

Písemka - NMAG212 Geometrie 2 (5. 2. 2025)

Počtení část (90 minut)

1. příklad: Spočtete plošný obsah části šroubové plochy s parametrizací

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = 2v, \quad u, v \in \mathbb{R}^2,$$

obsažené v množině

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 < x^2 + y^2 < a^2, z > 0\},$$

kde $a > 0$ je daná konstanta.

2. příklad: (i) Ukažte, že

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0\}$$

je 2-plocha. Dokažte, že K má jedinou orientaci τ takovou, že její souřadnice $\tau_{12} := \langle \tau, e_{12} \rangle < 0$.

(ii) Spočtete integrál

$$\int_K z^4 dx \wedge dy + x^2 z^2 dy \wedge dz,$$

kde na K máme orientaci τ .

3. příklad: Necht' $R > r > 0$. Uvažujte torus $T \subset \mathbb{R}^3$, který vznikne rotací kružnice

$$S := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

v rovině xz kolem osy z .

(a) Parametrizujte vhodně T . Ukažte, že T je 2-plocha.

(b) Spočtete matice první a druhé fundamentální formy plochy T ve zvolené parametrizaci.

(c) Najděte Gaussovu křivost v obecném bodě plochy T .

(d) Určete eliptické, parabolické a hyperbolické body na T .

Hodnocení: maximálně 10 bodů za každý příklad, požadované minimum je 15 bodů celkem

Teoretická část (5. 2. 2025, 60 minut)

1. příklad: (a) Definujte plošnou míru na jednoduché k -ploše v $\mathbb{R}^n$ a ukažte její nezávislost na mapě.

(b) Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti plošné míry na k -ploše v $\mathbb{R}^n$.

2. příklad: (a) Definujte singulární krychli a řetězec v $\mathbb{R}^n$.

(b) Pro řetězec c definujte jeho hranici ∂c .

(c) Zformulujte Stokesovu větu pro řetězce v $\mathbb{R}^n$.

3. příklad: Necht' V je reálný vektorový prostor s bází $e_1, \dots, e_n$. Necht' $1 \leq k \leq n$ a $v_1, \dots, v_k \in V$. Jak vypadají souřadnice k -vektoru $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ vůči bázi e_J , $J \subset \{1, \dots, n\}$, vnější algebry $\bigwedge^*(V)$? Zformulujte a dokažte příslušné tvrzení.

Hodnocení: maximálně 10 bodů za každý příklad, požadováno minimálně 15 bodů celkem

Výsledná známka: **1** za 51-60 bodů, **2** za 41-50 bodů, **3** za 30-40 bodů

Písemka - NMAG212 Geometrie 2 (21. 1. 2025)

Počtní část (90 minut)

1. příklad: Ukažte, že množina

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1, x^2 + y^2 < 4\}$$

je 2-plocha a spočtete integrál

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

2. příklad: (i) Ukažte, že

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$$

je těleso se skoro hladkou hranicí.

(ii) Pomocí Gaussovy věty o divergenci spočtete integrál

$$\int_{\partial K} \langle F, \nu \rangle dS$$

pro vektorové pole $F(x, y, z) = (0, 0, z^3)$, je-li ν vnější jednotkové normálové pole na regulární hranici $\partial_* K$.

3. příklad: Plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ je dána jako graf funkce $z = x^2 - y^2$ a je orientovaná normálovým polem s kladnou z -ovou souřadnicí.

(a) Parametrizujte plochu S a najděte její normálový vektor v obecném bodě.
(b) Spočtete matici první a druhé fundamentální formy plochy ve zvolené parametrizaci.

(c) Najděte střední a Gaussovu křivost v obecném bodě plochy S .

(d) Najděte hlavní křivosti a hlavní směry plochy v bodě $(1, 0, 1)$.

Hodnocení: maximálně 10 bodů za každý příklad, požadované minimum je 15 bodů celkem

Teoretická část (21. 1. 2025, 60 minut)

- 1. příklad:** (a) Definujte vnější diferenciál d pro diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$.
(b) Vyslovte větu o vlastnostech vnějšího diferenciálu d . Dokažte 'Leibnizovo pravidlo' pro $d(\omega \wedge \tau)$.
- 2. příklad:** (a) Definujte orientaci k -plochy v $\mathbb{R}^n$. Kolik různých orientací může souvislá plocha mít? Zformulujte a dokažte příslušné tvrzení.
(b) Definujte orientaci jednoduché plochy indukovanou její parametrizací.
- 3. příklad:** (a) Definujte geodetiky na ploše. Ukažte, že geodetiky mají konstantní rychlost.
(b) Odvoďte rovnice pro geodetiky.

Hodnocení: maximálně 10 bodů za každý příklad, požadováno minimálně 15 bodů celkem

Výsledná známka: 1 za 51-60 bodů, 2 za 41-50 bodů, 3 za 30-40 bodů