I. MECHANIKA

5. Otáčení tuhého tělesa II

Obsah

- rotace kolem pevného bodu
- pohybová rovnice pro rotaci kolem pevného bodu
- pojem tenzoru
- základní operace s tenzory
- tenzor momentu setrvačnosti
- Eulerovy rovnice
- význam deviačních momentů
- kinetická energie rotujícího tělesa
- stanovení momentu setrvačnosti vůči ose
- elipsoid setrvačnosti
- hlavní osy a hlavní momenty setrvačnosti

Otáčení kolem pevného bodu

- těleso rotuje kolem bodu, který se nachází na pevné pozici v i.s.s.

- snažíme se nalézt i pro tento případ pohybovou rovnici tvaru

  konstantní vlastnost objektu $\times$ charakteristika pohybu = vnější silové působení

- prvním krokem nalezení rovnice analogické k $B^{\|} = J\omega$

- dalším krokem hledání analogie k $\dfrac{d}{dt}(J\omega) = M^{E\|}$

Pohybová rovnice pro otáčení kolem bodu

- $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} v_{i1} &= \omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2} \\ v_{i2} &= \omega_3 x_{i1} - \omega_1 x_{i3} \\ v_{i3} &= \omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1} \end{aligned}$

- $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} B_1 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i2} v_{i3} - x_{i3} v_{i2} \right) \\ B_2 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i3} v_{i1} - x_{i1} v_{i3} \right) \\ B_3 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1} v_{i2} - x_{i2} v_{i1} \right) \end{aligned}$

- $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} B_1 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_{i2} \left(\omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1} \right) - x_{i3} \left(\omega_3 x_{i1} - \omega_1 x_{i3} \right) \right] \\ B_2 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_{i3} \left(\omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2} \right) - x_{i1} \left(\omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1} \right) \right] \\ B_3 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_{i1} \left(\omega_3 x_{i1} - \omega_1 x_{i3} \right) - x_{i2} \left(\omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2} \right) \right] \end{aligned}$

Tenzor momentu setrvačnosti

$$B_1 = \omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i2}^2 + x_{i3}^2\right) - \omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i2} - \omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3}$$

$$B_2 = -\omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i2} + \omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i3}^2\right) - \omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i2} x_{i3}$$

$$B_3 = -\omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3} - \omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i2} x_{i3} + \omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i2}^2\right)$$

$$\longrightarrow$$

$$B_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3$$

$$B_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3$$

$$B_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3$$

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i2}^2 + x_{i3}^2\right) \qquad I_{12} = I_{21} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i2}$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i3}^2\right) \qquad I_{13} = I_{31} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3}$$

$$I_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i2}^2\right) \qquad I_{23} = I_{32} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i2} x_{i3}$$

$$B_k = I_{kl}\omega_l \longrightarrow \vec{B} = \overleftrightarrow{I}\vec{\omega}$$

Tenzory

přechod mezi kartézskými soustavami souřadnic $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1', x_2', x_3'$

matice rotace $a_{ij} = \cos \alpha_{ij}$

transformace vektorů $A_i' = a_{ik} A_k\,, \quad B_j' = a_{jl} B_l$

transformace součinu složek vektorů $A_i' B_j' = a_{ik} a_{jl} A_k B_l$

označme nový objekt $T_{ij}' = A_i' B_j'\,, \quad T_{kl} = A_k B_l$

objekt se transformuje při rotaci $T_{ij}' = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$

takto se transformuje <u>tenzor 2. řádu</u> – obecně obsahuje 9 složek T_{ij}

vytvořený objekt $T_{kl} = A_k B_l$ je tenzor 2. řádu – má ale speciální vlastnosti, protože k jeho určení stačí pouze 6 nezávislých veličin (složky vektorů A_k a B_l)

<u>indexy</u> u veličin T_{ij} se vztahují <u>k osám téže soustavy souřadnic</u>

tenzor

indexy u veličin a_{ij} se vztahují k osám souřadnic původní a rotované soustavy

není tenzor

Tenzor *n*-tého řádu

pro veličiny $T_{i\ldots l}$, které jsou složkami tenzoru *n*-tého řádu, platí

- jsou definovány v určitém bodu trojrozměrného prostoru
- jedná se o celkem 3^n složek
- mají *n* indexů $i,\ldots,l$
- při ortogonální transformaci souřadnic platí $$T'_{\underbrace{i\ldots l}_{n}} = \underbrace{a_{ir}\ldots a_{lt}}_{n} T_{\underbrace{r\ldots t}_{n}}$$
- pro inverzní transformaci platí $$T_{\underbrace{r\ldots t}_{n}} = \underbrace{a_{ir}\ldots a_{lt}}_{n} T'_{\underbrace{i\ldots l}_{n}}$$

řád tenzorů

• nultého řádu	1 složka	skalár	A
• prvního řádu	3 složky	vektor	$\vec{A}$
• druhého řádu	9 složek	tenzor 2. řádu	$\overleftrightarrow{A}$
• třetího řádu	27 složek	tenzor 3. řádu	
• čtvrtého řádu	81 složek	tenzor 4. řádu	

tenzor <u>symetrický</u> v indexech *i* a *k* $\quad T_{\ldots ikl\ldots} = T_{\ldots kil\ldots}$

tenzor <u>antisymetrický</u> v indexech *i* a *k* $\quad T_{\ldots ikl\ldots} = -T_{\ldots kil\ldots}$

symetrie a antisymetrie se při transformaci zachovává

Operace tenzorového počtu

slučování $A'_{ijk} = a_{ir} a_{js} a_{kt} A_{rst}\,, \quad B'_{ijk} = a_{ir} a_{js} a_{kt} B_{rst}$

- $A'_{ijk} \pm B'_{ijk} = a_{ir} a_{js} a_{kt} A_{rst} \pm a_{ir} a_{js} a_{kt} B_{rst} = a_{ir} a_{js} a_{kt} (A_{rst} \pm B_{rst})$
- jen tenzory stejného řádu, vznikne opět tenzor stejného řádu
- $C_{ijk} = A_{ijk} \pm B_{ijk}$

násobení $A'_{ij} = a_{in} a_{jp} A_{np}\,, \quad B'_{klm} = a_{kr} a_{ls} a_{mt} B_{rst}$

- $A'_{ij} B'_{klm} = a_{in} a_{jp} a_{kr} a_{ls} a_{mt} A_{np} B_{rst}$
- vznikne tenzor, jehož řád je součtem řádů výchozích tenzorů
- $C_{ijklm} = A_{ij} B_{klm}$

úžení $T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} T_{mnrs}$

- položíme $k = j$ a sečteme přes index j
- $T'_{ijjl} = a_{im} \underbrace{a_{jn} a_{jr}}_{\delta_{nr}} a_{ls} T_{mnrs} = a_{im} a_{ls} T_{mnns}$
- úžením tenzoru *n*-tého řádu vznikne tenzor řádu *n*-2

Tenzor momentu setrvačnosti

2. imp. věta $\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^E \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\overleftrightarrow{I}\vec{\omega}\right) = \vec{M}^E \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(I_{kl}\omega_l\right) = M_k^E$

V případě rotace kolem bodu <u>není vektor momentu hybnosti rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti</u>, proto nelze najít skalární koeficient úměrnosti mezi nimi.

Narážíme na zásadní potíž:

V případě rotace kolem pevné osy byl moment setrvačnosti J vyjádřen jen pomocí vzdáleností hmotných bodů od osy rotace, které nezávisely na volbě soustavy souřadnic, zatímco v případě rotace kolem bodu jsou složky $\overleftrightarrow{I}$ vyjádřeny pomocí souřadnic v inerciální s.s., vzhledem k níž se těleso otáčí a osa rotace mění, a tedy <u>složky $\overleftrightarrow{I}$ se průběžně mění</u> také.

Závěr:

Rovnice $\frac{d}{dt}\left(\overleftrightarrow{I}\vec{\omega}\right) = \vec{M}^E$ není prakticky využitelnou analogií rovnice $\frac{d}{dt}(J\omega) = M^{E\|}$.

Vyjádření v soustavě rotující s tělesem

- $\vec{B} = \overleftrightarrow{I}\vec{\omega}$ platí v libovolné vztažné soustavě **(jde stále o vektory určené vůči nehybné s.s.!)**
- provedeme transformaci do rotující soustavy spjaté s tělesem

$$\vec{B}: \quad B_k \to \beta_k$$
$$\vec{r}: \quad x_k \to \xi_k$$
$$\vec{\omega}: \quad \omega_k \to \Omega_k$$

$$\beta_1 = \Omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2\right) - \Omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i2} - \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i3}$$
$$\beta_2 = -\Omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i2} + \Omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i3}^2\right) - \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i2}\xi_{i3}$$
$$\beta_3 = -\Omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i3} - \Omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i2}\xi_{i3} + \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
J_{11} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2\right) & J_{12} &= J_{21} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i2} \\
J_{22} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i3}^2\right) & J_{13} &= J_{31} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i3} \\
J_{33} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2\right) & J_{23} &= J_{32} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i2}\xi_{i3}
\end{aligned}}$$

$$\beta_k = J_{kl}\Omega_l$$

Vyjádření v soustavě rotující s tělesem

- dostaneme analogicky k $B_k = I_{kl}\omega_l$ rovnici $\beta_k = J_{kl}\Omega_l$ platnou v soustavě spjaté s rotujícím tělesem
- protože souřadnice ξ_k jsou v této soustavě stálé, jsou i koeficienty $\underline{J_{kl}}$ stálé hodnoty
- J_{kk} představují momenty setrvačnosti v situaci, kdy těleso rotuje kolem souřadnicové osy ξ_k (**momenty setrvačnosti vůči souřadnicovým osám**)
- J_{kl} se nazývají **deviační momenty setrvačnosti**

Převedení 2. IV do rotující soustavy

- další krok – převedení časové derivace do rotující soustavy

- při odvozování Coriolisovy síly jsme nalezli vztah mezi časovou derivací vektoru v inerciální soustavě a jeho časovou derivací v rotující soustavě

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

- 2. impulsová věta v soustavě rotující s tělesem

$$\frac{d'\vec{B}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}^{E}$$

Odvození Eulerových pohybových rovnic

- vyjádření vektorů v soustavě rotující s tělesem:

$$\vec{B}: \quad B_k \to \beta_k$$
$$\vec{\omega}: \quad \omega_k \to \Omega_k$$
$$\vec{M}^E: \quad M_k^E \to \mu_k^E$$

- dosazení do 2. impulsové věty pro rotující soustavu

$$\frac{d'\vec{B}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}^E \quad \to \quad \begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} + \Omega_2\beta_3 - \Omega_3\beta_2 &= \mu_1^E \\ \frac{d\beta_2}{dt} + \Omega_3\beta_1 - \Omega_1\beta_3 &= \mu_2^E \\ \frac{d\beta_3}{dt} + \Omega_1\beta_2 - \Omega_2\beta_1 &= \mu_3^E \end{aligned} \quad \to \quad \leftarrow \quad \beta_k = J_{kl}\Omega_l$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_{11}\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3\right) + \Omega_2\left(J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3\right) - \Omega_3\left(J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3\right) = \mu_1^E$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3\right) + \Omega_3\left(J_{11}\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3\right) - \Omega_1\left(J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3\right) = \mu_2^E$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3\right) + \Omega_1\left(J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3\right) - \Omega_2\left(J_{11}\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3\right) = \mu_3^E$$

Eulerovy pohybové rovnice

- soustava 3 diferenciálních rovnic pro 3 neznámé funkce $\Omega_k(t)$
- konstantní parametry J_{kl} tělesa je možno určit předem
- složky momentu síly μ_k^E jsou zadány

$$J_{11}\frac{d\Omega_1}{dt}+J_{12}\frac{d\Omega_2}{dt}+J_{13}\frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_2\left(J_{31}\Omega_1+J_{32}\Omega_2+J_{33}\Omega_3\right)-\Omega_3\left(J_{21}\Omega_1+J_{22}\Omega_2+J_{23}\Omega_3\right)=\mu_1^E$$

$$J_{21}\frac{d\Omega_1}{dt}+J_{22}\frac{d\Omega_2}{dt}+J_{23}\frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_3\left(J_{11}\Omega_1+J_{12}\Omega_2+J_{13}\Omega_3\right)-\Omega_1\left(J_{31}\Omega_1+J_{32}\Omega_2+J_{33}\Omega_3\right)=\mu_2^E$$

$$J_{31}\frac{d\Omega_1}{dt}+J_{32}\frac{d\Omega_2}{dt}+J_{33}\frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_1\left(J_{21}\Omega_1+J_{22}\Omega_2+J_{23}\Omega_3\right)-\Omega_2\left(J_{11}\Omega_1+J_{12}\Omega_2+J_{13}\Omega_3\right)=\mu_3^E$$

- toto je nejobecnější tvar Eulerových rovnic
- vhodná volba souřadnicové soustavy v tělese umožní podstatné zjednodušení

Význam složek tenzoru setrvačnosti

<u>*otáčení kolem bodu*</u>

předpokládejme, že

- známe J_{kl}
- osou otáčení je proložena třetí osa souřadnicové soustavy spjaté s tělesem, tj. $\Omega_1 = \Omega_2 = 0 \wedge \Omega_3 \neq 0$

pak při nenulových deviačních složkách J_{13} a J_{23} tenzoru setrvačnosti má celkový moment hybnosti tělesa nenulové všechny složky

$$\beta_1 = J_{13}\Omega_3$$
$$\beta_2 = J_{23}\Omega_3$$
$$\beta_3 = J_{33}\Omega_3$$

$\Rightarrow$ <u>vektor momentu hybnosti nemá směr osy otáčení</u>

pokud nepůsobí síla $\rightarrow$ moment hybnosti pevný v prostoru $\rightarrow$ posouvá se v rotujícím tělese $\rightarrow$

protože složky J_{kl} jsou konstantní, musí se měnit i složky Ω_i

$\Rightarrow$ ztotožnění osy otáčení s pevným směrem v tělese obecně pouze dočasné

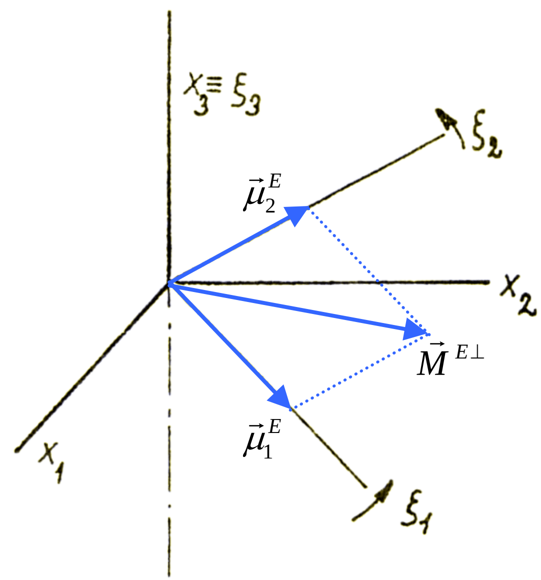
Význam složek tenzoru setrvačnosti

<u>otáčení kolem pevné osy</u>

předpokládejme nyní, že těleso připevněno na pevné ose (doplněno působení sil)

$\Rightarrow$ osy ztotožněny trvale (můžeme porovnat výsledky různých způsobů popisu)

platí tedy $J = I_{33} = J_{33}$, kde $J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$



$$I_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \right)$$

$$J_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2 \right)$$

podobně platí $B^{\parallel} = B_3 = \beta_3$ a $M^{E\parallel} = M_3^E = \mu_3^E$

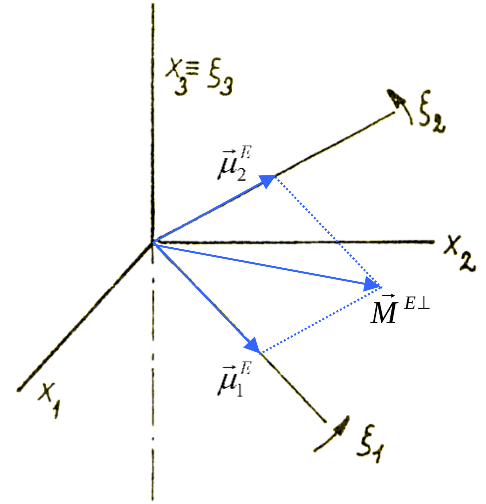
(viz předchozí rozbor rotace kolem pevné osy)

$$\beta_1 = J_{13}\Omega_3$$

a platí $\beta_2 = J_{23}\Omega_3 \rightarrow$ <u>moment hybnosti</u> $\vec{B}$ je <u>pevný v tělese</u> a rotuje spolu s ním

$$\beta_3 = J_{33}\Omega_3$$

Význam deviačních momentů



<u>moment hybnosti</u> $\vec{B}$ rotuje spolu s tělesem (protože není rovnoběžný s osou rotace, pořád se mění a podle 2.IV trvale působí moment sil)

Eulerovy rovnice:

$$J_{33}\frac{d\Omega_3}{dt} = \mu_3^E \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}B^{\parallel} = M^{E\parallel}$$

$$J_{13}\frac{d\Omega_3}{dt} - J_{23}\Omega_3^2 = \mu_1^E \qquad \rightarrow$$ ve směru osy ξ_1 působí složka μ_1^E vnějšího momentu

$$J_{23}\frac{d\Omega_3}{dt} + J_{13}\Omega_3^2 = \mu_2^E \qquad \rightarrow$$ ve směru osy ξ_2 působí složka μ_2^E vnějšího momentu

(vnější moment $\vec{M}^{E\perp}$ se složkami μ_1^E, μ_2^E, 0 brání vychýlení osy rotace)

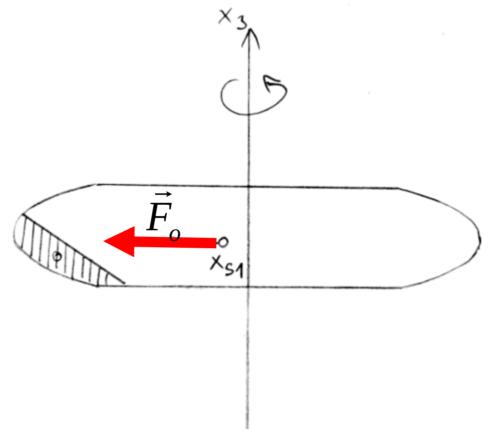
Pozn.: různá znaménka v E. rovnicích – v levotočivé soustavě by byla obráceně

- pro $\frac{d\Omega_3}{dt} = 0$ jsou složky β_1 a β_2, jakož i μ_1^E a μ_2^E konstantní (v rotující soustavě)
- transformace do laboratorní i.s.s. $\rightarrow$ průměty vektorů $\vec{B}^{\perp}$ a $\vec{M}^{E\perp}$ rotují kolem osy rotace
- moment $\vec{M}^{E\perp}$ je reakcí upevnění osy (ložisek) na opačně orientovaný rotující moment, jímž těleso působí na ložiska („házení“ osy)

Význam deviačních momentů

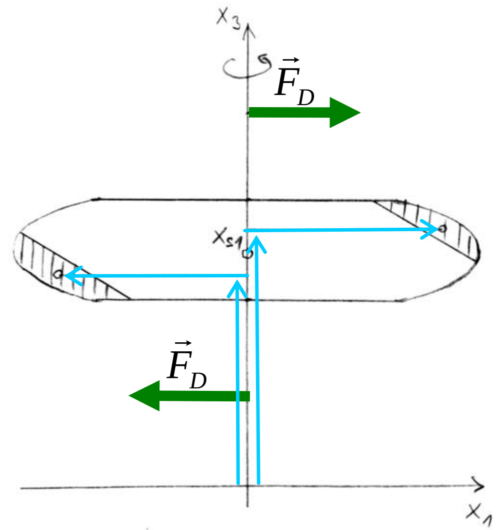
příklad – vyvažování pneumatiky

statická nevyváženost



hmotný střed mimo osu otáčení $\Rightarrow$ odstředivá síla $\vec{F}_o$

dynamická nevyváženost



nenulový deviační moment

$J_{13} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3} \neq 0 \Rightarrow$ moment sil se snaží vychýlit osu

Kinetická energie rotujícího tělesa

rotace kolem hmotného středu

- vnitřní kinetická energie rotující soustavy h.b. $E_{kI} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec{v}_{cn} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{cn})$
- platí (objem rovnoběžnostěnu) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$
- kinetickou energii lze vyjádřit pomocí tenzoru momentu setrvačnosti

$$E_{kI} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{cn} \times \vec{v}_{cn}) =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_{cn} \times m_n \vec{v}_{cn}}_{\vec{B}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{B} =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{J} \cdot \vec{\omega}$$

- po složkách (kvadratická forma v ω_i) $E_{kI} = \frac{1}{2} \omega_i J_{ij} \omega_j$

Stanovení momentu setrvačnosti vůči ose

rotace kolem pevné osy (v libovolném směru) procházející hmotným středem

zavedeme jednotkový vektor ve směru rotace $\vec{n} = \dfrac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

pak lze kinetickou energii zapsat

$$E_{kI} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{J} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}|\vec{\omega}|\,\vec{n} \cdot \overleftrightarrow{J} \cdot \vec{n}\,|\vec{\omega}| = \frac{1}{2}\vec{n} \cdot \overleftrightarrow{J} \cdot \vec{n}\;\omega^2$$

zároveň jsme dříve odvodili $E_{kI} = \dfrac{1}{2} J\,\omega^2$

kde skalární veličina J představuje moment setrvačnosti tělesa vůči ose rotace

porovnáním vidíme, že

moment setrvačnosti J vůči libovolné zadané ose je možno zapsat ve tvaru

$$J = \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{J} \cdot \vec{n}$$

pomocí Steinerovy věty je pak možno vyjádřit moment setrvačnosti vůči libovolné ose posunuté mimo hmotný střed tělesa

Závěr: moment setrvačnosti tělesa vůči libovolné ose umíme stanovit na základě znalosti 6 nezávislých složek tenzoru momentu setrvačnosti

Elipsoid setrvačnosti

- složky jednotkového vektoru ve směru rotace (směrové kosiny) $n_1,\ n_2,\ n_3$
- moment setrvačnosti vůči ose rotace (s využitím symetrií)

$$J = n_1^2 J_{11} + n_2^2 J_{22} + n_3^2 J_{33} + 2n_1 n_2 J_{12} + 2n_1 n_3 J_{13} + 2n_2 n_3 J_{23}$$

- zavedeme vektor $\vec{\rho} = \dfrac{\vec{n}}{\sqrt{J}}$
- názorná představa: na paprsky ve směrech osy rotace vynášíme vzdálenosti $1/\sqrt{J}$ $\rightarrow$ koncové body $\vec{\rho}$ vytvoří plochu, pro kterou platí

$$1 = \rho_1^2 J_{11} + \rho_2^2 J_{22} + \rho_3^2 J_{33} + 2\rho_1 \rho_2 J_{12} + 2\rho_1 \rho_3 J_{13} + 2\rho_2 \rho_3 J_{23}$$

- tato rovnice je známa jako rovnice kvadriky
- při splnění určitých podmínek na koeficienty J_{ij} (splňuje je každý symetrický tenzor 2. řádu) je řešením elipsoid - zde je to tzv. **elipsoid setrvačnosti**
- elipsoid setrvačnosti sestrojený pro hmotný střed tělesa se nazývá **centrální elipsoid setrvačnosti**

Elipsoid setrvačnosti

- aplikací Steinerovy věty lze sestrojit e.s. pro libovolný bod tělesa
- centrální elipsoid setrvačnosti je ze všech elipsoidů daného tělesa největší
- fyzikální význam e.s. najdeme takto:
  - pro různé směry osy rotace je hodnota momentu setrvačnosti *J* obecně různá
  - platí ale obecně $E_{kI} = \frac{1}{2} J\omega^2$
  - takže $J = \frac{2E_{kI}}{\omega^2}$
  - a proto $\vec{\rho} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{J}} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2E_{kI}}}$
  - elipsoidy $J_{ij}\rho_i\rho_j = 1 \quad \rightarrow \quad J_{ij}\omega_i\omega_j = 2E_{kI}$

Závěr: Plocha konstantní (kinetické) energie v prostoru vektorů úhlové rychlosti je $2E_{kI}$ násobkem elipsoidu setrvačnosti.

Diagonalizace tenzoru setrvačnosti

Povšimněme si:

- existují osy rotace, kde nedochází k „házení“
- elipsoid setrvačnosti v obecné s.s. orientován obecně
- e.s. má jisté symetrie – a to dokonce i v případě naprosto nesymetrických těles
- osy elipsoidu setrvačnosti určují význačné směry

Ukážeme, že při vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic jsou

- deviační momenty nulové $J_{12} = J_{23} = J_{13} = 0$

důsledky

- rovnice elipsoidu setrvačnosti v kanonickém tvaru $1 = \rho_1^2 J_{11} + \rho_2^2 J_{22} + \rho_3^2 J_{33}$
- výpočet momentu setrvačnosti vůči obecné ose otáční $J = n_1^2 J_{11} + n_2^2 J_{22} + n_3^2 J_{33}$
- pro osy rotace ve směru souřadnicových os platí $\vec{B} = \lambda \vec{\omega}$

Diagonalizace tenzoru setrvačnosti

- v soustavě spojené s tělesem hledáme kombinace skalárů λ a vektorů se složkami Ω_i , pro které platí $$\beta_i = \lambda \Omega_i \qquad \boxed{\vec{B} = \lambda \vec{\omega}}$$
- zároveň platí obecné vyjádření momentu hybnosti $$\beta_i = J_{ij} \Omega_i \qquad \boxed{\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega}}$$
- musí tedy platit trojice rovnic $$J_{ij} \Omega_i = \lambda \Omega_i$$
$$\begin{aligned} J_{11}\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3 &= \lambda\Omega_1 \\ J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3 &= \lambda\Omega_2 \\ J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3 &= \lambda\Omega_3 \end{aligned}$$
- rovnice můžeme rozepsat
$$\begin{aligned} (J_{11} - \lambda)\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3 &= 0 \\ J_{21}\Omega_1 + (J_{22} - \lambda)\Omega_2 + J_{23}\Omega_3 &= 0 \\ J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + (J_{33} - \lambda)\Omega_3 &= 0 \end{aligned}$$
- aby soustava rovnic měla netriviální řešení, musí determinant soustavy být nulový
$$\begin{vmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
- pro reálná J_{ij} tato kubická rovnice (tzv. charakteristická r.) má 3 reálné kořeny λ_1 , λ_2 a λ_3 (tzv. vlastní čísla)

Diagonalizace tenzoru setrvačnosti

- pro každé vlastní číslo λ_m dostaneme jednu trojici složek Ω_1, Ω_2 a Ω_3 (vlastní vektor)
  - určeny až na společnou konstantu $\Rightarrow$ řešení dá směr osy, ale ne velikost Ω
  - proto se vlastní vektory normují

- dá se ukázat, že pro λ_1, λ_2 a λ_3 různé, jsou jim příslušné vlastní vektory vzájemně kolmé
- v případě dvojného kořenu nejsou příslušné vlastní vektory určeny jednoznačně; rovnice určuje rovinu, v níž vlastní vektory musí ležet

- vlastní vektory v původní kartézské soustavě souřadnic představují souřadnicové osy nové kartézské soustavy

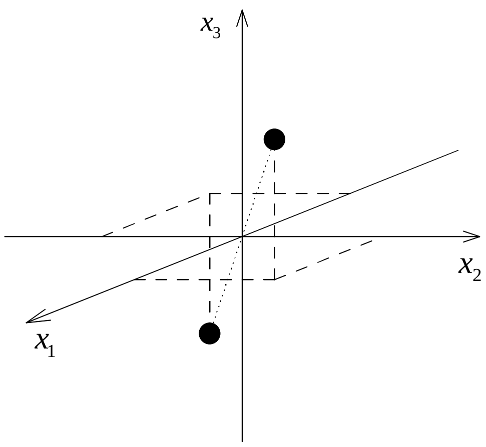
- vlastní vektory i matici je nutno vyjádřit pomocí nové báze

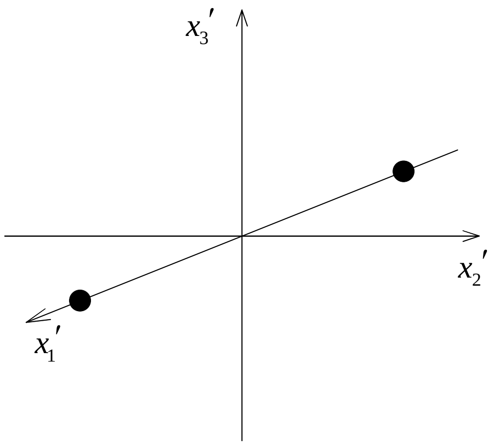
- vlastní vektory: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$
- matice má diagonální tvar: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
- proto lze zavést značení $J_1 \equiv J_{11} = \lambda_1$, $J_2 \equiv J_{22} = \lambda_2$, $J_3 \equiv J_{33} = \lambda_3$

Ukázka postupu diagonalizace

Příklad:

- 2 hmotné body o jednotkové hmotnosti na souřadnicích $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- tenzor momentu setrvačnosti soustavy $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- výpočet vlastních čísel pomocí determinantu $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$
- charakteristická rovnice: $(2-\lambda)^3 + 2(-1)^3 - 3(2-\lambda)(-1)^2 = 0$
- po úpravě: $\lambda(\lambda-3)^2 = 0$
- **pro vlastní číslo** $\lambda_0 = 0$ **dostaneme**
  - 2 rovnice pro složky vlastního vektoru: $2\Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3 = 0$, $-\Omega_1 + 2\Omega_2 - \Omega_3 = 0$
  - vlastní vektor musí splnit rovnice $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$
  - po normování vyhovuje vektor $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- **pro vlastní číslo** $\lambda_{2,3} = 3$ **dostaneme**
  - 1 rovnici pro složky vlastního vektoru: $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$
  - vlastní vektory musí ležet v rovině kolmé k vektoru $(1,1,1)$
  - vyhovují například vektory $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$
- **vyjádření v nové bázi:**
  - vlastní vektory (nová báze): $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$
  - matice (tenzor momentu setrvačnosti) má diagonální tvar: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
  - hmotné body mají v nové souřadnicové soustavě polohy $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0,0\right)$ a $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0,0\right)$





Hlavní osy a hlavní momenty setrvačnosti

- osy, vůči nimž deviační momenty tenzoru setrvačnosti vymizí, se nazývají **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti
- momenty setrvačnosti $J_1 \equiv J_{11} = \lambda_1,\ J_2 \equiv J_{22} = \lambda_2,\ \ J_3 \equiv J_{33} = \lambda_3$ se nazývají **hlavní momenty setrvačnost**

6 složek tenzoru $\rightarrow$ 3 složky tenzoru a 3 údaje pro orientaci souřadnicové soustavy

zjednodušení výpočtů:

- Eulerovy rovnice v hlavní souřadnicové soustavě

$$J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + \left(J_3 - J_2\right)\Omega_2\Omega_3 = \mu_1^E$$

$$J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + \left(J_1 - J_3\right)\Omega_1\Omega_3 = \mu_2^E$$

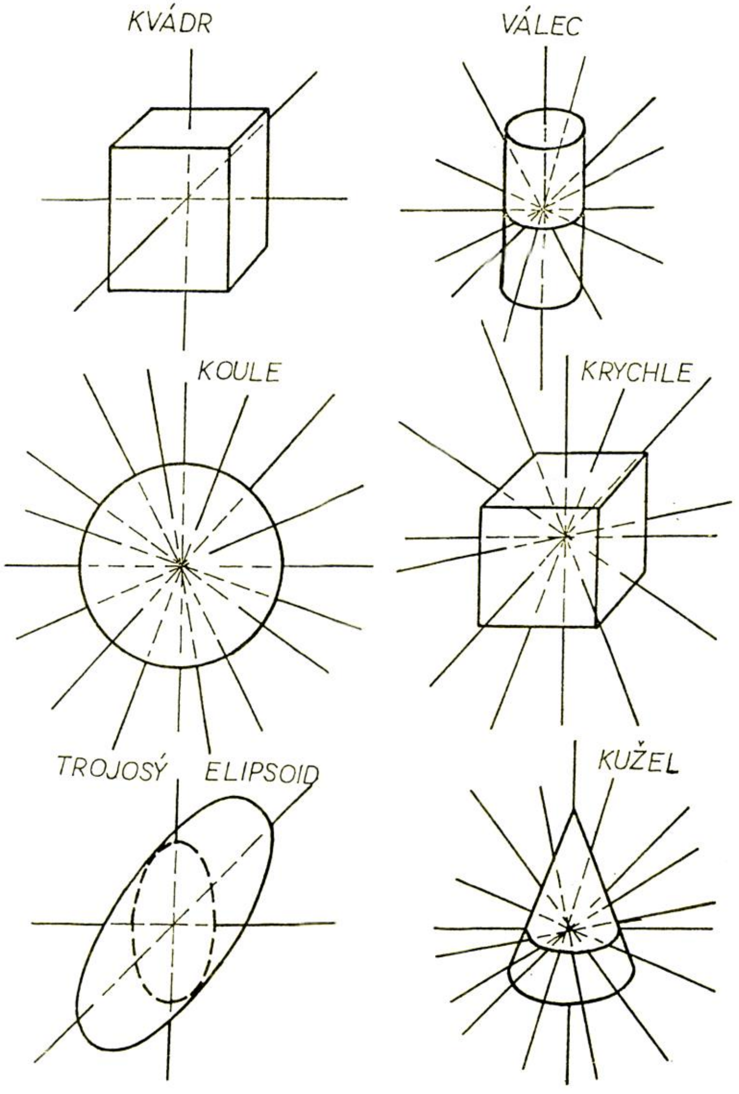
$$J_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + \left(J_2 - J_1\right)\Omega_1\Omega_2 = \mu_3^E$$

- rovnice elipsoidu setrvačnosti v kanonickém tvaru $1 = \rho_1^2 J_1 + \rho_2^2 J_2 + \rho_3^2 J_3$
- stanovení momentu setrvačnosti vůči lib. ose $J = n_1^2 J_1 + n_2^2 J_2 + n_3^2 J_3$

Závěr: moment setrvačnosti tělesa vůči libovolné ose lze stanovit na základě znalosti 3 jeho hlavních momentů setrvačnosti

Hlavní osy a hlavní momenty setrvačnosti

hlavní osy běžných homogenních těles
- často netřeba počítat, vyplynou ze symetrie
- rotační osa – hlavní osa
- osy kolmé k rotační ose – všechny jsou hlavní osy



proč?
- pokud je vlastní číslo dvojnásobný kořen charakteristické rovnice, pak máme pro tři složky jeho vlastního vektoru jen jednu rovnici
- to znamená, že dvě složky je možno zvolit (jinými slovy: je určena rovina procházející počátkem s.s., kde se musí vlastní vektory nacházet)

- v případě vyšší symetrie (koule) – všechny osy procházející hmotným středem jsou hlavní

- v případě krychle platí totéž – moment setrvačnosti pro libovolný směr má stejnou hodnotu

$$J = \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) J_1$$