

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkouška z Kombinatoriky a grafů I — písemná část, 17. 1. 2025

Čas: 90 minut

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit, pokud není řečeno jinak.*
- *Číselné výsledky (např. typu $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$) není nutno dále upravovat a dopočítávat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutné uvést, které tvrzení používáte.*

-
1. Definujte, co je toková síť, co je tok v síti, co je velikost toku, co je nenasycená cesta vzhledem k nějakému toku a co je zlepšující cesta vzhledem k nějakému toku. [5 bodů]
 2. Zformulujte a dokažte co nejtěsnější horní a dolní odhad na prostřední kombinační číslo $\binom{2n}{n}$. (Rozumí se, že hodnotu $\binom{2n}{n}$ chceme odhadnout pomocí jednodušších výrazů, tedy bez použití faktoriálů a kombinačních čísel.) [10 bodů]
 3. Nechtě $(a_n)_{n=0}^\infty$ je posloupnost definovaná soustavou rekurencí

$$a_0 = 3$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \text{pro každé } n \geq 2.$$

Najděte vzorec v uzavřeném tvaru (tj. bez nekonečných sum) pro vytvořující funkci této posloupnosti. (Není nutné hledat explicitní vzorec pro a_n , stačí opravdu jen vzorec pro tu vytvořující funkci.) [5 bodů]

4. Napište, jak je definována projektivní rovina a jak je definován řád konečné projektivní roviny. Kolik bodů a kolik přímek má konečná projektivní rovina řádu n ? Dokažte. Smíte zde bez důkazu použít tvrzení, že v konečné projektivní rovině obsahují všechny přímky stejný počet bodů a že ke každému bodu lze najít přímku, která ten bod neobsahuje. Ostatní vlastnosti projektivních rovin, které používáte, odvoďte z definice. [10 bodů]