Písemka č. 1 - 20. 3.

1. Nechť $a > 0$. Rozložte do Fourierovy řady na intervalu $(-\pi, \pi)$ funkci

$$f(x) = \sin(ax).$$

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci vzniklé řady.

2. Nechť $a \in \mathbb{C}$. Spočítejte

$$\int_{|z|=k|a|} \frac{z\,\mathrm{e}^z}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}z$$

pro hodnoty $k = \frac{1}{2}$ a $k = 2$. Kružnice se probíhají v kladném smyslu. Kdy budou oba výsledky stejné?

Řešení

1. Funkce $f(x)$ je lichá, takže $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Pro sinové koeficienty máme

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = |\text{ per partes }| \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\sin(ax)\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{a}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{k\pi}\big((-1)^k\sin(a\pi) - (-1)^k\sin(-a\pi)\big) + \frac{a}{\pi k}\left[\cos(ax)\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{a^2}{k^2}b_k
\end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{k^2 - a^2}{k^2}b_k = \frac{2(-1)^{k+1}\sin(a\pi)}{k\pi}$$

a

$$b_k = \frac{2(-1)^{k+1}k\sin(a\pi)}{\pi(k^2 - a^2)}$$

Ovšem toto celé projde jen v případě, že $a \notin \mathbb{N}$. Pokud je a přirozené číslo, dostáváme takto $b_k = 0$ pro $k \neq a$ a přirozeně $b_a = 1$, protože v takovém případě je $\sin(ax)$ sám sobě svým Fourierovým rozvojem.

Celkově platí pro $a \notin \mathbb{N}$

$$\sin(ax) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} k \sin(a\pi)}{\pi(k^2 - a^2)} \sin(kx).$$

Protože $f(x)$ je spojitá se spojitou derivací všude v $(-\pi, \pi)$, podle věty o konvergenci Fourierových řad řada vpravo konverguje bodově a lokálně stejnoměrně na tomto intervalu. V krajních bodech $x = \pm\pi$ je řada vpravo nulovou řadou a konverguje tak k nule, což je aritmetický průměr hodnot $\pm \sin(a\pi)$.

2. Pro $a = 0$ nedává úloha smysl. Dále tedy pouze $a \neq 0$. Pro $k = \frac{1}{2}$ je zadaná funkce na vnitřku dané kružnice holomorfní. Proto je její integrál přes tuto kružnici roven nule.

   Pro $k = 2$ to už neplatí, můžeme ale použít přímo Cauchyův vzorec a to pro druhou derivaci funkce $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$:

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=2|a|} \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}z,$$

   proto hledaný integrál má hodnotu

$$\int_{|z|=2|a|} \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}(2+a)\,\mathrm{e}^a.$$

   Oba výsledky budou stejné jen v případě, že ten druhý bude roven nule. Protože $\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^a \neq 0$, zůstává jediná možnost $a = -2$.