

Cvičení 7 – Gaussovské a Eukleidovské obory

18. listopadu 2025

Příklad 1. Spočítejte ireducibilní rozklady prvků 3, 5, 6, $10 - 6i$ v $\mathbb{Z}[i]$.

Příklad 2. Rozhodněte, zda existuje více rozkladů čísla 6 v oborech $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ a pokud ano, zkuste je najít všechny.

Příklad 3. Vydělte se zbytkem následující čísla:

- a) $5 + 7i$ s $3 - i$ v $\mathbb{Z}[i]$,
- b) $3 + 2i$ s $1 + i$ v $\mathbb{Z}[i]$,
- c) 4 a $1 - \sqrt{-2}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$,
- d) $1 + 4\sqrt{-2}$ a $3 + \sqrt{-2}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$,
- e) $5 + 2\omega$ a $1 - \omega$ v $\mathbb{Z}[\omega]$, kde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Příklad 4. Spočítejte NSD pro následující dvojice a pokud to jde, určete Bézoutovy koeficienty:

- a) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ a $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ v $\mathbb{Z}[x]$,
- b) 5 a $7 + i$ v $\mathbb{Z}[i]$,
- c) 3 a $2 + \sqrt{-5}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,
- d) $x^3 + x^2 + x + 1$ a $x^2 - 2x + 2$ v $\mathbb{Z}_3[x]$,
- e) $6 - 3\sqrt{3}$ a $3 + \sqrt{3}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Příklad 5. Vysvětlete následující jev:

- V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ platí, že $2(-2) = (\sqrt{-3} + 1)(\sqrt{-3} - 1)$, a proto se jedná o obor s nejednoznačným rozkladem.
- v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí $2\sqrt{2} = (-4 + 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$, ale jedná se o obor s jednoznačným rozkladem.

Příklad 6. Rozložte polynom $2x^2 + 2x - 1$ nad Eukleidovským oborem $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ na součin ireducibilních prvků.

Příklad 7. Ukažte, že polynom $3x^3 + 2x^2 + (4 - 2i)x + (1 + i)$ je v $\mathbb{Z}[i][x]$ ireducibilní.

Příklad 8. Najděte v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ nekonečně mnoho invertibilních prvků.