

Elektrostatika

pátek 16. června 2023

11:19

Elektrostatika

Elektrostatické pole ve vakuu: elektrický náboj a jeho vlastnosti, bodový náboj, Coulombův zákon, princip superpozice, hustota náboje, energie soustavy nábojů, intenzita elektrického pole, Gaussův zákon, potenciál elektrického pole, Poissonova a Laplaceova rovnice, intenzita a potenciál pole elektrického dipólu, energie dipólu a síly působící na dipól v elektrickém poli.

Elektrostatické pole v přítomnosti vodičů: jev elektrostatické indukce, základní úloha elektrostatiky, kapacita, kondenzátor, energie soustavy nabitých vodičů, hustota energie elektrostatického pole.

Elektrostatické pole v dielektriku: polarizace dielektrika, vázaný náboj, Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku, vektor elektrické indukce, elektrická susceptibilita a permitivita látek, piezoelektrický jev, Clausiův-Mosottiho vztah.

Témata s hvězdičkou na začátku nejsou v seznamu otázek a patří pod jinou otázku, která je uvedena v závorce; v tomto pořadí je uvádí Sedlák a Štoll a dobře navazují.

Elektrostatické pole ve vakuu:

Elektrický náboj a jeho vlastnosti

- Zákon zachování náboje
- Zákon invariantnosti náboje – ve všech vztažných soustavách má stejnou velikost
- Kvantování náboje – existuje nejmenší, dále nedělitelný náboj, všechny náboje jsou jeho násobkem
- Částice a antičástice
- Nábojová kvazineutralita vesmíru

Bodový náboj

- Fyzikální model - nehmotné bezrozměrné těleso nesoucí náboj – analogie hmotného bodu

Coulombův zákon

$$\vec{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \vec{R}_{21}$$

- Vyjadřuje sílu, kterou na sebe působí 2 náboje
- Coulombovské síly jsou centrální = působí po spojnici
- Coulombovské síly jsou izotropní – nezávisí na směru v prostoru
- Jeho tvar vychází z experimentu
- V soustavě jednotek SI se volí $k = c^2 \cdot 10^{-7} \frac{Nm^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Princip superpozice

- Z experimentů vyplývá, že síla mezi dvěma náboji není ovlivněna ostatními náboji v okolí
- Při zkoumání výslednice sil, která působí na náboj v poli mnoha jiných nábojů, můžeme uplatnit princip superpozice, a síly prostě vektorově sečíst

$$\vec{F} = k Q \sum_{i=1}^n Q_i \vec{R}_i$$

$Q \dots$ náboj, který zkoumáme
 $Q_i \dots$ ostatní náboje
 $\vec{R}_i \dots$ vzdálenost mezi Q a Q_i

Hustota náboje

- Při makroskopickém pozorování můžeme považovat rozložení náboje za spojitě (ve smyslu že při libovolném přiblížení bude pořád náboj tvořen mnoha částicemi a bude se jevit spojitě)
- Hustotu náboje definujeme jako limitu při zmenšování okolí daného bodu
- Objemová hustota náboje

$$\rho(r) = \rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad Q = \int_V \rho(r) dV \quad \Delta Q \approx \rho(r) \Delta V$$

- Plošná hustota náboje

$$Q = \int_S \sigma(r) dS$$

- Lineární hustota náboje

$$Q = \int_l \tau(r) dl$$

- Lineární hustota náboje $Q = \int \tau(r) dl$

Energie soustavy nábojů

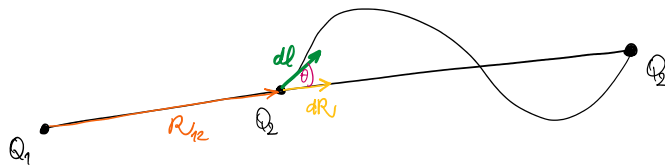
- Odvodí se jako práce vnějších sil překonávajících síly coulombovské při ustanovování daného uspořádání
- Nejdřív se odvodí pro 2 náboje, pro soustavu nábojů pak pomocí principu superpozice
- Mějme jeden náboj a druhý umístíme do nekonečna $\rightarrow$ síla mezi nimi je nekonečně malá, energii považujeme za nulovou
- Přibližujeme náboj po přímce

$$W = \int_{\infty}^{R_{12}} \underbrace{\ominus F_{21}}_{\text{vnější síla se rovná } -F_{21}} dR = - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{R_{12}} \frac{1}{R^2} dR = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}}$$

- Je třeba se přesvědčit, že získaná hodnota potenciální energie se neliší, když se náboj přiblíží po jiné dráze

$$W = \int_{\infty}^{R_{12}} -F_{21} dl = - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{R_{12}} \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{R_{12}} \frac{R \cos \theta}{R^3} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}}$$



- Pro soustavu N bodových nábojů

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}}$$

- Earnshawova věta: soustava nábojů nelze udržovat ve stabilní rovnováze pouze elektrostatickými silami (elektrostatická rovnováha je vždy labilní)
- Madelungova konstanta
 - o Při určování elektrostatické energie iontových krystalů v podstatě sčítáme nekonečné řady
 - o Madelungova konstanta nějak odpovídá této nekonečné řadě, pokud jsem to dobře pochopila
 - o Liší se pro různé soli – souvisí s uspořádáním krystalu
 - o Pro lineární krystal je madelungova konstanta $2 \ln 2 \approx 1,386$
 - o Řádově je potenciální energie připadající na jeden krystal -10^{-28} J – JE ZÁPORNÁ
 - o Vzorec pro energii odvozený z elektrostatiky vypadá, jakože by se měl krystal zhroutit (snížením energie na minimum) – neděje se tak kvůli nějakým kvantovým jevům

Intenzita elektrického pole

- Definiční vztah: $F = Q E(\vec{r})$ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i^3} \vec{R}_i$

- Tvoří vektorové pole
- Vektorové pole dává stejnou informaci jako rozložení nábojů, které ho vyvolávají
- Intenzita elektrostatického pole kolem jednoho bodového náboje Q umístěného v počátku souřadnic:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

- Vektorové pole znázorňujeme pomocí siločar = definovány jako křivky, jejichž tečna má v každém bodě směr vektoru elektrické intenzity
- Síla pole se znázorňuje pomocí hustoty siločar – normování – počet siločar připadajících na jednotku plochy má být roven velikosti vektoru intenzity (počet siločar vycházejících z bodového náboje je přímo úměrný jeho velikosti)
- Tok intenzity elektrického pole

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \begin{array}{l} d\vec{s} \dots \text{elementární orientovaná plocha} \\ \vec{E} \dots \text{intenzita v daném bodě} \end{array} \quad d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}$$

normála k ploše

k intenzitě se ještě vrátíme při zkoumání pole spojitě rozložených nábojů, po zavedení potenciálu

Gaussův zákon

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

celkový tok intenzity uzavřené plochy

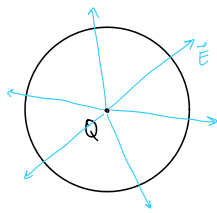
náboj uvnitř uzavřené plochy

permisivita vakua

- Odvození:

- o Nejprve se odvodí tok intenzity kulovou plochou se středem v jediném bodovém náboji

$$\text{vlně} \quad \Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{s}$$

$$\text{pro } \vec{E} \parallel \Delta\vec{s} \text{ lze psát} \quad E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}$$

... intenzita jako *hustota toku intenzity*

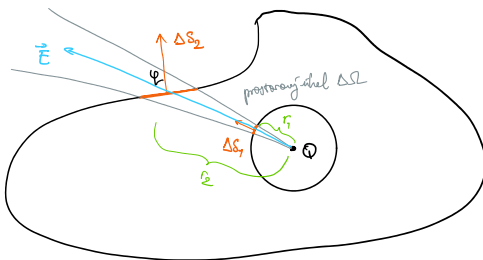
počet siločar vycházejících z náboje... N

$$\text{převine} \quad N = \Phi$$

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{N}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\Phi}{4\pi r^2}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

- o Ukáže se, že tok libovolnou plochou kolem jednoho náboje je roven toku kulovou plochou - pomocná kuželová plocha



$$\text{tok plochy } \Delta S_1 \dots \Delta\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 = E_1 \Delta S_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \Delta S_1$$

$$\text{tok plochy } \Delta S_2 \dots \Delta\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 = E_2 \Delta S_2 \cos\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \Delta S_2 \cos\varphi$$

$$\begin{array}{l} \Delta S_1 = r_1^2 \Delta\Omega \\ \Delta S_2 = \frac{r_2^2 \Delta\Omega}{\cos\varphi} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} r_1^2 \Delta\Omega = \frac{Q \Delta\Omega}{4\pi\epsilon_0} \\ \Delta\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2^2} \cos\varphi r_2^2 \Delta\Omega = \frac{Q \Delta\Omega}{4\pi\epsilon_0} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta\Phi_1 \\ \Delta\Phi_2 \end{array}} \right\} \text{normují se}$$

- o Pomocí principu superpozice a aditivnosti toku intenzity se zákon zobecní na více

bodových nábojů uzavřených v ploše

Potenciál elektrického pole

- Je definován jako

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C$$

pro 1 náboj v počátku souřadnic

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i} + C$$

pro soustavu nábojů

- Při spočtení parciálních derivací zjistíme, že platí
- Vektorové pole, které je možno vyjádřit tímto způsobem pomocí potenciálu, nazýváme potenciální
- Potenciál souvisí s potenciální energií

$$\vec{E}(r) = - \text{grad } \varphi(r)$$

$$W_{12} = - \int_{\ell} \vec{F} d\vec{\ell} = - Q \int_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = - Q \int_{\ell} \underbrace{\text{grad } \varphi}_{= d\varphi} d\vec{\ell} = - Q \int_{r_1}^{r_2} d\varphi = Q(\varphi(r_1) - \varphi(r_2))$$

- Práce vykonaná při přenesení náboje Q z bodu r_1 do bodu r_2 závisí pouze na potenciálech v počátečním a koncovém bodě, nezávisí na průběhu dráhy, po níž náboj přenášíme = elektrostatické pole je konzervativní
- Potenciál má význam potenciální energie vztahované k jednotkovému náboji
- Fyzikální význam má rozdíl potenciálů
- Vždy je třeba zvolit nějaký referenční bod – obvykle volíme za referenční potenciál v nekonečnu a pokládáme ho rovný nule
- Napětí je záporně vzatý rozdíl potenciálů - napětí U_{12} je kladné, pokud pole vykoná při přemísťování kladného náboje z bodu 1 do bodu 2 kladnou práci

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- Potenciální energie soustavy nábojů pomocí potenciálu

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i$$

kde φ_i je potenciál v bodě r_i vzešlý z ostatních nábojů

- Práce vykonaná při přesouvání náboje po uzavřené křivce je nulová

integrální vyjádření: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ (automaticky plyne z konzervativnosti pole)

Diferenciální vyjádření: $\text{rot } \vec{E} = 0$

Doklademe: $\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = \underbrace{\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{s}}_{\text{pro } \vec{E} \text{ plochy}} = 0$

či přímo $\text{rot } \vec{E} = - \text{rot grad } \varphi = 0$ rotace gradientu je vždy rovna nule

- Elektrostatické pole jde znázornit pomocí ekvipotenciálních ploch = plochy, na nichž je konstantní potenciál
 - o Ekvipotenciální plochy jsou vždy kolmé na siločáry

*Pole spojitě rozložených nábojů (→ intenzita, potenciál elektrostatického pole)

- Pro objemově rozložený náboj

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

- Potenciál je definován ve všech bodech prostoru, i tam, kde je hustota náboje nenulová
- Potenciál je všude spojitý a má parciální derivace alespoň prvního řádu
- Intenzita existuje ve všech bodech prostoru
- Intenzita je všude spojitá

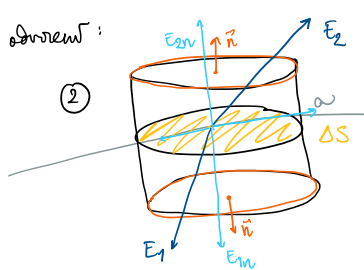
- Pro náboj rozložený na ploše

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') d\delta \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\delta$$

- Potenciál existuje ve všech bodech prostoru, i v bodech, kde je plošná hustota náboje nenulová
- Potenciál je všude spojitý a s výjimkou bodů, kde je nenulová plošná hustota náboje, má i parciální derivace alespoň prvního řádu
- Intenzita existuje ve všech bodech prostoru s výjimkou plochy, na níž je rozložen plošný náboj – tam nemá smysl
- Intenzita je spojitá všude mimo plochu s nábojem
 - Při průchodu plochou zůstávají spojitě pouze tečné složky
 - Normálové složky se skokem mění o hodnotu σ/ϵ_0

$$\textcircled{1} E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad \textcircled{2} E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

odvodení:

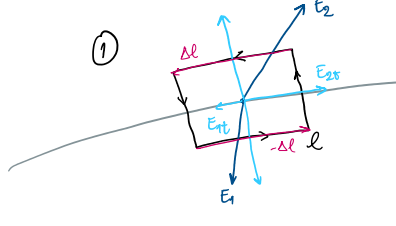


Aplikujeme na tuto válcovou plochu Gaussův zákon s výškou dle mížeme jít do nuly → zanedbatelný tok pro toto podstatnější je relevantní pouze normálová složka

$$\Phi = \vec{E}_2 \cdot \vec{\Delta S} - \vec{E}_1 \cdot \vec{\Delta S} = \Delta S (E_{2n} - E_{1n}) = \frac{\Delta S \cdot \sigma}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} E_{2n} - E_{1n} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \text{Div } \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

plošná divergence



budeme počítat cirkulaci E po křivce l s výškou dle mížeme přiblížíme do nuly

$$\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

$$\Delta l (E_{1t} - E_{2t}) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} E_{1t} - E_{2t} &= 0 \\ \text{Rot } \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

plošná rotace

*Gaussův zákon pro obecné elektrostatické pole (→ Gaussův zákon)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Phi = \frac{Q_c}{\epsilon_0}$$

- Platí vždy, má-li integrál určující tok intenzity smysl – tj. plocha nesmí procházet singularitami pole, jako jsou bodové náboje nebo náboje rozložené na ploše či na křivce
- V reálném případě má integrál smysl vždy, protože singularity pole jsou fyzikální abstrakce a v realitě se nevyskytují
- Pro objemově rozložený náboj lze psát Gaussův zákon v diferenciálním tvaru

$$\left[\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Poissonova a Laplaceova rovnice

- Řešíme případ, kdy můžeme rozložení nábojů popsat objemovou hustotou

- Pak platí

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ (\nabla \times \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}) \end{aligned}$$

což je soustava parciálních diferenciálních rovnic

- Pro její řešení je výhodné zavést potenciál

první rovnice jeho zavedení vůbec umožňuje

při položení $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ je první rovnice automaticky splněna

hledáme pak řešení druhé rovnice, která se změnila na

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

POISSONOVA ROVNICE

operátor Laplace definovaný v kartézských souřadnicích jako

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi$$

- Poissonova rovnice platí všude, kde platí Gaussův zákon v diferenciálním tvaru

v místech s nulovou objemovou hustotou náboje se rovnice

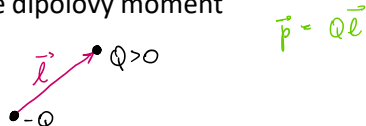
redukuje na ROVNICE LAPLACEOVU

$$\Delta \varphi = 0$$

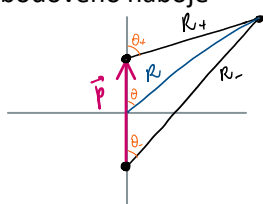
- Poissonově a Laplaceově rovnici musí potenciál elektrostatického pole vždy vyhovovat
- Řešení nejsou jednoznačná, pro jednoznačnost je třeba zadat ještě další podmínky
- Z formulace rovnic mj. vyplývá, že potenciál nemůže mít extrém v místě, kde nesídlí žádný náboj

Intenzita a potenciál pole elektrického dipólu

- Dipól – tuhá soustava dvou stejně velkých nábojů opačného znaménka
- Zavádíme dipólový moment



- Potenciál konečného dipólu se odvodí pomocí principu superpozice z potenciálu bodového náboje



$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_- - R_+}{R_+ R_-} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{R_+ R_-}$$

- Dostatečně daleko od dipólu můžeme použít přibližné vztahy a vzorec pro potenciál zjednodušit

$$R_+ \approx R \approx R_- \quad \theta_+ \approx \theta \approx \theta_-$$

- Dostatečně daleko od dipólu můžeme použít přibližné vztahy a vzorec pro potenciál zjednodušit $R_+ \approx R_- \approx R$ $\theta_+ \approx \theta_- \approx \theta$

$$\varphi(R) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

- Pro bodový dipól tento vztah platí přesně
- Bodový dipól je fyzikální abstrakce – odpovídá limitě $l \rightarrow 0$, při níž se zachová konečný dipólový moment
- Potenciál bodového dipólu klesá s druhou mocninou vzdálenosti $1/r^2$ (na rozdíl od potenciálu bodového náboje, který klesá jako $1/r$)
- Intenzitu pole dipólu dostaneme jako $\vec{E} = -\text{grad } \phi$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

Energie dipólu a síly působící na dipól v elektrickém poli

- Dipól považujeme za tuhou soustavu – neuvažujeme působení nábojů jeden na druhý, jsou pevně spojené a navzájem se nemohou hýbat
- V elektrostatickém poli na dipól působí síla a moment sil
- Na dipól působí síly působící na oba náboje $\vec{F}_+ = Q \vec{E}(\vec{r}_+)$ $\vec{F}_- = -Q \vec{E}(\vec{r}_-)$
- Výsledná síla je jejich vektorovým součtem

$$\vec{F} = Q (\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-)) \approx Q \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} l_z \right)$$

$$\vec{F} = Q (l \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}$$

- Moment sil

$$\vec{M} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E} = Q (\vec{l} \times \vec{E}) = \vec{p} \times \vec{E}$$

- Potenciální energie dipólu v elektrostatickém poli

$$W = Q (\varphi(\vec{r}_+) - \varphi(\vec{r}_-)) \approx Q \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z \right) = \vec{p} \cdot \text{grad } \varphi = - \vec{p} \cdot \vec{E}$$

- Pro bodový dipól tyto vztahy platí přesně

Potenciální energie mechanické soustavy je dána její geometrickou konfigurací, kterou můžeme popsat geometrickými parametry zvanými obecné souřadnice. Speciálně, nachází-li se bodový elektrický dipól ve vnějším elektrostatickém poli, bude jeho poloha popsána například polohovým vektorem $\mathbf{r}$ (tj. třemi kartézskými souřadnicemi x, y, z) a úhlem θ , který svírá vektor $\mathbf{p}$ s vektorem intenzity pole $\mathbf{E}$. (Důsledně vzato, měli bychom udat ještě azimutální úhel φ v rovině kolmé k $\mathbf{E}$; vzhledem k osové symetrii potenciální energie dipólu však na tomto úhlu nezávisí.)

Derivací potenciální energie podle obecných souřadnic q_i dostáváme tak zvané obecné síly

$$G_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (1.133)$$

Obecnými silami mohou být například složky obyčejných sil, složky momentu síly apod. Tak pro bodový náboj Q máme

$$W = Q \varphi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{F} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla W = -Q \nabla \varphi(\mathbf{r}) = Q \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.134)$$

Pro bodový dipól pak užitím potenciální energie $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ dostaneme pomocí vztahu (D 1.55)

$$\mathbf{F} = -\nabla W = -\nabla(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E},$$

$$\mathcal{M}_\theta = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(-p E \cos \theta) = -p E \sin \theta \quad (1.135)$$

v souladu s prvními výrazy (1.132). Záporné znaménko silového momentu vyjadřuje fakt, že tento moment působí ve směru klesajícího úhlu.

- V homogenním elektrickém poli na dipól působí pouze moment sil (jejich výslednice je nulová)
- V nehomogenním poli na dipól natočený po směru vektoru intenzity působí taková síla, která vtahuje dipól do silnějšího pole
- Dipól orientovaný nesouhlasně s intenzitou je vtahován do míst s nižší intenzitou
- Volný dipól se v nehomogenním poli nejdříve natočí tak, aby mířil stejně jako vektor intenzity, a pak je vtahován do silnějšího pole

*Elektrická dvojvrstva

- Zavádíme vektor plošné hustoty dipólového momentu $\mathbf{p}_s$
- Potenciál vyvolaný celou dvojvrstvou je dán prostorovým úhlem, pod nímž je dvojvrstva z daného místa "vidět"

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{p}_s \cdot \vec{R}}{R^3} dS = \frac{p_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{R} \cdot d\vec{s}}{R^3} = \frac{p_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{p_s}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

($\vec{p}_s = p_s \cdot \vec{n}$ $d\vec{s} = \vec{n} \cdot dS$)

prostorový úhel

*Objemové rozložení elektrických dipólů

- Zavádíme vektor polarizace, který má význam objemové hustoty dipólového momentu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV$$

$$\vec{P} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = \vec{P} \cdot \text{grad} \frac{1}{R} = \text{div} \frac{\vec{P}}{R} - \frac{\text{div} \vec{P}}{R}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_V \text{div} \frac{\vec{P}}{R} dV - \int_V \frac{\text{div} \vec{P}}{R} dV \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\oint_S \frac{\vec{P}}{R} dS - \int_V \frac{\text{div} \vec{P}}{R} dV \right)$$



$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\oint_S \frac{\sigma}{R} dS + \int_V \frac{\rho}{R} dV \right)$$

$\underbrace{\oint_S \frac{\sigma}{R} dS}_{\text{vázané plošné náboje}}$
 $\underbrace{\int_V \frac{\rho}{R} dV}_{\text{vázané objemové náboje}}$

$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}$
 $\rho = -\operatorname{div} \vec{P}$

Elektrostatické pole v přítomnosti vodičů:

Jev elektrostatické indukce

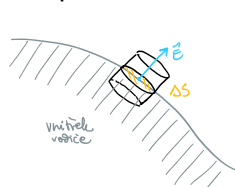
- Elektrostatické pole vyvolává vznik nábojů na povrchu původně nenabitých vodičů
- Vznikají na různých místech kladné a záporné náboje - celkový náboj původně nenabitého vodiče zůstává nulový
- Předpokládejme, že nepůsobí žádné další síly kromě sil elektrického pole; pak je rovnovážné rozložení nábojů na povrchu vodiče takové, že všude uvnitř vodiče je výsledné elektrostatické pole nulové (pole generované indukovanými náboji vyruší vnější el. pole)
 - o Kdyby tomu tak nebylo, je to ve sporu s rovnovážností stavu - v místě nenulového pole by se náboje pohybovaly
- Z Gaussova zákona plyne, že pokud ve vnitřním objemu není žádné pole, nemohou tam existovat náboje → proto jsou rozloženy pouze na povrchu
- Náboj vzniklý elektrostatickou indukcí můžeme tedy považovat za plošný, popsatelný nějakou plošnou hustotou náboje σ

V celém vnitřku vodiče je konstantní potenciál, povrch vodiče je ekvipotenciální plochou → siločáry elektrické indukce jsou kolmé na povrch vodiče

- Lze ukázat, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:
 - o Intenzita pole bodového náboje ubývá se čtvercem vzdálenosti (Coulombův zákon, z něhož přímo vyplývá zákon Gaussův)
 - o V rovnovážném stavu jsou náboje rozloženy pouze na vnějším povrchu vodiče
- Těto ekvivalence se využívá pro nepřímý experimentální důkaz Coulombova zákona

*Coulombova věta

- Elektrické pole v blízkosti povrchu vodiče je určeno plošnou hustotou náboje v daném místě povrchu vodiče



Dostane se z Gaussova zákona

tok vnitřní podstatou... nulový (nulová intenzita)

tok vnější podstatou... $E \Delta S$

náboj... $\sigma \Delta S$

$$E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

Základní úloha elektrostatiky

- Zabývá se nalezením průběhu potenciálu v okolí vodičů o známém náboji nebo potenciálu
- Formulována takto:

Nalézt elektrostatický potenciál $\phi(\mathbf{r})$ jako funkci definovanou a spojitou až do druhých derivací v daném uzavřeném objemu nebo v celém prostoru, která vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\Delta \phi = 0$$

A okrajovým podmínkám

$$1. (\phi)_{S_i} = \phi_i, \quad \text{resp.} \quad \epsilon_0 \int_{S_i} \operatorname{grad} \phi dS = -Q_i$$

$$2. \phi = 0 \text{ na hranici objemu, resp. } \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$$

ϕ_i nebo Q_i jsou zadány
(vztahují se k i-tému vodiči)
 S_i je plocha vnější povrch
i-tého vodiče

- Řešení základní úlohy elektrostatiky je jednoznačné

Kapacita

- Uvažujme vodivé těleso a nějaký bod $\mathbf{r}$ v prostoru kolem něj
- Přivedeme-li na těleso náboj Q , v okolí se vytvoří elektrické pole, jehož potenciál ϕ

dokážeme nalézt jako řešení základní úlohy elektrostatiky

- Přivedeme-li na těleso náboj, jehož velikost bude $Q' = aQ$, kde a je nějaká konstanta, funkce $\phi' = a\phi$ vyhovuje základní úloze elektrostatiky a je tedy hledaným potenciálem při tomto náboji
- V uvažovaném bodě platí $\frac{Q}{\phi(r)} = \frac{Q'}{\phi'(r)} = \text{konst.}$
- Speciálně pro potenciál na povrchu vodivého tělesa můžeme zavést

$$C = \frac{Q}{\phi_0}$$

a tuto konstantu, která závisí pouze na geometrii tělesa, označit za **kapacitu**

- Kapacita udává "schopnost vodivého tělesa shromažďovat náboj"
- Jednotkou kapacity je farad (F), v praxi se používají μF , nF či pF

*Kapacita soustavy vodivých těles ($\rightarrow$ kapacita)

- Odvodí se pro 2 a pak se zobecní
- Uvažujeme první těleso nabité nábojem Q_1 a druhé nenabitě; po ustavení rovnováhy musí být povrch každého tělesa ekvipotenciální plochou

$$\begin{array}{cc} \phi_{01}^{(1)} = B_{11} Q_1 & \phi_{02}^{(1)} = B_{21} Q_1 \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{potenciál na povrchu} & \text{potenciál na povrchu} \\ \text{1. tělesa} & \text{2. tělesa} \end{array}$$

- Bude-li nabitě druhé těleso nábojem Q_2 a první nenabitě, analogickou úvahou dostáváme

$$\phi_{01}^{(2)} = B_{12} Q_2 \quad \phi_{02}^{(2)} = B_{22} Q_2$$

- Při nabití obou těles náboji Q_1, Q_2 předchozí situace superponujeme

$$\begin{array}{l} \phi_{01} = \phi_{01}^{(1)} + \phi_{01}^{(2)} = B_{11} Q_1 + B_{12} Q_2 \\ \phi_{02} = \phi_{02}^{(1)} + \phi_{02}^{(2)} = B_{21} Q_1 + B_{22} Q_2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{array}} \right\} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix}$$

- Pro N těles se dá zobecnit

$$\phi_{0i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} Q_j$$

- Hodnoty B_{ij} se nazývají **potenciálové koeficienty**
- Matice B_{ij} je symetrická (dá se údajně ukázat z energetických úvah)
- Fyzikálně očekáváme, že náboje a potenciály všech těles jsou vzájemně jednoznačně určeny... soustava rovnice bude mít právě jedno řešení
- Vyřešíme-li soustavu vzhledem ke Q_i , můžeme psát

$$Q_i = \sum_{k=1}^N C_{ik} \phi_{0k}$$

- Matice C je inverzní maticí k matici B
 - o Diagonální prvky C_{ii} nazýváme **kapacitní koeficienty** (nerovnájí se vlastní kapacitě!)
 - o Mimodiagonální prvky $C_{ik}, i \neq k$ nazýváme **influenční koeficienty**
 - o Matice C je také symetrická

Kondenzátor

- Uspořádání dvou vodivých těles, které jsou nabitý náboji stejné velikosti a opačného znaménka
- V ideálním případě existuje elektrické pole pouze mezi tělesy a mimo ně ne - jeden vodič je zcela obklopen druhým
 - o Toho v praxi nejde dokonale dosáhnout
- Rovnice s kapacitními a influenčními koeficienty:

$$Q = C_{11} \phi_1 + C_{12} \phi_2 \quad \text{víme } C_{12} = C_{21}$$

$$-Q = C_{21} \phi_1 + C_{22} \phi_2$$

pro neuhátný kondenzátor dostáváme

$$\begin{array}{l} Q - (-Q) = 0 \\ \phi_1 = \phi_2 =: \phi \end{array}$$

na přednášce / učení jsme si to odvozovali jinak se vyšlo

$$C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$$

tohle ze sedláka a štolky je asi...

pro nezávislý kondenzátor dostáváme

$$Q = -U \cdot C$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 =: \varphi$$

$$C = \frac{q_{11} - q_{22} - q_{12}}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$$

tohle se sčítá a tohle je asi nemožné (?)

$$0 = C_{11}\varphi + C_{12}\varphi$$

$$0 = C_{21}\varphi + C_{22}\varphi$$

$$\Rightarrow C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = C_{22} =: C$$

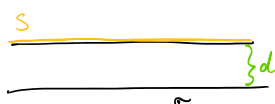
kapacita kondenzátoru

- Kondenzátor je charakterizován jedinou konstantou - kapacitou kondenzátoru

- Platí $C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}$

*Kapacita deskového kondenzátoru (→ kondenzátor)

- Při dostatečné rozlehlosti desek, které jsou dost blízko u sebe, lze deskový kondenzátor považovat za dvě nekonečné nabití roviny - mezi nimi je homogenní pole



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$Q = \sigma \cdot S$$

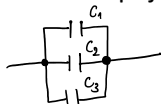
$$U = dE$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$= \frac{\sigma S}{d \frac{\sigma}{\epsilon_0}} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

*Spojování kondenzátorů (→ kondenzátor)

- Paralelní zapojení



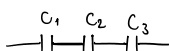
na všech kondenzátorech stejný napětí

$$Q_1 = U C_1 \quad Q_2 = U C_2 \quad Q_3 = U C_3$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U (C_1 + C_2 + C_3) = U C$$

$$C = \sum_{i=1}^N C_i$$

- Sériové zapojení



na všech kondenzátorech stejný náboj, napětí se sčítají

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}$$

$$U = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Energie soustavy nabitých vodičů

- Práce vykonaná při nabíjení osamocené vodiče o kapacitě C

na počátku není je vodič nabit nábojem Q na potenciálu φ_0

při přivedení náboje ΔQ na vodič vykonáme práci $\varphi_0 \Delta Q$

alternativně práce

$$W = \int_0^{Q_k} \varphi_0 dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_k} Q dQ = \frac{1}{C} \left[\frac{Q^2}{2} \right]_0^{Q_k} = \frac{1}{2} \frac{Q_k^2}{C} = \frac{1}{2} C \varphi_0^2 = \frac{1}{2} \varphi_0 Q_k$$

- Nabíjení soustavy vodičů

○ Předpokládáme, že potřebná energie nezávisí na pořadí a rychlosti nabíjení vodičů

zavedeme $Q_i' = t \cdot Q_i$ $\varphi_i' = t \cdot \varphi_i$ $t \in (0, 1)$

funkce parametr konstantní hodnoty

$$W = \sum_{i=1}^N \int_0^{Q_i} \varphi_i' dQ_i' = \sum_{i=1}^N \varphi_i Q_i \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i Q_i$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N B_{ik} Q_k Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ik} \varphi_k \varphi_i$$

- Důkaz symetrie matic B, resp. C - uvažujeme 2 vodiče

$$\dots \dots \dots \Gamma \dots \dots \dots Q_1 \quad W = \frac{1}{2} B_{11} Q_1^2$$

- Důkaz symetrie matic B, resp. C - uvažujme 2 vodiče

nabíje první na náboj Q_1 $W_1 = \frac{1}{2} B_{11} Q_1^2$

pak nabíje druhý na náboj Q_2 $W_2 = \int_0^{Q_2} \varphi_2 dQ_2' = \int_0^{Q_2} (B_{21} Q_1' + B_{22} Q_2') dQ_2'$

provozní totaž v opačném pořadí $= B_{21} Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} B_{22} Q_2^2$

$$W_2' = \frac{1}{2} B_{22} Q_2^2$$

$$W_1' = \frac{1}{2} B_{11} Q_1^2 + B_{12} Q_1 Q_2$$

$$W_1 + W_2 = W_1' + W_2'$$

$$\frac{1}{2} B_{11} Q_1^2 + B_{21} Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} B_{22} Q_2^2 = \frac{1}{2} B_{11} Q_1^2 + B_{12} Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} B_{22} Q_2^2$$

- Energie kondenzátoru *tohle je více moc hezký záměr, jen tohle J je asi nesmysl*

pro kondenzátor plov $Q_2 = -Q_1$ $U = \varphi_1 - \varphi_2$ $C_{22} = C_{11} = C = -C_{21} = -C_{12}$

$$W = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{ik} \varphi_i \varphi_k = \frac{1}{2} (C_{11} \varphi_1^2 + C_{12} \varphi_1 \varphi_2 + C_{21} \varphi_1 \varphi_2 + C_{22} \varphi_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} (C \varphi_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + C \varphi_2 (\varphi_2 - \varphi_1)) = \frac{1}{2} (C (\varphi_1 - \varphi_2) (\varphi_1 - \varphi_2)) = \underline{\underline{\frac{1}{2} C U^2}}$$

tohle je to celá nesmysl?

Hustota energie elektrostatického pole

- Energie elektrostatického pole se dá napsat jako

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}(\vec{r})|^2 dV = \int_V w_e dV$$

← hustota energie

- Energie elektrostatického pole odpovídá energii daného rozložení nábojů, kterými je pole vytvářeno
- Pro deskový kondenzátor: $W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} (E d)^2 = \underbrace{\left(\frac{\epsilon_0^2 E^2}{2} \right)}_{w_e} \underbrace{(S d)}_V$
- Thomsonova věta: Náboje na soustavě pevných vodičů obklopených nevodivým prostředím jsou v rovnovážném stavu rozloženy po povrchu těchto vodičů vždy tak, aby energie výsledného elektrostatického pole byla minimální
- Earnshawova věta lze zobecnit i na nabitý vodič: *Nabitě těleso nelze udržet v elektrostatickém poli ve stabilní rovnováze jen elektrickými silami.*

Elektrostatické pole v dielektriku:

Polarizace dielektrika

- Dielektrika nepřevádějí elektrický náboj
- Přesto s elektrickým polem interagují
- Při vložení do elektrického pole se dielektrikum polarizuje
 - o Orientační polarizace - způsobená orientací již existujících dipólů, podléhají jí polární dielektrika, jejichž částice mají samy o sobě nějaký elektrický dipólový moment (typicky voda, ale i jiné látky)
 - o U nepolárních dielektrik mají vliv indukované dipólové momenty, které se v látce vytvoří po vložení do elektrického pole - vznikají "deformací" částic látky
 - o Indukované dipólové momenty mohou mít vliv i u polárních dielektrik

Vázaný náboj

- Dielektrika pak lze popisovat jako látky s nějakou objemovou hustotou dipólového momentu, o kterých bylo něco nastíněno výše
- Dielektrika můžeme popisovat pomocí vázaných plošných a objemových nábojů

$$\sigma(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \quad \rho(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})$$

- Dielektrika můžeme popisovat pomocí vázaných plošných a objemových nábojů

$$\sigma(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \quad \rho(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})$$

- Vázané náboje se v dielektriku nemohou přemísťovat
- Celkový součet vázaných nábojů v dielektriku je roven nule
- Kromě vázaných mohou v dielektriku existovat i volné náboje, které se tam dostaly nějak jinak
- Makroskopická pole buzená volnými a vázanými náboji můžeme superponovat

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$$

Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku

$$Q_f = \int_V \rho dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Gaussův zákon} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_0 + Q_p}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_0 + Q_p = Q_0 - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \cdot d\vec{S} = Q_0$$

pouze volný náboj

Vektor elektrické indukce

závisí na vztahu $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Gaussův zákon pak má jednoduchý tvar $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$

- Nespojitosť elektrické indukce je dána pouze plošnou hustotou volných nábojů - procházíme-li plochou, na níž jsou pouze vázané plošné náboje, elektrická indukce na rozdíl od elektrické intenzity zůstává spojitá
- Pomocí elektrické indukce dostáváme vztahy, v nichž vystupují pouze hustoty volných nábojů $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_0$ $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_0$ $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ (plošná divergence a rotace)

- Silové účinky pole však stále udává elektrická intenzita

Elektrická susceptibilita a permitivita látek

- Vztah mezi vektorem elektrické intenzity $\vec{E}$ a indukce $\vec{D}$ závisí na konkrétním dielektriku
- Nejhrubší dělení na dva modely:
 - o Ideálně tvrdá dielektrika - polarizace $\vec{P}_0$ je na intenzitě pole zcela nezávislá
 - o Ideálně měkká dielektrika - vektor $\vec{P}$ je na elektrické intenzitě lineárně závislý

Pro izotropní a homogenní dielektrikum:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r})$$

↓
elektrická susceptibilita

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$= \epsilon_r$ relativní permitivita

- Při vložení dielektrika mezi desky kondenzátoru při konstantním náboji poklesne napětí z U_0 na U
platí $\frac{U_0}{U} = \epsilon_r = 1 + \chi_e$
- Pro nehomogenní dielektrikum je permitivita tenzorová veličina

- Tenzor je symetrický
- Další vlastnosti tenzoru souvisí se symetrií krystalu nebo dielektrika

*Hustota energie elektrostatického pole v dielektriku

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} |\vec{D}|^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Piezoelektrický jev

- Při mechanické deformaci některých krystalů (např. křída) dochází ke vzniku napětí

Clausius-Mosottiho vztah

- Vyjadřuje vztah mezi relativní permitivitou nepolárního dielektrika a polarizovatelností jeho molekul
- Při odvození se uvažuje vliv dielektrika jako celku na danou molekulu a je zanedbán vliv nejbližších okolních molekul, který by musel být počítán mikroskopicky (odůvodnění: při dostatečně chaotickém rozmístění molekul nebo při určitých typech symetrie lze očekávat, že blízké molekuly se navzájem vyruší)
- -> vztah je aproximativní, přesto použitelný

$$3\epsilon_0 \frac{A_m}{\sum_i} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = N_0 \alpha_0$$

↑
koeficient
polarizovatelnosti