

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
13. 6. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
 - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
 - *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
 - *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
 - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
 - *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
 - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*
-

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x) = x \cdot |x - 3|^3$.
- (a) [3 b.] Má funkce f derivaci v bodě $x = 3$? Pokud ano, čemu se rovná? Pokud ne, má v tomto bodě aspoň jednostranné derivace?
- (b) [3 b.] Najděte body, v nichž f nabývá své extrémy, a určete jejich typ (tj. zda je extrém globální nebo jen lokální, zda je to maximum nebo minimum).
- (c) [4 b.] Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f konvexní, a maximální intervaly, na nichž je konkávní.
2. (a) [3 b.] Napište definici pojmu *hromadný bod* a pojmu *limes superior* posloupnosti čísel (a_n) .
- (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení:

Jestliže $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost reálných čísel a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost definovaná vztahem $b_n = |a_n|$, pak platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = |\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n|.$$

- (c) [3 b.] Spočítejte limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované jako

$$a_n = n^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *derivace* funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$.
- (b) [3 b.] Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nemusíte ji dokazovat.
- (c) [4 b.] Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která je diferencovatelná na \mathbb{R} a která splňuje $f(0) = 0$. Nechť pro nějaké $A > 0$ platí $f(A) < 10A$. Dokažte, že existuje $B \in (0, A)$, pro něž platí $f'(B) < 10$.
4. (a) [3 b.] Najděte příklad funkce $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, která není na $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale funkce $|f(x)|$ na $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná je.
- (b) [3 b.] Napište vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa.
- (c) [4 b.] Pro $A \in (-\infty, 0)$ označme $V(A)$ objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy pod grafem funkce e^x na intervalu $[A, 0]$ kolem osy x . Čemu se rovná $\lim_{A \rightarrow -\infty} V(A)$?