Příklad vyhodnocení - nepřímé měření

Chceme spočítat, jakou celkovou chybou bude zatíženo určení modulu pružnosti G metodou torzních kmitů:

$$G = \frac{4\pi l M R^2}{T^2 r^4}$$

.

Výsledky přímých měření (uvedeny střední mezní chyby):

- délka drátu: $l = \bar{l} \pm \Delta l = (55{,}2 \pm 0{,}1)$ cm
- poloměr drátu: $r = \bar{r} \pm \Delta r = (0{,}505 \pm 0{,}002)$ mm
- poloměr válce: $R = \bar{R} \pm \Delta R = (55{,}00 \pm 0{,}03)$ mm
- hmotnost válce: $M = \bar{M} \pm \Delta M = (808{,}6 \pm 0{,}01)$ g
- doba kmitu: $T = \bar{T} \pm \Delta T = (1{,}814 \pm 0{,}005)$ s

Vypočteme $\bar{G}$ z dílčích měření:

$$\bar{G} = \frac{4\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = 7{,}9281.10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}}$$

Určíme celkovou střední mezní chybu ($P \sim 1$):

$$\begin{aligned} u_{\bar{G}}^2 &= \left(\frac{\partial G}{\partial l}\right)^2_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} (\Delta l)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^2_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R}\right)^2_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} (\Delta R)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial G}{\partial M}\right)^2_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} (\Delta M)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} (\Delta T)^2, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial l}\right)_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} &= \frac{4\pi \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = \frac{\bar{G}}{\bar{l}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} &= -\frac{16\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^5} = -4\frac{\bar{G}}{\bar{r}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial R}\right)_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} &= \frac{8\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = 2\frac{\bar{G}}{\bar{R}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial M}\right)_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} &= \frac{4\pi \bar{l} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = \frac{\bar{G}}{\bar{M}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{\bar{l},\bar{r},\bar{R},\bar{M},\bar{T}} &= -\frac{8\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^3 \bar{r}^4} = -2\frac{\bar{G}}{\bar{T}} \end{aligned}$$

Platí tedy:

$$\begin{aligned} u_{\bar{G}} &= \sqrt{\left(\frac{\bar{G}}{\bar{l}}\right)^2 (\Delta l)^2 + \left(-4\frac{\bar{G}}{\bar{r}}\right)^2 (\Delta r)^2 + \left(2\frac{\bar{G}}{\bar{R}}\right)^2 (\Delta R)^2 + \left(\frac{\bar{G}}{\bar{M}}\right)^2 (\Delta M)^2 + \left(-2\frac{\bar{G}}{\bar{T}}\right)^2 (\Delta T)^2} \\ &\doteq 10^{10}\sqrt{2{,}063.10^{-4} + 1{,}577.10^{-2} + 7{,}480.10^{-5} + 9{,}613.10^{-9} + 1{,}910.10^{-5}} \\ &\doteq 0{,}134.10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}} \end{aligned}$$

Výsledek zaokrouhlíme a zapíšeme:

$$G = \bar{G} + u_{\bar{G}} = (7{,}93 \pm 0.13).10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}}$$

Je vidět, že k celkové chybě nejvíce přispívá chyba určení poloměru r – je ve čtvrté mocnině.