrchem

➪ vyjádřeno mathematicky

$$\boxed{\int_\Omega -\vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\int_\Omega\left(\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}+\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}\right)\,\mathrm{d}V+\oint_{\partial\Omega}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\,\mathrm{d}\vec{S}}$$

- **Poyntingův vektor, hustota energie elektromagnetického pole.**

Poyntingův vektor:

$$\boxed{\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}}$$

Hustota energie elektromagnetického pole (v lineárním nedispersním prostředí):

$$\boxed{\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}}}$$

- **Zákon zachování hybnosti, Maxwellův tenzor.**

Hustota hybnosti elektromagnetického pole:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}}$$

Maxwellův tensor

$$\boxed{\boxed{\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}} = T_{ik} = E_i D_k + H_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(E_l D_l + H_l B_l)}}$$

Zákon zachování hybnosti:

$$\boxed{\boxed{\partial_t \left(\vec{p}_{\mathrm{mech}}(V) + \int_V \vec{g}\,\mathrm{d}V \right) = \oint_{\partial V} \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}}$$

- **Homogenní vlnová rovnice.**

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt} \right) u(\vec{x}, t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box u(\vec{x}, t) = 0}$$

- **Rovinná vlna, polarizace, tok a hustota energie.**

Rovinná vlna jest určena následujícími potenciály:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{a}\,(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \\ &\Phi(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned}}$$

Automaticky splňují vlnovou rovnici pro jednotkový vlnový vektor ($|\vec{n}| = 1$):

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\vec{A} = |\vec{n}|^2 \vec{a}\,'' - \frac{(-c)^2}{c^2}\vec{a}\,'' = 0$$

Směr vektoru $\vec{E}$ charakterisuje **polarisaci** vlny!

➪ neměnný směr $\vec{E}$ $\Rightarrow$ lineární polarisace

➪ harmonický průběh $\vec{E}$ $\Rightarrow$ kruhová či eliptická polarisace

---

Hustota energie rovinné vlny:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\vec{E}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{B}^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2\right) = \varepsilon_0 c^2 |\vec{a}\,'|^2}$$

Poyntingův vektor rovinné vlny:

$$\boxed{\vec{S} = c\vec{a}\,' \times \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{n} \times \vec{a}\,'\right) = \frac{c}{\mu_0}|\vec{a}\,'|^2\vec{n} = w\vec{c}}$$

$\rightarrow$ rovinná vlna představuje **transport energie** w rychlostí $\vec{c} = \vec{n}c$

$\rightarrow$ transport je doprovázený hybností elektromagnetického pole $\vec{g} = \dfrac{w\vec{n}}{c}$

Poznámka: Pro $\vec{A} = \dfrac{\vec{\epsilon}}{c|\vec{k}|}\,\mathrm{e}^{i|\vec{k}|(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)}$ dostáváme **harmonickou rovinnou vlnu**:

$$\vec{E} = \vec{\epsilon}\,\mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad c\vec{B} = \vec{n}\vec{\epsilon}\,\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

- **TEM vlna podél dlouhého ideálního vedení.**

TEM ... Elektrické i magnetické pole je příčné vzhledem ke směru šíření vlny

Elektrické a magnetické pole TEM vlny:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\nabla}\psi(x,y)\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\\ \vec{B} &= \frac{k}{\omega}\vec{e}_z \times \vec{\nabla}\psi(x,y)\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\end{aligned}}$$

Povrchem může být libovolná **válcová plocha** ... $\psi(x,y) = \text{konst.}$

TEM vlna se nemůže šířit vlnovodem ($\psi(x,y) = \text{konst.}$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\psi = 0$

- **TE a TM vlny.**

TM vlny

Na směr šíření je kolmá jen magnetická složka.

Dirichletova okrajová podmínka (fixní hodnota veličiny na hranici):

$$\psi(\vec{x}) = 0, \qquad \vec{x} \in \partial\Omega$$

➪ představují elektromagnetické pole šířící se podél **přímého dutého** vodiče

TE vlny

Na směr šíření je kolmá jen elektrická složka.

Ve vakuu jsou Maxwellovy rovnice symetrické vůči duální transformaci:

$$\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$$

$$\vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\vec{E}$$

Neumannova okrajová podmínka (fixní hodnota derivace veličiny na hranici):

$$\psi'(x,y) = \psi'_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}mx\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}ny\right), \qquad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2$$

- **Elektromagnetický rezonátor.**

Elektromagnetické vlny mohou ve vodivé dutině vytvářet stojaté vlnění

$$\frac{\omega_{mnq}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(q\frac{\pi}{h}\right)^2$$

- ***TE*$_{n,0}$ *vlna jako superpozice dvou rovinných lineárně polarizovaných vln.***

CVÍKO

Skládáme vlny se shodnou polarisací a amplitudou, ale mírně odlišnými vlnovými vektory:

$$\boxed{\vec{k}_\pm = k_z\vec{e}_z \pm k_x\vec{e}_x}$$

- **Elektromagnetická vlna ve vodivém prostředí, telegrafní rovnice, jejich disperzní relace.**

Telegrafní rovnice

$$\boxed{\boxed{\left(\Delta - \mu_0\gamma\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0}}$$

Dispersní vztah pro telegrafní rovnici:

$$\boxed{-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\gamma\mu_0 = 0}$$

- **Nehomogenní vlnová rovnice.**

Lorentzova kalibrace ve vakuu 4 Maxwellky → 2 Maxwellky:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(r,t) = -\frac{\varrho(r,t)}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(r,t) = -\mu_0\vec{j}(r,t)$$

- ***Retardované řešení pro potenciály.***

CVÍKO

$$\Phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varrho(r', t - \frac{r-r'}{c})}{|r-r'|}\mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{j(r', t - \frac{r-r'}{c})}{|r-r'|}\mathrm{d}^3r'$$

- **Zářivá část pole.**

- **Záření pomalého zrychleně se pohybujícího náboje.**

- **Vyzářený výkon (Larmorova formule).**

Celkový výkon, který vyzařuje v daný okamžik částice s předepsaným pohybem $\vec{x}(t)$

$$\boxed{P = \frac{1}{k}\frac{2q^2|\ddot{\vec{x}}|^2}{3c^3}}$$